como un sector esférico, bastando imaginarse para ello que el sector AOB que engendra el sector esférico aumenta hasta llegar á ser un semi-círculo. La zona que servia de base á dicho sector será ahora la superficie engendrada por la semi-circunferencia MAN, es decir, la superficie de toda la esfera. De aquí concluimos que el volúmen de la esfera es igual á su superficie multiplicada por el tercio de su rádio, que es lo mismo que queda demostrado por otro procedimiento (**382**).

APÉNDICE

ELIPSE Y PARÁBOLA

§ XXXIX. Definicion de la elipse, trazado de la curva por puntos y de un movimiento contínuo. — Definición de la parábola, trazado de una porcion de la curva por puntos y de un movimiento contínuo.

390. Definiciones. La *elipse* es una curva de tal naturaleza que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos fijos es constante. Estos dos puntos fijos son los *focos* de la elipse y las dos líneas que unen un punto cualquiera de la curva con los dos focos se llaman *rádios vectores* de este punto.

391. Problema. *Trazar una elipse mediante puntos conociendo los dos focos y la suma constante de los rádios vectores de cada punto.*

Sean F y F′ los dos focos (fig. 264). A partir del punto F to-

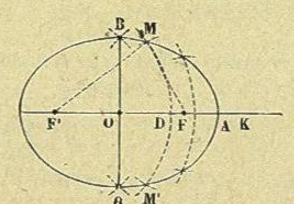

Fig. 264.

mamos sobre la recta F′F una longitud F′K igual á la suma de los rádios vectores. Desde el foco F′ como centro, con diferentes rádios describimos una série de arcos de círculo. Sea D el punto en que uno de ellos corta á la recta F'F. Desde el foco F como centro, tomando á DK como rádio, describimos otro arco de círculo que corte al primero en dos puntos M y M', que pertenecen á la elipse, porque la suma de las distancias MF y MF' del punto M á los dos focos es igual á F'D+DK, es decir, á la longitud dada F'K, y lo mismo sucede con el punto M'.

Así podrán determinarse cuantos puntos se quieran de la curva y uniéndolos por un trazo continuo, tendremos la elipse.

392. Observacion. I. La longitud F'K es necesariamente mayor que FF', puesto que esta longitud representa la suma de las distancias de un punto de la elipse á los dos puntos F y F'. Ahora bien, para que las dos circunferencias descritas desde los puntos F y F' como centros se lleguen á cortar, es necesario y basta que la distancia FF' sea mayor que la diferencia de los rádios, es decir, que resulte :

$$FF' > F'D - DK,$$

ó

$$F'D < FF' + DK;$$

y reemplazando en las desigualdades precedentes DK por F'K—F'D, tenemos

$$F'D < FF' + F'K - F'D$$

y tambien

$$2F'D < FF' + F'K;$$

y en fin, si A es el punto medio de la distancia FK, FF' + F'K es igual al doble de F'A, y resultará

$$2F'D < 2F'A, \quad \text{ó} \quad F'D < F'A.$$

Luego para que los círculos se corten, es necesario y basta que el punto D esté comprendido entre el punto F y el punto A.

393. Observacion. II. El punto A es un punto de la elipse porque AF + AF' = AK + AF' = F'K. Tomemos á la izquierda

del punto F' sobre FF' una longitud F'A' igual á FA. El punto A' será igualmente un punto de la elipse, porque A'F + A'F' será igual á AF + AF' ó á F'K. Tambien podrán obtenerse otros dos puntos importantes B y B' de la elipse describiendo desde los focos F y F' dos arcos de círculo, teniendo ambos por rádio $\frac{1}{2}$ FK. La línea BB' será perpendicular á FF' en su punto medio.

394. Problema. *Trazar la elipse mediante un movimiento continuo.*

Se fijan en los dos focos F y F' (fig. 265) dos puntas á las que se unen los extremos de un hilo que tenga una longitud igual á la suma de los rádios vectores que nos dan. Se tiende luego el hilo mediante un lápiz ó una punta que se mueve en el plano, cuidando que el hilo esté constantemente extendido, en cuyo caso la punta describe la elipse, porque en cada una de sus posiciones el hilo contiene la suma de los rádios vectores MF + MF' y es igual á la longitud constante de sí mismo.

