TRERA

OMETRI

TRATADO
DE
GEOMETRIA ELEMENTAL

ADOPTADO COMO TEXTO EN LA

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

Y ESCRITO POR

MANUEL MARIA CONTRERAS

Profesor de Matematicas y de Fisica en dicho establecimiento, Ingeniero de Minas, Ensayador y Beneficiador de metales, etc.

CUARTA EDICION REVISADA Y CORREGIDA.

MEXICO.

Imprenta de J. F. Jens, San Jose el Real numero 22.

1884.

AL SEÑOR

D. GABINO BARREDA

En testimonio de aprecio y alta consideracion
dedica este trabajo

Manuel María Contreras.

***OPINIONES** publicadas sobre las Matemáticas del Ingeniero Manuel María Contreras.*

Los que suscribimos certificamos:

1° Que el profesor D. Manuel María Contreras escribió su tratado de matemáticas por encargo del director de la Escuela Nacional Preparatoria, con el objeto de satisfacer debidamente el programa del actual plan de estudios.

2° Que el original de su aritmética fué examinado por los CC. profesores Gabino Barreda, Francisco Diaz Covarrubias, Rafael A. de la Peña é Ignacio Ortiz de Zárate; que el de su álgebra, lo fué por los profesores Manuel Fernandez Leal y Luis del Castillo, y que los de su geometría y trigonometría lo fueron por los profesores Manuel Ramirez y Francisco Echeagaray, quienes unánimemente los consideraron buenos y adecuados á la enseñanza.

3° Que la junta general de catedráticos de dicha Escuela, ha ratificado esa calificacion y los ha aceptado como obras de texto.

4° Que las modificaciones que la experiencia ha indicado y hemos propuesto al autor las ha adoptado, y que seguirá haciendo algunas otras en las posteriores ediciones, con el fin de ir sucesivamente facilitando y mejorando la enseñanza de los alumnos, y

5° Que con el uso de los mencionados tratados de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría, hemos obtenido durante varios años, muy buenos resultados en la instruccion de nuestros discípulos, tanto en las clases del gobierno como en las particulares.

México, Octubre 16 de 1878.—*M. Fernandez.—M. Ramirez.—M. Calderon.—A. Barroso.—F. Echeagaray.—I. Vallarino.—Rafael Barba.—M. Villamil.—Rafael Angel de la Peña.—Emilio G. Baz.—Luis del Castillo y Pacheco.—Ignacio Ortiz de Zárate.*

Del anterior documento resulta, pues, que las obras de matemáticas del Sr. Contreras, no solo fueron examinadas y declaradas buenas por personas competentes, sino que con el uso de ellas durante algunos años, se han obtenido buenos resultados en la enseñanza.

Suplicamos á nuestros colegas se sirvan reproducir el anterior certificado, en honor de una persona que, como el Sr. Contreras, coopera con empeño á la instruccion de la juventud.

(Diario Oficial, Octubre 23 de 1878)

Señores redactores de *La Libertad:*

Agradeceremos mucho á vdes. se sirvan publicar en su acreditado diario el certificado siguiente:

Los que suscriben, antiguos profesores de la Escuela Nacional de Agricultura y Veterinaria, certifican: que durante los años de 1875 y 1876 han dado la clase de primer curso de matemáticas siguiendo como obra de texto la del Sr. Ingeniero Manuel María Contreras, con notorio aprovechamiento de los alumnos, como consta por las calificaciones que obran en los libros respectivos de exámenes. Como constancia extendemos el presente en México á 21 de Octubre de 1878.—*Manuel Cordero.—José C. Segura.—Vicente U. Alcaráz.*

Señores redactores de *La Libertad:*

Suplicamos encarecidamente á vdes. se sirvan insertar en su ilustrado diario el certificado adjunto:

Como directores de establecimientos de instruccion primaria y preparatoria en esta capital, certificamos: que en nuestros respectivos colegios y durante varios años se han adoptado como obras de texto para la enseñanza de matemáticas los tratados de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría escritos por el Ingeniero Manuel María Contreras, y que con ellos se han obtenido buenos resultados en la instruccion y aprovechamiento de los discípulos.

México, Octubre 18 de 1878.—*Adrian Fournier,* director del Licéo Franco-Mexicano.—*Ricardo Rode,* socio director del Rode's English Boarding School.—*Emilio Katthain.—A. Bracho.—Emilio G. Baz,* director del instituto Anglo-Franco-Mexicano.—*M. Soriano.—José Saturnino Yarza,* director del colegio Hispano-Mexicano.

