Sabemos que PP′ es un diámetro de la esfera y que este diámetro pasa por el punto C. En el círculo máximo PAP′ el ángulo PAP′ inscrito en una semi-circunferençia es recto, y el triángulo PAP′ que vamos á construir es rectángulo, y su hipotenusa es igual al diámetro de la esfera. Conocemos ya un lado que es la distancia polar PA del círculo que se ha trazado, y vamos á determinar la longitud de la perpendicular AC bajada desde el vértice del ángulo recto sobre la hipotenusa, longitud que es igual al rádio del círculo mínimo. Al efecto señalamos sobre la circunferencia de dicho círculo mínimo tres puntos A, B, D, tomados á voluntad. Tomamos con el compás las distancias AB, AD, BD y formamos sobre un papel un triángulo *abd* que tenga por lados dichas tres líneas. Determinamos luego el centro *c* del círculo circunscrito á este triángulo y unimos *c* con *a*. Esta línea será evidentemente igual á CA. Hay que construir ahora el triángulo PAP′ conociendo AP y AC, cosa que no ofrece en verdad dificultad alguna. En el punto *c* elevamos á *ac* una perpendicular indefinida y desde el punto *a* como centro con un rádio igual á PA describimos un arco de círculo que corte esta perpendicular en *p*. El triángulo *pac* es igual al triángulo PAC. Por último, en el punto *a* elevamos una perpendicular á *ap* hasta que encuentre á *pc* prolongada en *p′* y el triángulo *pap′* será igual á PAP′ y por consiguiente *pp′* será el diámetro de la esfera.

368. Corolario. Si sobre *pp′* como diámetro se describe un círculo, será igual á un círculo máximo de la esfera, y el lado *pe* del cuadrado inscrito en este círculo será la cuerda de un cuadrante, es decir, la distancia polar de un círculo máximo (**366**); podrán trazarse luego círculos máximos en la esfera.

§ XXXVI. Planos tangentes á la esfera.

369. Definiciones. Se llama *plano tangente* á una esfera el plano que no tiene con ella mas que un punto comun, que se llama punto de *contacto* ó de *tangencia*.

370. Teorema. *Todo plano* P *perpendicular al extremo de un rádio* OA *de la esfera es tangente á esta,* y recíprocamente, *todo plano tangente á la esfera es perpendicular en el extremo del rádio que pasa por el punto de contacto* (fig. 255).

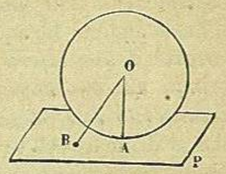


Fig. 255.

1.° Puesto que el plano P es perpendicular á OA, toda línea como OB que una el centro con un punto cualquiera del plano P, es oblícua á este plano, y por tanto, mayor que OA. El punto B es por consiguiente exterior á la esfera y el plano P no tiene mas que el punto A comun con la esfera y es tangente á ella en el punto A.

2.° Recíprocamente, supongamos el plano P tangente á la esfera en el punto A, en cuyo caso todos los demás puntos del plano P son exteriores á ella y estarán del punto O á mayor distancia que el rádio. La línea OA es, pues, la mas corta que puede trazarse desde el centro al plano P, y por tanto es perpendicular á dicho plano (**353**).

371. Corolario. Por un punto tomado en una esfera se le puede trazar un plano tangente, pero no mas que uno (**248**).

372. Observacion. Toda recta tangente á un círculo trazado en una esfera se llama tambien tangente á la esfera, porque es fácil demostrar que toda recta tangente á la esfera es perpendicular al rádio que pasa por el punto de contacto y por tanto está contenida en el plano tangente á dicho punto.

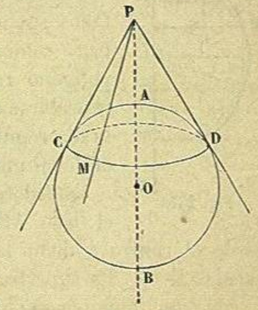


Fig. 256.