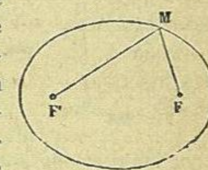

Fig. 265.

Se descubre por lo dicho que la elipse es una curva cerrada.

Observacion. De este medio se valen los jardineros para trazar elipses sobre el terreno, lo cual ha valido á dicha curva el nombre de *óvalo de jardineros*.

395. Definiciones. Se llama *eje* de una curva una recta que la divide en dos partes simétricas, es decir, en dos partes, que se aplican exactamente la una sobre la otra, cuando se hace girar la primera alrededor del eje para rebatirla sobre la segunda : un diámetro cualquiera de una circunferencia es un eje de esta curva.

Cuando una curva está cortada por su eje, cada uno de los puntos de interseccion de la curva y del eje es un vértice de la curva.

Se llama *centro* de una curva un punto que divide en dos partes iguales todas las cuerdas de la curva que pasan por este punto.

396. TEOREMA. *La elipse tiene por ejes la recta que une los dos focos, y la perpendicular elevada por el punto medio de esta recta : además tiene por centro el medio de la distancia focal.*

Sean F y F′ los dos focos (fig. 266), O el medio de su distancia, BB′ la perpendicular elevada por el punto medio de FF′, y M un punto cualquiera de la curva.

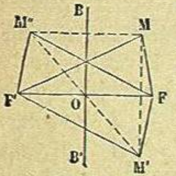

Fig. 266.

Si la parte superior de la figura gira alrededor de FF′ para rebatirse sobre la parte inferior, el punto M viene á parar á M′ y tenemos evidentemente

$$M'F+M'F'=MF+MF';$$

luego el punto M′ es un punto de la curva, y por tanto á todo punto M de la elipse corresponde un punto M′ simétrico con relacion á FF′, ó en otros términos, FF′ es un eje de la elipse.

Hagamos girar igualmente la porcion de la derecha de la figura alrededor de BB′ para rebatirla sobre la porcion de la izquierda. El punto F caerá en F′ y el punto M en un punto como M″, respecto del cual decimos que pertenece á la elipse. En efecto, segun la construccion, $M''F'=MF$ y el ángulo $M''F'F$ es igual á MFF'. Por consiguiente, los dos triángulos MFF' y $M''F'F$ son iguales por tener un ángulo igual comprendido entre lados iguales, de donde resulta que $M''F=MF'$. Tendrémos, pues,

$$M''F+M''F'=MF'+MF;$$

lo que prueba que el punto M″, simétrico del punto M pertenece á la elipse. A todo punto M de la elipse corresponde otro punto M″ de dicha curva, simétrico del primero con relacion á BB′, ó en otros términos, BB′ es un eje de la curva.

Decimos en fin que el punto O es el centro de esta curva. En efecto, el cuadrilátero $M'FM''F'$ es un paralelógramo que tiene los lados opuestos iguales, y por tanto la diagonal $M'M''$ pasa por el punto medio O de la otra diagonal FF′ y está dividida por este punto en dos partes iguales. Siendo el punto M′ un punto cualquiera de la elipse, se ve por ello que el punto O divide en dos partes iguales todas las cuerdas que pasan por él, y es por tanto el centro de la elipse.

397. COROLARIO. La elipse tiene cuatro vértices que son precisamente los puntos A, A′, B, B′ sobre los cuales hemos llamado la atencion al construir la elipse, mediante puntos.

398. OBSERVACIONES. El eje AA′ (fig. 267) es igual á la suma de los rádios vectores de un punto cualquiera de la curva. En efecto, tenemos

$$AA'=AF'+A'F'=AF'+AF,$$

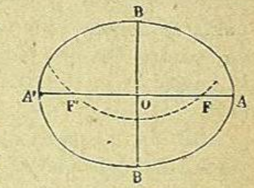

Fig. 267.

lo cual prueba que dicho eje es igual á la suma de los rádios vectores del punto A. Llamaremos a la mitad de la longitud de este eje, es decir, la distancia del centro O al vértice A, y c la mitad de la distancia focal, es decir OF. Estas dos cantidades bastan para determinar la elipse.