(La Libertad, Octubre 22 y 31 de 1878).

GEOMETRIA.

INTRODUCCION.

Al emprender el estudio de la geometría, parece conveniente dar una idea del espíritu de esta importante parte de las matemáticas, así como lo hicimos al tratar del álgebra.

El objeto de nuestros trabajos en aritmética ha sido encontrar un valor numérico que satisfaga determinadas condiciones, y en álgebra los trabajos analíticos casi siempre han tenido por mira descubrir un modo de formacion de una cantidad desconocida en funcion de las conocidas. Como el fin de la geometría es la medida de la extension, tenemos que comenzar por conocer algunas de las propiedades fundamentales de lo que llamamos extension, para poder en seguida por un método rigurosamente deductivo, ir averiguando relaciones nuevas que sirvan para satisfacer las necesidades prácticas y científicas.

En geometría, así como en las demás ciencias, hay ciertos principios fundamentales que no pueden ser adquiridos sino por la observacion ó la experiencia. Así es como sabemos lo que es la longitud, la direccion, la línea recta, etc., y no por una explicacion verbal; siendo difícil definir éstas y otras voces semejantes por la simplicidad misma de los hechos observados, que no pueden descomponerse en otros más sencillos. Otro tanto pasa con los fundamentos de lo que llamamos axiomas. Cuando se reflexiona sobre la manera con que se han adquirido, se encuentra que ha sido por la continua observacion y por experiencias repetidas multitud de veces.

La geometría toma por base de sus deducciones las definiciones y los axiomas. Las definiciones, como veremos más adelante, no son otra cosa sino *la expresion del conjunto de atributos que hay necesidad de presuponer en una figura dada, para que las demostraciones que á ella se refieren sean rigorosamente exactas* (Barreda). Los axiomas son verdades fundamentales de las que tenemos multitud de pruebas.

Siendo como es la geometría una ciencia eminentemente deductiva, debería procurarse que el número de los principios fundamentales tomados de la observacion fuese el menor posible; pero para facilitar el estudio se exponen á veces como axiomas fundamentales los que inmediatamente se derivan de éstos. Por ejemplo, el principio de que si á cantidades iguales se quitan iguales los resultados tambien lo serán, puede inferirse del axioma fundamental de que las sumas de cantidades iguales son iguales; pero para facilitar los raciocinios se considera tambien el primero como axioma fundamental.

Habiendo explicado, aunque ligeramente, cuál es la fuente de los fundamentos de las deducciones geométricas, volveremos sobre el objeto de esta ciencia que, en último análisis, es la medida indirecta de la extension.

Toda medida es la valuacion de la relacion que existe entre magnitudes homogéneas. En geometría esta valuacion puede hacerse de una manera directa en las líneas rectas y en algunas superficies planas sobreponiendo la unidad una ó más veces sobre la extension que se quiere medir; pero como en la mayor parte de los casos no es posible ó no es fácil hacer esta superposicion, y como la medida de las curvas, la rectificacion de los perímetros y la determinacion de las superficies y de los volúmenes tiene que verificarse por métodos científicos indirectos, hay necesidad de ocuparse de éstos, procurando sustituir á la comparacion entre figuras cualesquiera, la comparacion de líneas rectas, como única operacion que por regla general puede efectuarse directamente. En cada forma que se considera se buscan las líneas rectas que la fijan ó determinan, y en seguida se procura deducir de la posicion y magnitud de estas rectas la medida de dicha forma. Por ejemplo, una esfera quedará completamente determinada conociendo su centro y su rádio, y el estudio de las propiedades de la esfera lleva por principal mira, llegar á expresar la superficie de la esfera, su volúmen, etc., en funcion del rádio ó de otras rectas constantes. De la necesidad de reducir la medida de cualquiera forma á la medida de líneas rectas, y reemplazar la comparacion de superficies y de volúmenes por relaciones entre líneas rectas, nace la necesidad de dar un gran desarrollo á las investigaciones geométricas.