Consideremos una esfera O (figura 256) y un punto P exterior. Por el diámetro PB llevemos un plano cualquiera que corte la esfera siguiendo un círculo máximo ACB, y desde el punto P tracemos una tangente PC á este círculo. Despues hagamos girar la figura alrededor del diámetro PB. El círculo ACB engendrará la esfera y la recta PC describirá la superficie lateral de un cono, permaneciendo constantemente tangente á la esfera, y su longitud no variará de modo alguno. De aquí que *todas las tangentes que pueden trazarse á una esfera por un punto exterior son iguales y forman un cono circular recto.* Dicho cono se dice que está *circunscrito* á la esfera. Trazando á la esfera tangentes paralelas al diámetro AB se formaría del mismo modo un cilindro circunscrito á la esfera.

§ XXXVII. Medida de la superficie engendrada por una línea quebrada regular que gira alrededor de un eje trazado en su plano y por su centro. — Area de la zona. — Area de la esfera.

373. Teorema. *La superficie engendrada por una línea quebrada regular que gira alrededor de un eje trazado en su plano y por su centro, es igual al producto de la circunferencia del círculo inscrito por la proyeccion de la línea quebrada sobre el eje* (fig. 257).

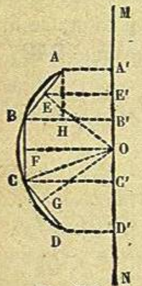


Fig. 257.

Se llama *línea quebrada regular* una línea quebrada que tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales tambien. Se demostrará como se hizo en el n.º **214** respecto del polígono regular que puede circunscribirse é inscribirse á un círculo. Sea ABCD la línea quebrada regular, O el centro, MN el eje alrededor del cual gira.

Consideremos la superficie engendrada por el lado AB. Sea OE la perpendicular bajada desde el centro á dicho lado; AA', BB', EE' perpendiculares bajadas al eje. La superficie descrita por AB es la de un tronco de cono que tiene por medida (**257**)

$$2\pi EE' \times AB.$$

Desde el punto A bajamos AH perpendicular sobre BB'. Los

triángulos ABH, EOE' son semejantes por tener los lados perpendiculares, de lo cual resulta

$$\frac{AB}{OE}=\frac{AH}{EE'};$$

de donde resulta, igualando el producto de los extremos con los medios, y reemplazando AH por su igual A'B'

$$EE' \times AB = OE \times A'B'.$$

Multiplicando ahora los dos miembros de esta igualdad por 2π, tendremos

$$2\pi EE' \times AB = 2\pi OE \times A'B'.$$

Pero $2\pi EE' \times AB$ es la expresion de la superficie engendrada por la línea AB, superficie que denominaremos superf. AB, y tendremos

$$\text{superf. } AB = 2\pi OE \times A'B'.$$

De igual manera tendremos

$$\text{superf. } BC = 2\pi OF \times B'C'$$
$$\text{superf. } CD = 2\pi OG \times C'D'.$$

Sumando y notando que $OE = OF = OG$, tendremos

$$\text{superf. } ABCD = 2\pi OE \times (A'B' + B'C' + C'D') = 2\pi OE \times A'D'.$$

Q. E. L. D.

374. Definiciones. Se llama *zona* la porcion de la superficie de la esfera comprendida entre dos círculos cuyos planos son paralelos. Estos círculos son las *bases* de la zona y la distancia de sus centros es la *altura* de la zona.

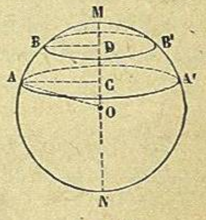


Fig. 258.

Cuando la zona no tiene mas que una base se llama *casquete esférico*, y su altura es la distancia desde el centro del círculo que le sirve de base al polo de dicho círculo Sea ABB'A' una zona, MN el diámetro per pendicular á las dos bases (fig. 258); MBAN un círculo máximo que pasa por los puntos M y N. Si se hace girar la semi-circunferencia alrededor de MN, engendrará la esfera y el arco AB, la zona : la altura CD es la proyeccion del arco AB sobre el diámetro MN.

375. Teorema. *El área de una zona es igual á la circunferencia de un círculo máximo multiplicada por la altura.*

Imaginemos que se inscribe en el arco AB (fig. 258) que engendra la zona una línea quebrada regular de gran número de lados. La superficie engendrada por esta línea quebrada tendrá por límite la engendrada por el arco AB, es decir, la zona. La superficie engendrada por la línea quebrada regular inscrita es igual á la circunferencia inscrita multiplicada por la proyeccion CD de dicha línea sobre el eje. Cuando aumenta indefinidamente el número de lados de la línea quebrada, el rádio de la circunferencia inscrita se acerca mas y mas al rádio OA de la esfera. Luego la zona tiene por medida la circunferencia de un círculo máximo multiplicada por su altura. Q. E. L. D.