Busquemos ahora la longitud del otro eje, ó mejor de su mitad OB, que llamarémos b. El punto B está equidistante de los focos F y F′, y como la suma de sus rádios vectores es igual á $2a$, la distancia BF es igual á a. Ahora bien : en el triángulo rectángulo BOF tendrémos

$$b^2=a^2-c^2 \quad \text{ó} \quad b=\sqrt{a^2-c^2}.$$

Esta igualdad muestra que b es menor que a, por cuya razon AA′ se llama el *eje mayor* de la elipse y BB′ el *eje menor*. Los focos están situados en el eje mayor.

Una elipse está determinada cuando se dan estos dos ejes AA′ y BB′, porque en este caso se obtendrán los focos describiendo desde el vértice B como centro, con un rádio igual á a un arco de círculo que encontrará á AA' en dos puntos F y F' que serán los focos.

Se llama *excentricidad* de una elipse la relacion de la distancia focal FF' con el eje mayor AA', esto es, la relacion $\frac{c}{a}$. La elipse es un óvalo mas ó menos alargado, y su forma depende de la excentricidad. Si la excentricidad es nula, los dos focos se confunden con el centro y la elipse viene á ser un círculo; si la excentricidad es muy pequeña, los dos focos están muy próximos, los dos ejes son casi iguales; la curva es redondeada y difiere poco de una circunferencia, lo cual tiene lugar en las órbitas de los planetas. A medida que la excentricidad aumenta, la diferencia de los ejes aumenta tambien, la curva se aplasta cada vez mas y tiende á confundirse con su eje mayor, cosa que ocurre cuando la excentricidad es igual á la unidad.

389. Definiciones. La *parábola* es una curva de tal naturaleza, que cada uno de sus puntos está igualmente distante de un punto fijo llamado *foco* y de una recta fija llamada *directriz*.

La distancia del foco á la directriz se llama *parámetro* de la parábola.

La línea que une un punto de la parábola con el foco se llama *rádio vector* de este punto.

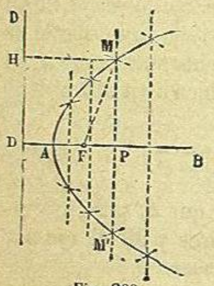

Fig. 268.

400. *Construir la parábola mediante puntos conociendo el foco y la directriz.*

Sea F el foco, DD' la directriz (fig. 268), FD una perpendicular bajada desde el foco á la directriz. El punto medio A de la distancia FD es un punto de la parábola. Por un punto P tomado á la derecha del punto A trazamos una paralela á la directriz y desde el punto F como centro, con un rádio

igual á DP describimos un círculo que determina sobre la paralela dos puntos M y N de la parábola, porque $MF=DP=MH$. Repitiendo esta construccion se tendrán tantos puntos como se deseen de la parábola. Para que la construccion sea posible es necesario que $FP<DP$ lo cual exige que el punto P esté á la derecha del punto A.

Resulta de la construccion que la curva no es cerrada, sino que se extiende indefinidamente alejándose de la directriz.

401. Problema. *Trazar la parábola con un movimiento contínuo.*

A lo largo de la directriz DD' se aplica una regla (fig. 269) y contra esta regla se apoya uno de los lados del ángulo recto de una escuadra GHK. Al punto G se halla unido el extremo de un hilo cuya otra extremidad está en el foco F y cuya longitud es igual al lado GH de la escuadra. Se hace resbalar la escuadra á lo largo de la regla manteniendo con un lápiz el hilo aplicado sobre GH. El lápiz trazará un arco de parábola, porque tendremos para el punto M, por ejemplo,

$$GM+MF=GH$$

de donde

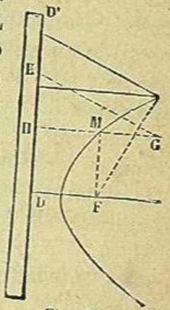

Fig. 269.

$$MF=GH-GM=MH$$

El punto M está, pues, igualmente distante del foco y de la directriz, y por consiguiente pertenece á la parábola.

402. Observacion. La perpendicular FD bajada desde el foco sobre la directriz es un eje de la parábola y el punto A es el vértice.

La demostracion es análoga á la que hemos dado para el eje mayor de la elipse (**396**). Puede por lo demás observarse que en la construccion de la curva por puntos, los dos M y M' que se obtienen á la vez son evidentemente simétricos con relacion á FD, y por consiguiente, á cada punto M de la parábola corresponde otro punto M de esta misma curva, simétrico del primero con relacion á la línea FD, ó en otros términos, la línea FD es un eje de la parábola.