La extension es una propiedad inherente á cualquier cuerpo, pero en geometría no la consideramos en los cuerpos mismos, sino en el espacio que éstos ocupan. Esta sencilla concepcion facilita sobremanera nuestras investigaciones, no teniendo que preocuparnos con los fenómenos complexos de los cuerpos en los que podriamos estudiar la extension. Estas abstracciones son, por lo demás, sumamente frecuentes. Cuando comparamos, por ejemplo, el color de dos cosas, prescindimos de la sustancia de que están formadas y de sus demás propiedades para no complicar el estudio relativo á la cualidad de que tratamos; pues bien, en geometría, para hacer completa abstraccion de las demás propiedades de los cuerpos y facilitar nuestras investigaciones sobre la extension, suponemos ésta en el espacio ocupado por los cuerpos, como si desapareciendo éstos hubiesen dejado en él una impresion ó molde de su forma.

Otra abstraccion semejante es aquella por medio de la cual concebimos las superficies, las líneas y los puntos, prescindiendo de una, de dos y aun de las tres dimensiones de los cuerpos. Todos los que conocemos tienen largo, ancho y grueso. La extension en estas tres dimensiones se llama volúmen; pero si hacemos abstraccion del grueso y solo consideramos el ancho y el largo, obtendremos la extension en superficie; si en seguida hacemos abstraccion del ancho, nos quedará la línea ó extension puramente en longitud; y si por último, prescindimos de lo largo y solo consideramos la situacion, tendremos nocion de lo que llamamos punto. Por otra parte, las superficies son los límites de los cuerpos, las líneas lo son de las superficies y los puntos son los extremos de las líneas. Así es que siendo un cuerpo sólido ó volúmen un hecho concreto, las nociones de superficies, líneas y puntos no son sino abstracciones sumamente últiles para simplificar nuestras investigaciones; pues por una parte hay cuestiones prácticas que, no refiriéndose á las tres dimensiones, seria inútil y embarazoso ocuparse de todas ellas; por otra parte, se concibe que el conocimiento de las propiedades de las líneas, es un preliminar indispensable para tratar las cuestiones de superficies, así como el estudio de éstas sirve de base á los problemas de volúmenes.

Considerar la extension en el espacio é independientemente de los cuerpos, presenta además la ventaja de no limitar nuestros estudios á las formas reales, lo cual contribuye á dar más generalidad y desarrollo á nuestros ejercicios intelectuales, y á hacer más ámplios los conocimientos que deben servir de base para satisfacer las necesidades prácticas.

Las cuestiones geométricas pueden tratarse de dos maneras esencialmente diferentes, y de esto resulta su division en geometría especial y geometría general. Considerada esta ciencia en su conjunto, debe ocuparse del estudio de todas las formas imaginables, y debe tambien conocer las propiedades de cada forma. Si agrupamos las cuestiones geométricas con relacion á cada especie de figuras, estudiando sucesivamente las propiedades de cada forma, tendremos la geometría especial; y si por el contrario coordinamos las cuestiones con respecto á la semejanza de investigaciones, prescindiendo de las formas en particular, tendremos la geometría general. Por ejemplo, en la geometría especial estudiaremos las propiedades del triángulo, del círculo, etc., para poder deducir uno de los elementos de cada figura de los demás que la constituyen, y valuar su superficie, etc.; miéntras que en la geometría general se considerarán las cuestiones relativas á las superficies, á los volúmenes y otras muchas, en abstracto, para introducir despues en cada caso especial las condiciones específicas de determinada forma. El uso del cálculo es mucho más frecuente en la geometría general, pero no depende del empleo de este medio de deduccion, sino del género de la cuestion que se considere, la distincion entre una y otra parte de la geometría.

El cálculo, no siendo ni debiendo ser mas que un poderoso medio de deduccion, no puede servir para establecer los fundamentos de una ciencia, y se necesita que la geometría especial suministre los datos necesarios para fijar algunas ecuaciones, que sirvan de punto de partida á las deducciones analíticas, y cuyos datos, como hemos dicho, se expresan en las definiciones en su más alto grado de perfeccion ideal.

El objeto de este tratado es la geometría especial, considerándola como base é introduccion indispensable para el estudio de la general, cuyo principal artificio consiste en trasformar las consideraciones geométricas en consideraciones analíticas; valiéndose para esto de la notable concepcion de Descartes, que consiste á su vez en cambiar los problemas de forma en problemas de distancias, sujetos por su naturaleza al dominio del cálculo.

La geometría especial se divide en tres secciones principales: estudio de la línea recta y figuras planas; estudio de las superficies y estudio de los volúmenes.