376. Corolario. *Sobre una misma esfera, dos zonas son proporcionales á sus alturas.* Resulta de aquí que si se quiere dividir una zona en partes equivalentes, bastará dividir su altura en partes iguales y trazar por los puntos de division planos paralelos á las bases de la zona.

377. Observacion. Sea R el rádio de la esfera, H la altura de la zona. La longitud de la circunferencia de un círculo máximo es $2\pi R$ y por consecuencia el área de la zona es igual á

$$2\pi R \times H.$$

378. Teorema. *La superficie de una esfera es igual al producto de la circunferencia de un círculo máximo por su diámetro.*

En efecto la esfera entera puede considerarse como una zona engendrada por la revolucion de una semi-circunferencia alrededor de su diámetro, y esta zona tiene por altura el diámetro mismo de la esfera; luego su superficie es igual al producto de su diámetro por la circunferencia de un círculo máximo (**375**).

379. Corolario I. *La superficie de una esfera es equivalente á cuatro veces la superficie de un círculo máximo.*

En efecto, si llamamos R al rádio de la esfera, su superficie se podrá expresar por el producto $2R \times 2\pi R$ ó $4\pi R^2$; pero la superficie de un círculo máximo es igual á πR^2, y por tanto la de la esfera es cuatro veces mayor.

380. Observacion. Puede expresarse la superficie de una esfera como la de un círculo en funcion de su rádio, del diámetro ó de la circunferencia de un círculo máximo. Designaremos con las letras R, D, C, S, el rádio, el diámetro, la circunferencia de un círculo máximo y la superficie de la esfera. Tendremos, segun esto :

$$S = 4\pi R^2; \qquad [1]$$

si en esta fórmula reemplazamos R por $\frac{D}{2}$ resultará

$$S = 4\pi\frac{D^2}{4} = \pi D^2; \qquad [2]$$

hemos visto enfin (**250**) que el área de un círculo cuya circunferencia es C es igual á $\frac{C^2}{4\pi}$, y por consiguiente el área de la esfera que vale 4 círculos máximos será

$$S = \frac{C^2}{4\pi} \times 4 = \frac{C^2}{\pi}. \qquad [3]$$

381. Corolario II. *La relacion de la superficie de dos esferas es igual á la de los cuadrados de sus rádios.*

En efecto, sean R y R′ los rádios, S y S′ las superficies de dos esferas, y tendremos :

$$S = 4\pi R^2, \quad S' = 4\pi R'^2.$$

Dividamos estas dos igualdades miembro á miembro y suprimamos el factor comun 4π y tendremos :

$$\frac{S}{S'}=\frac{R^2}{R'^2}. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

Aplicaciones. I. La superficie de la tierra está dividida en cinco zonas, la *tórrida* comprendida entre los dos trópicos, dos zonas *templadas* comprendidas entre los trópicos y los círculos polares, y dos zonas *glaciales* comprendidas entre los círculos polares y los polos. Cada una de las templadas tiene de altura 3306 kilómetros próximamente.

¿Cuál será la superficie de una de estas zonas?

La circunferencia de un círculo máximo de la tierra equivale, segun la definicion del metro á 40 000 000 metros ó 40 000 kilómetros, y por tanto la superficie de una zona templada será

$$40\,000\times3306=132\,240\,000 \text{ kilómetros cuadrados próximamente.}$$

II. Hallar la superficie de la tierra en miriámetros cuadrados.

Puesto que la circunferencia de un círculo máximo es conocida, emplearemos la fórmula [3]. Dicha circunferencia es igual á 4000 miriámetros, y por tanto, la superficie del globo terrestre será

$$\frac{4000^2}{\pi}=16\,000\,000\times\frac{1}{\pi}=5\,092\,958 \text{ miriámetros próxima-}$$

mente.

III. El diámetro de un globo es de 22 centímetros, ¿cuál será su superficie?

Será igual á

$$22^2\times\pi=1520^{\text{m.c}},53$$

con un milímetro cuadrado de diferencia.