EJERCICIOS SOBRE EL LIBRO VIII

TEOREMAS PARA DEMOSTRAR

1. El volúmen de un tronco de cono es igual á la suma de un cilindro que tenga la misma altura que el tronco y por base la seccion paralela dada á igual distancia de las dos bases, y de un cono que tenga tambien la misma altura que el tronco y por base un círculo cuyo rádio es igual á la semi-diferencia de los rádios de las dos bases del tronco.

2. Cuando la apotema de un tronco de cono es igual á la suma de los rádios de las bases, la media geométrica entre estos rádios da la mitad de la altura, y se obtiene el volúmen multiplicando la superficie total por la sexta parte de dicha altura.

3. Por cuatro puntos que no están situados en el mismo plano puede hacerse pasar una esfera, pero no mas de una.

4. Si un cilindro está circunscrito á una esfera y se le corta por planos paralelos al círculo máximo de contacto, la zona comprendida entre estos dos planos es equivalente á la porcion de la superficie cilíndrica comprendida entre estos mismos planos.

5. Un casquete esférico es equivalente al círculo que tiene por rádio la cuerda del arco que engendra el casquete.

6. El volúmen del cilindro circunscrito á una esfera es $\frac{3}{2}$ del de la esfera, y la superficie total es igualmente $\frac{3}{2}$ del de la esfera.

7. Un cono está circunscrito á una esfera dada, y su altura

términos, el volúmen de la pirámide es el límite de la suma de los volúmenes de estos prismas, cuando su número aumenta mas y mas. Ahora bien, por muy grande que sea este número, la suma de los prismas inscritos en la primera pirámide es igual á la suma de los prismas inscritos en la segunda. Luego las dos pirámides son equivalentes. Q. E. L. D.

334. Teorema. *El volúmen de una pirámide cualquiera es igual al tercio del producto de su base por su altura* (fig. 238).

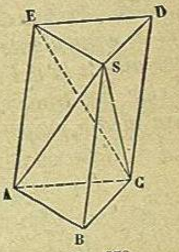

Fig. 238.

1.º Consideremos en primer lugar una pirámide triangular SABC. Sobre ABC como base y BS como arista construimos el prisma ABCESD, que tiene la misma base y la misma altura que la pirámide. Dicho prisma se compone de la pirámide SABC y de la pirámide cuadrangular SACED. Esta última se descompone en dos pirámides triangulares SACE, SDCE que tienen bases iguales ACE, DCE y la misma altura, por lo cual son equivalentes (**333**). Además la pirámide SDCE puede considerarse teniendo por base SDE y por vértice el punto C, en cuyo caso tiene la misma base y la misma altura que la pirámide SABC, y por consecuencia es equivalente á ella. De esto resulta que las tres pirámides que componen el prisma son equivalentes, y la pirámide SABC es el tercio del prisma que tiene la misma base y altura que ella. De aquí se deduce finalmente (**334**) que la pirámide tiene por medida de su volúmen el tercio del producto de su base por su altura.

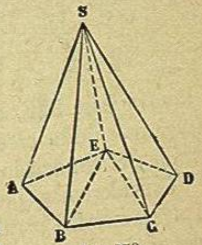

Fig. 239.

2.º Sea en segundo lugar la pirámide poligonal SABCDE (fig. 239). Por la arista SE de esta pirámide y por las aristas SB y SC se trazan planos que la descompongan en pirámides triangulares; que tengan todas por altura la de la pirámide en cuestion. Cada una de estas pirámides triangulares tiene por medida el producto de su base por el tercio de la altura comun; luego la pirámide total tiene por medida la suma de las bases triangulares multiplicada por el tercio de la altura, es decir, el tercio del producto de la base poligonal ABCDE por la altura. Q. E. L. D.

335. Observacion. Un poliedro cualquiera puede siempre descomponerse en pirámides, imaginando, por ejemplo, un punto tomado en su interior que se una con todos los vértices. Calculando el volúmen de cada pirámide, se obtendrá el volúmen del poliedro.