Considerada como una operacion directa, la medida de las líneas rectas parece á primera vista muy sencilla, y por tanto cosa inútil ocuparse de su estudio; pero como no siempre es posible sobreponer la unidad lineal sobre la recta cuya longitud se trata de determinar, como sucede

cuando ésta es inaccesible, ó cuando, teniendo una magnitud considerable, en vez de estar en una posicion horizontal se encuentra vertical, es preciso conocer los procedimientos necesarios pora poder deducir la magnitud de una línea de las demás que constituyen una figura, pudiendo así llegarse á determinar indirectamente la dimension de una línea recta en cualquiera posicion en que se encuentre. Esto es tanto más esencial, cuanto que, como ya lo dijimos, la mayor parte de los trabajos geométricos llevan por mira reducir las cuestiones de superficies y de volúmenes á comparaciones entre líneas rectas, por lo cual hay que dar una gran extension á esta parte de la geometría, que debe servir de base á las siguientes. En las líneas curvas, el problema que generalmente se trata de resolver, es: averiguar las relaciones que ligan las curvas con las rectas, para poder efectuar por medio de éstas su medida, y sustituir á la relacion de las curvas otra equivalente entre líneas rectas.

Los problemas en geometría elemental admiten casi siempre una resolucion gráfica y otra numérica ó algebráica, y aunque la última es más perfecta, casi siempre tiene que apoyarse en la gráfica, que se ejecuta en una figura comunmente más pequeña, pero semejante á la real. Además, se procura sustituir á las construcciones en relieve las representaciones sobre un plano, lo cual constituye el método de las proyecciones.

La extension de la geometría es indefinida, tanto por la diversidad de cuestiones de que puede ocuparse, como por la infinidad de formas que pueden imaginarse sujetas á definiciones exactas. En efecto, las figuras planas pueden ser tantas como las combinaciones de las líneas que las limitan; las líneas curvas serán tan diversas como las leyes que se conciban para el movimiento de un punto; las superficies pueden variar por la forma de la línea que las engendra, y por la naturaleza del movimiento de ésta; los volúmenes varian por la diversidad de las superficies que los limitan ó que pueden engendrarlos. Por lo demas, es conveniente ocuparse de toda clase de formas, á fin de que las figuras reales que encontremos en la naturaleza, sean casos particulares de las que de antemano tengamos conocidas y estudiadas.

Habiendo señalado como objeto definitivo de la geometría la medida de la extension por medios indirectos, observaremos al hacer su estudio que pocas son en realidad las cuestiones que se refieren á determinar la longitud de las líneas, la superficie de las figuras y el volúmen de los cuerpos; pero al mismo tiempo notaremos que las investigaciones que no llevan por mira la medida de la extension, y que son las más, se ocupan del estudio de las propiedades de las formas, como preliminares y elementos necesarios para poder efectuar la medida de la extension. Además, es muy conveniente dar la mayor amplitud posible á nuestros conocimientos y á la diversidad de maneras de considerar las relaciones de forma, tanto para encontrarnos en aptitud de poder resolver cualquier problema, como para efectuarlo aplicando el procedimiento más sencillo y adecuado al caso que se considere.

De lo expuesto resulta, que siendo el objeto definitivo de la geometría la medida de la extension, para poder efectuarlo convenientemente tiene que fundarse sobre la observacion de un corto número de fenómenos primitivos y extender sus investigaciones á las propiedades de toda clase de formas, para poder determinar unos por otros los elementos de cualquier figura, trasformando las cuestiones de líneas curvas, de superficies y de volúmenes, en relaciones entre líneas rectas; sirviendo, por último, la geometría especial ó elemental, de fundamento y preliminar necesario á la geometría analítica ó general.

PRIMERA PARTE.

LONGITUDES.

DEFINICIONES Y NOCIONES PRELIMINARES.

358.—Definicion.—*Se llama geometría la ciencia que tiene por objeto la medida de la extension por medios indirectos, considerando las relaciones de forma, posicion y magnitud.*

Aunque el objeto definitivo de esta ciencia sea *la medida de la extension*, como para llegar á este resultado es preciso valerse de métodos indirectos, y como casi siempre es necesario reducir las cuestiones relativas á la medida de los volúmenes, de las superficies y de las líneas, á la comparacion de las líneas rectas, lo cual exige un conocimiento extenso y profundo de las diversas propiedades de las figuras para deducir de los elementos conocidos los desconocidos; resulta que, como base indispensable para poder efectuar la medida de la extension, la geometría

elemental tiene que ocuparse especialmente *del estudio de las propiedades de las figuras*, considerando las relaciones que existen entre las partes de que están formadas ó entre otras figuras más sencillas ó más adecuadas á nuestras investigaciones.