IV. La tela de un globo esférico tiene una superficie de 250 metros cuadrados : ¿cuál será su diámetro?

Tenemos :

$$\pi D^2=250\,;$$

de donde resulta

$$D=\sqrt{\frac{250}{\pi}}=\sqrt{79,5775}=8^{\text{m}},92,$$

con un centímetro de aproximacion.

§ XXXVIII. Medida del volúmen de la esfera considerada como suma de una infinidad de pirámides, que tienen por bases polígonos planos, infinitamente pequeños, y por altura el rádio.

382. Teorema. *El volúmen de la esfera es igual á su superficie multiplicada por el tercio del rádio.*

En efecto, imaginemos un poliedro, cuyas caras sean todas tangentes á la esfera, y unamos el centro de esta con todos los vértices de este poliedro. Quedará dicho poliedro descompuesto en pirámides que tendrán por base las diferentes caras del poliedro y por altura comun el rádio de la esfera, porque la distancia del centro de una esfera á un plano tangente es igual al rádio (**370**).

Resulta de aquí que el volúmen de este poliedro tendrá por medida el producto de la suma de sus caras por el tercio del rádio, ó lo que es lo mismo, el producto de su superficie por el tercio del rádio.

Supongamos ahora que aumenta indefinidamente el número de caras de este poliedro : su volúmen se aproximará mas y mas al de la esfera y su superficie tendrá por límite la superficie de la esfera. Luego el volúmen de la esfera tendrá por medida el producto de su superficie por el tercio de su rádio. Q. E. L. D.

383. Corolario. Sea V el volúmen de una estera, S su superficie, R su rádio, D su diámetro, y tendremos, segun el teorema precedente

$$V=S\times\frac{R}{3}\,;$$

reemplazando S por su valor $4\pi R^2$ (**380**), tendremos :

$$V=4\pi R^2\times\frac{R}{3}=\frac{4}{3}\pi R^3. \qquad [1]$$

Si reemplazamos S por πD^2 y R por $\frac{D}{2}$ resultará

$$V=\pi D^2\times\frac{D}{6}=\frac{1}{6}\pi D^3. \qquad [2]$$

Dedúcese inmediatamente de la fórmula [1] *que los volúmenes de dos esferas son proporcionales á los cubos de sus rádios.*

Aplicaciones. I. Hallar el volúmen de una esfera que tiene un metro de rádio.

Tenemos

$$V=\frac{4}{3}\pi\times 1^3=\frac{4}{3}\pi=4^{m.c},189790,$$

con un centímetro cúbico de diferencia.

II. Calcular el volúmen de una esfera cuya superficie es igual á cuatro metros cuadrados.

Tenemos $S=4\pi R^2$ y como $S=4$ resultará :

$$4=4\pi R^2;$$

de donde

$$R=\sqrt{\frac{1}{\pi}};$$

de otro lado

$$V=S\times\frac{R}{3};$$

luego

$$V=4\times\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{\pi}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{\pi}}=0^{m.c},75225,$$

ó sean 752 decímetros cúbicos y 250 centímetros cúbicos.

III. Calcular el volúmen del globo terrestre.

La circunferencia de un círculo máximo es igual á 4000 miriámetros : el rádio es igual á

$$\frac{C}{2\pi}=\frac{2000^{\text{miriamet.}}}{\pi};$$

y por consiguiente

$$V=\frac{4}{3}\pi\frac{2000^3}{\pi^3}=\frac{4\times 8000000000}{3\pi^2}$$
$$=\frac{32000000000}{3}\times\left(\frac{1}{\pi}\right)^2=1080731740^{\text{mir. cub.}}$$

IV. Calcular el rádio de una esfera cuyo volúmen es igual á un metro cúbico.

Tenemos en primer término,

$$1=\frac{4}{3}\pi R^3;$$

de donde se deduce

$$R^3=\frac{3}{4\pi}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\pi}=0,238732414;$$

y por consiguiente

$$R=\sqrt[3]{0,238732414}=0^m,620,$$

con un milímetro de diferencia.