336. Teorema. *Un tronco de pirámide de bases paralelas es equivalente á la suma de tres pirámides que tengan por altura la del tronco y por bases, la primera la base inferior del tronco, la segunda la base superior y la tercera una media proporcional entre estas dos bases.*

1.° El tronco de pirámide es triangular (fig. 240). Descomponemos este sólido en pirámides, y trazamos en primer lugar el plano EAC que separa del poliedro la pirámide EABC, que tiene por base la inferior del tronco ABC y por altura la del tronco: esta es la primera de las pirámides del enunciado.

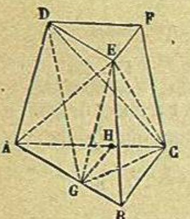

Fig. 240.

Queda la pirámide cuadrangular EACFD, que descomponemos en dos pirámides triangulares ECFD, EADC. La ECFD puede considerarse teniendo por vértice el punto C y por base DEF, es decir, la base superior del tronco: la altura es en este caso la del tronco, y esta es la segunda pirámide del enunciado.

Consideremos, por último, la pirámide EADC. Por el putno E trazamos EG paralela á AD, y por tanto, al plano ADC. Las dos pirámides EADC, GADC son equivalentes, por tener la misma base y la misma altura. La pirámide GADC puede considerarse teniendo por vértice el punto D y por base GAC. Su al-

es doble del diámetro de la esfera. Demostrar que su volúmen es doble del de la esfera y que su superficie total es doble de la de la esfera.

8. En un paralelipípedo rectángulo cuyas dimensiones son a, b, c, se empilan esferas iguales cuyo diámetro está contenido m veces en a, n veces en b y p veces en c. Demostrar que si m, n y p varian permaneciendo enteros, la suma de los volúmenes de todas estas esferas permanece constante.

9. Los volúmenes engendrados por un paralelógramo que gira sucesivamente alrededor de dos lados adyacentes, están en razon inversa de las longitudes de dichos lados.

10. El volúmen engendrado por un triángulo que gira alrededor de una recta situada en su plano y exterior al triángulo es igual al producto del área del triángulo por la circunferencia que describe el punto en que se cortan las medianas del triángulo.

11. El volúmen engendrado por un segmento de círculo que gira alrededor de un diámetro es igual á la sexta parte de un cilindro que tenga por rádio la cuerda del segmento y por altura la proyeccion de esta cuerda sobre el eje.

12. Dada una série de círculos concéntricos, trazamos en estos círculos cuerdas iguales todas entre sí y paralelas á un diámetro comun. Los volúmenes engendrados por los segmentos correspondientes girando alrededor del diámetro comun son equivalentes.

13. El volúmen de un segmento de esfera es igual á la suma de un cilindro que tenga la misma altura que el segmento y por base la semi-suma de las bases del segmento, y de una esfera que tenga por diámetro la altura del segmento. (Se llama *segmento de esfera* la porcion de esta comprendida entre dos planos paralelos.)

PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. Calcular el volúmen engendrado por un triángulo equilátero girando alrededor de uno de sus lados.

2. Calcular el volúmen engendrado por un octógono regular que gira alrededor de uno de sus lados.

3. Dividir el área lateral de un cono de revolucion en partes equivalentes por planos paralelos á las bases.

4. Conociendo el volúmen de un tronco de cono de revolucion, una de sus bases y la altura, hallar la otra base.

5. Un cilindro y un tronco de cono tienen una base comun y la misma altura : ¿cuál será la relacion de las dos bases del tronco de cono para que el volúmen del cilindro sea el doble del del tronco de cono?

6. Dado el cuadrado ABCD y la recta AX trazada por el vértice A en el plano del cuadrado, se pide que construyamos sobre el lado BC como base el triángulo isósceles BCM, de tal modo, que este triángulo y el cuadrado dado engendren volúmenes equivalentes girando alrededor de la recta AX. (Concurso general de la clase de Retórica, 1867.)

7. En un cubo dado se inscribe una esfera, y en ella se inscribe un segundo cubo : se pide la relacion de los volúmenes de estos dos cubos. (Concurso general de Filosofía, 1865.)

8. ¿Qué condiciones deben reunir dos círculos que no están en un mismo plano para que pertenezcan á una misma esfera?

9. Hallar el lugar de los centros de las secciones, dadas en una esfera, mediante todos los planos que pasen por una recta dada.