V. Una esfera tiene un volúmen de $3^{m\,c},5$ y se pregunta cual será su superficie.

Tenemos

$$V=S\times\frac{R}{3}$$

y tambien

$$S=4\pi R^2$$

y sacando el valor de R de la primera ecuacion y trasladándole á la segunda resultará

$$S=4\pi\times\frac{9V^2}{S^2},$$

ó bien

$$S^3=36\pi V^2.$$

En el caso propuesto $V=3,5$; y por tanto

$$S^3=36\times3,5^2\times\pi=1385,442360234,$$

y como consecuencia

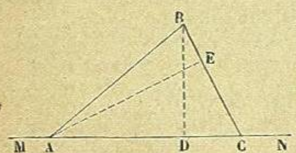
$$S=\sqrt[3]{1385,442360234}=11^{m.c},15$$

con un decímetro cuadrado de diferencia.

VI. La relacion del diámetro del sol con el de la tierra es de 108 556. ¿Cuál será la relacion de los volúmenes de estos dos astros?

Dicha relacion es igual al cubo de la relacion de los rádios, es decir, al cubo de 108,556, lo cual da 1 279 268. El sol es, pues, cerca de 1 279 000 veces mayor que la tierra.

384. Teorema[1]. *El volúmen engendrado por un triángulo que gira alrededor de un eje trazado en su plano por uno de sus vértices tiene por medida la superficie descrita por el lado opuesto á dicho vértice, multiplicada por el tercio de la altura correspondiente.*



Fih. 259.

Distinguiremos 3 casos :

1.° El triángulo gira alrededor de uno de sus lados. Sea ABC el triángulo que gira alrededor de AC (fig. 259), BD, AE las alturas bajadas desde los vértices B y A. El volúmen engendrado por ABC es la suma de dos conos engendrados por los triángulos rectángulos ABD, CBD. Tendremos, pues (**358**).

$$\text{vol. ABC}=\frac{1}{3}\pi\overline{BD}^2\times AD+\frac{1}{3}\pi\overline{BD}^2\times DC=\frac{1}{3}\pi\overline{BD}^2\times AC$$

$$=\frac{1}{3}\pi BD\times BD\times AC;$$

1. Los teoremas que siguen hasta el fin del párrafo XXXVIII no existen en el programa oficial : hemos creido, sin embargo, que debíamos incluirlos en el texto por lo útiles que son para resolver un gran número de cuestiones interesantes.

pero $BD\times AC=BC\times AE$, porque estos dos productos representan cada uno el doble del área del triángulo ABC; luego

$$\text{vol. ABC}=\pi BD\times BC\times\frac{1}{3}AE;$$

además $\pi BD\times BC$ es la superficie lateral del cono CBD (**354**) y por tanto podemos decir

$$\text{vol. ABC}=\text{superf. BC}\times\frac{1}{3}AE. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

2.° El triángulo ABC gira alrededor del eje MN que pasa por el vértice A y encuentra al lado BC prolongado, en el punto

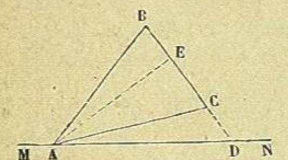


Fig. 260.

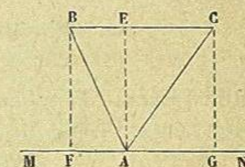


Fig. 261.

D (fig. 260). El volúmen engendrado por el triángulo ABC es la diferencia de los volúmenes engendrados por los triángulos ABD y ACD, y por tanto tenemos (1.°)

$$\text{vól. ABD}=\text{superf. BD}\times\frac{1}{3}AE,$$

$$\text{vol. ACD}=\text{superf. CD}\times\frac{1}{3}AE;$$

luego

$$\text{vol. ABC}=(\text{sup. BD}-\text{sup. CD})\times\frac{1}{3}AE=\text{sup. BC}\times\frac{1}{3}AE.$$

3.° El eje MN es paralelo al lado BC (fig, 261). Tendremos, pues,

$$\text{vol. ABC}=\text{vol. FBCG}-\text{vol. ABF}-\text{vol. ACG};$$

ahora bien :

$$FBCG=\pi\overline{AE}^2\times BC;\ \text{vol. } ABF=\frac{1}{3}\pi\overline{AE}^2\times AF,$$

$$\text{vol. } ACG=\frac{1}{3}\pi\overline{AE}^2\times AG;$$

de donde resulta que

$$\text{vol. } ABC=\frac{1}{3}\pi\overline{AE}^2(3BC-AF-AG)$$

$$=\frac{2}{3}\pi\overline{AE}^2\times BC=2\pi AE\times BC\times\frac{1}{3}AE,$$

y por último que

$$\text{vol. } ABC=\text{superf. } BC\times\frac{1}{3}AE.$$ Q. E. L. D.