10. Por una recta dada trazar un plano tangente á una esfera tambien dada.

11. Dada una esfera y un plano, consideramos cada punto del plano como el vértice de un cono circunscrito á la esfera, y que tiene por consiguiente como base un círculo mínimo de esta esfera. Se pide que hallemos el lugar geométrico de los centros de los círculos de esta manera determinados. (Concurso general de la clase de Retórica, 1866.)

12. Dadas dos esferas se inscribe en la primera un cono recto de base circular cuyo lado sea igual al diámetro de la base y se circunscribe á la segunda un cilindro. Resulta que el volúmen del cono es la décimaoctava parte del del cilindro, y se

pide la relacion que hay entre los rádios de las dos esferas. (Concurso general de la clase de Retórica, 1873.)

13. En una esfera de un rádio conocido consideramos una zona de dos bases : es además conocida el área de esta zona y la distancia de una de sus bases al centro. Se desea saber cuál sea el rádio de la otra base.

14. Inscribir en una esfera un cono cuya área lateral equivalga á la del casquete esférico terminado en el mismo círculo.

15. Cortar una esfera por un plano tal que el área determinada por dicho plano equivalga á la diferencia de los dos casquetes en que divide la esfera.

16. Un triángulo ABC gira alrededor de una recta dada pasando por el vértice A, y se pide que tracemos por este vértice una recta AD de tal naturaleza, que los volúmenes engendrados por los triángulos ABD y ACD sean equivalentes.

17. Trazar una paralela á la base de un triángulo, de modo que los volúmenes engendrados por las dos partes del triángulo girando alrededor de su base sean equivalentes.

18. Circunscribir á una esfera dada un tronco de cono cuyo volúmen esté con el de la esfera en una relacion dada. Hallar la relacion de la superficie total del tronco de cono con la de la esfera. (Concurso general de la clase de Retórica, 1869.)

19. Un triángulo equilátero ABC, cuyo lado es igual á a gira alrededor de una recta MN situada en su plano y paralela á uno de sus lados BC. Cuál debe ser la distancia de las dos paralelas BC y MN para que el volúmen engendrado por el triángulo, girando alrededor de MN sea igual á cuatro veces el volúmen engendrado por el mismo triángulo girando alrededor de su lado BC. (Concurso general de la clase de Filosofía, 1870.)

20. Dado un semi-círculo AB, se pide que hallemos sobre su circunferencia un punto N de tal naturaleza, que si se traza la tangente MP hasta que encuentre el diámetro AB prolongado, si se une el punto M con el centro O y se hace girar luego la figura alrededor de AB, los volúmenes engendrados por el sector AOM y por el triángulo OMP estén entre sí en una

relacion dada. (Concurso general de la clase de Retórica, 1870.)

21. Dada una esfera OA, determinar otra segunda esfera O'A tangente interiormente á la primera en A y de tal naturaleza, que si se le traza un plano tangente en A, y que si, siguiendo el círculo de interseccion de este plano con la esfera dada se circunscribe un cono á dicha esfera, resulta que el volúmen comprendido entre la superficie lateral del cono y el de la zona BAC sea igual á m veces el volúmen de la esfera O'A. (Concurso general de la clase de Retórica, 1868.)

22. El diámetro de un círculo es de 4 metros : una cuerda paralela á este diámetro es de 2. ¿Cuál será la superficie engendrada por esta cuerda, girando alrededor del diámetro?

23. Tenemos un depósito cilíndrico de $2^m,40$ de profundidad, y debe contener 1200 litros de agua. ¿Cuál será su diámetro?

24. El lado de un cono es de $28^m,5$ y la superficie de su base de 6 metros cuadrados. ¿Cuál será la superficie del círculo cuyo plano recto dista del de la base $2^m,75$?

25. Calcular las dimensiones del doble decálitro empleado para los áridos, sabiendo que su diámetro es igual á su altura.

26. ¿Cuál será el diámetro de un hilo de platino que pesa 28 gramos por metro de longitud, sabiendo que la densidad del platino es 22,06?