385. Teorema. *El volúmen engendrado por el sector poligonal regular* OABCD *girando alrededor de un eje* MN *trazado en su plano por su centro, tiene por medida la superficie descrita por la línea quebrada regular* ABCD *multiplicada por el tercio del rádio del círculo inscrito* OE (fig. 262).

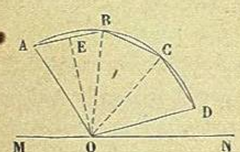


Fig. 262.

Sea ABCD una línea quebrada regular. El polígono OABCD es lo que se llama un *sector poligonal regular*. Trazamos los rádios OB, OC y valuamos los volúmenes engendrados por los triángulos OAB, OBC, OCD que tienen todos por altura OE. Tendremos en este caso (**384**):

$$\text{vol. } OAB=\text{sup. } AB\times\frac{1}{3}OE,$$

$$\text{vol. } OBC=\text{sup. } BC\times\frac{1}{3}OE,$$

$$\text{vol. } OCD=\text{sup. } CD\times\frac{1}{3}OE.$$

Reuniendo, tendrémos

$$\text{vol. } OABCD=(\text{sup. } AB+\text{sup. } BC+\text{sup. } CD)\times\frac{1}{3}OE$$

$$=\text{superf. } ABCD\times\frac{1}{3}OE.$$ Q. E. L. D.

386. Definicion. Se llama *sector esférico* el volúmen engendrado por un sector circular girando alrededor de un diámetro : el arco del sector engendra una zona que se llama la base del sector esférico.

387. Teorema. *El volúmen de un sector esférico es igual á la zona que le sirve de base multiplicada por el tercio de su rádio.*

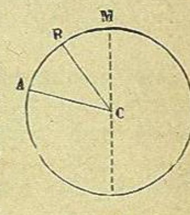


Fig. 263.

Sea OAB (fig. 263) el sector que girando alrededor de MN engendra el sector esférico. En el arco AB inscribimos una línea quebrada regular, y llamamos r el rádio del círculo inscrito en esta línea quebrada, y s la superficie que describe girando alrededor de MN. El sector poligonal regular engendra al mismo tiempo un volúmen cuya medida es (**385**).

$$s\times\frac{1}{3}r;$$

de donde se deduce fácilmente que el volúmen del sector esférico tiene por medida

$$\text{zona } AB\times\frac{1}{3}OA.$$

388. Corolario. Sea H la altura de la zona, R el rádio de la esfera, el volúmen del sector esférico será en este caso

$$2\pi RH\times\frac{1}{3}R=\frac{2}{3}\pi R^2H.$$

389. Observacion. La esfera entera puede considerarse como un sector esférico, bastando imaginarse para ello que el sector AOB que engendra el sector esférico aumenta hasta llegar á ser un semi-círculo. La zona que servia de base á dicho sector será ahora la superficie engendrada por la semi-circunferencia MAN, es decir, la superficie de toda la esfera. De aquí concluimos que el volúmen de la esfera es igual á su superficie multiplicada por el tercio de su rádio, que es lo mismo que queda demostrado por otro procedimiento (**382**).

APÉNDICE

ELIPSE Y PARÁBOLA

§ XXXIX. Definicion de la elipse, trazado de la curva por puntos y de un movimiento contínuo. — Definición de la parábola, trazado de una porcion de la curva por puntos y de un movimiento contínuo.

390. Definiciones. La *elipse* es una curva de tal naturaleza que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos fijos es constante. Estos dos puntos fijos son los *focos* de la elipse y las dos líneas que unen un punto cualquiera de la curva con los dos focos se llaman *rádios vectores* de este punto.

391. Problema. *Trazar una elipse mediante puntos conociendo los dos focos y la suma constante de los rádios vectores de cada punto.*

Sean F y F′ los dos focos (fig. 264). A partir del punto F to-

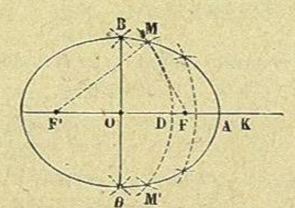


Fig. 264.

mamos sobre la recta F′F una longitud F′K igual á la suma de los rádios vectores. Desde el foco F′ como centro, con diferen-