27. La superficie de un cilindro recto es a; su volúmen, b. Calcular el rádio de la base y la altura de este cilindro.

28. Hacemos girar un triángulo equilátero alrededor de uno de sus lados, y se nota que la superficie engendrada equivale á la superficie total de un cilindro de $0^m,6$ de rádio y $8^m,8$ de altura. ¿Cuál será la longitud del lado de aquel triángulo? (Concurso general de la clase de Filosofía, 1868.)

29. Calcular el volúmen engendrado por un rombo de $3^m,79$ de lado, girando alrededor de una de sus diagonales que tiene 6 metros de longitud.

30. Por un punto S tomado en la prolongacion del diámetro de un círculo, se traza una tangente SA y se hace girar la figura alrededor del diámetro. El círculo describe una esfera, y la línea SA un cono cuya base es el círculo descrito por la perpendicular AP al diámetro. ¿Cuál será la superficie y el volúmen de este cono, teniendo en cuenta que el rádio del círculo es de $0^m,035$ y la distancia del punto S al centro de $0^m,125$?

31. Un cono de corcho tiene $0^m,6$ de rádio en la base, y $0^m,8$ de altura, y se sumerje en el agua por su vértice. ¿Qué cantidad, contada sobre su altura, debe sumergirse suponiendo que la densidad del corcho es de 0,24?

32. La altura de un tronco de cono es h; los diámetros de sus dos bases son 4 y 22 decímetros. ¿Qué diámetro será menester dar á un cilindro de la misma altura h para que su volúmen fuera equivalente al del tronco de cono?

33. Un vaso tiene la forma de un tronco de cono cuya base inferior tiene 23 centímetros de diámetro. La superficie superior del agua contenida en dicho vaso es un círculo de 26 centímetros de diámetro y la profundidad de la misma de $14^c,4$. Se deja caer un cubo de piedra de 3 centímetros de lado. ¿A qué altura se elevará el nivel del agua?

34. Un vaso de forma cónica tiene la capacidad de un litro y un diámetro de 25 centimetros, y está lleno de agua y mercurio. El peso de los dos líquidos es el mismo, y se pregunta cuál será el espesor de la capa de agua y la del mercurio, siendo la densidad de este 13,6.

35. Un cristal tiene la forma de un tronco de cono cuyo fondo tiene $0^m,04$ de diámetro, el borde superior $0^m,07$ y la altura $0^m,10$. Dicho cristal contiene un metal en fusion cuya superficie superior es de $0^m,06$ de diámetro, y se desea verter el metal en un molde esférico. ¿Cuál debe ser el rádio de este molde para que el metal le llene enteramente?

36. El rádio de la superficie de los mares, suponiéndola esférica, es de 6 366 198 metros. ¿A qué distancia puede extenderse en alta mar la mirada de un observador colocado á 50 metros sobre el nivel del mar?

37. Una bola de vidrio pesa un kilógramo. ¿Cuál será la superficie exterior de dicha bola, siendo la densidad del vidrio 2,38?

38. Hallar el volúmen de una esfera en la cual se conoce la altura y la superficie de una zona. La altura es de $0^m,47$, y la superficie de dos metros cuadrados.

39. Un pedazo de cobre de forma cúbica y que pesa $1^{kil},75$ se coloca en un torno y se le reduce á una esfera cuyo diámetro es igual á $0^m,75$ de la longitud del lado del cubo primitivo. La densidad del cobre es 8,85. ¿Cuál será el peso de la pieza de cobre obtenida?

40. Una esfera, un cilindro y un cono tienen volúmenes equivalentes. La esfera, la base del cilindro y la del cono tienen además diámetros iguales entre sí y á 3 decimetros. ¿Cuál será la altura del cilindro y la del cono?

41. Se desea hacer con tafetan barnizado que pese 250 gramos por metro cuadrado un globo esférico para contener 904 metros cúbicos de gas. ¿Cuál será el peso del tafetan empleado?

42. AB es el diámetro de un semi-círculo. Tomamos un punto C sobre este diámetro y sobre cada uno de los segmentos AC y BC como diámetro, describimos un semi-círculo. ¿Cuál será el volúmen descrito por la superficie comprendida entre las tres semi-circunferencias cuando la figura haya dado una vuelta entera alrededor de AB?

FIN

ÍNDICE

PRIMERA PARTE

GEOMETRÍA PLANA

NOCIONES PRELIMINARES

LIBRO PRIMERO

DE LA LÍNEA RECTA