359.—Todo cuerpo ocupa en el espacio un lugar, y con el objeto de no considerar en el estudio de la geometría sino la extension, prescindiendo de las demas propiedades de los cuerpos, consideraremos el lugar y la forma del espacio que ocupan, haciendo abstraccion de la materia que los constituye.

Todo cuerpo tiene tres dimensiones: *longitud, latitud* y *altura*, que comunmente se les llama *largo, ancho y grueso;* pero como á menudo nuestras investigaciones no se dirigen sino á una sola ó á dos de estas dimensiones, con el fin de no complicar nuestro estudio con elementos innecesarios, prescindimos de aquellas dimensiones que no son objeto de la cuestion de que tenemos que ocuparnos. Cuando consideramos el espacio con tres dimensiones, se le llama *volúmen;* si hacemos abstraccion del espesor ó grueso, la extension que consideramos lleva el nombre de *superficie;* y si prescindimos del grueso y de la anchura, resultará una extension en longitud solamente, que se llama *línea*, y aunque aisladamente no hay superficies ni líneas materiales, estas concepciones son de grande utilidad para estudiar sucesivamente las propiedades de las diversas figuras y poder medir la extension. Por lo demas, en la práctica es de un uso frecuente este género de consideraciones. Cuando se trata de la altura de una montaña ó de un edificio, se prescinde de sus otras dimensiones, así como de sus demas cualidades.

Los límites que determinan la extension de un cuerpo, son las *superficies*, las cuales vienen á quedar limitadas por *líneas*, y los extremos de éstas son *puntos*. Los diversos límites de los cuerpos nos sirven para reconocer su figura y determinar su extension.

A fin de proceder de lo simple á lo compuesto, en nuestro estudio dividiremos la geometría en tres partes, la primera tratará de las *líneas*, la segunda de las *superficies* y la tercera de los *volúmenes.*

360.—Puntos.—Acabamos de ver que prescindiendo de una de las dimensiones de un volúmen resulta una superficie, y que prescindiendo de otra de las dimensiones de la superficie, se obtiene una línea; del mismo modo, si en una línea hacemos abstraccion de la longitud, se concebirá lo que se llama *punto*, destinado únicamente á determinar el lugar ó la posicion.

Se distinguen cuatro clases de puntos: *puntos extremos*, que son los límites A y B de una línea (fig. 1); *punto de interseccion*, que es el luse ocupan del estudio de las propiedades de las formas, como preliminares y elementos necesarios para poder efectuar la medida de la extension. Además, es muy conveniente dar la mayor amplitud posible á nuestros conocimientos y á la diversidad de maneras de considerar las relaciones de forma, tanto para encontrarnos en aptitud de poder resolver cualquier problema, como para efectuarlo aplicando el procedimiento más sencillo y adecuado al caso que se considere.

De lo expuesto resulta, que siendo el objeto definitivo de la geometría la medida de la extension, para poder efectuarlo convenientemente tiene que fundarse sobre la observacion de un corto número de fenómenos primitivos y extender sus investigaciones á las propiedades de toda clase de formas, para poder determinar unos por otros los elementos de cualquier figura, trasformando las cuestiones de líneas curvas, de superficies y de volúmenes, en relaciones entre líneas rectas; sirviendo, por último, la geometría especial ó elemental, de fundamento y preliminar necesario á la geometría analítica ó general.

PRIMERA PARTE.

LONGITUDES.

DEFINICIONES Y NOCIONES PRELIMINARES.

358.—Definicion.—*Se llama geometría la ciencia que tiene por objeto la medida de la extension por medios indirectos, considerando las relaciones de forma, posicion y magnitud.*

Aunque el objeto definitivo de esta ciencia sea *la medida de la extension*, como para llegar á este resultado es preciso valerse de métodos indirectos, y como casi siempre es necesario reducir las cuestiones relativas á la medida de los volúmenes, de las superficies y de las líneas, á la comparacion de las líneas rectas, lo cual exige un conocimiento extenso y profundo de las diversas propiedades de las figuras para deducir de los elementos conocidos los desconocidos; resulta que, como base indispensable para poder efectuar la medida de la extension, la geometría

elemental tiene que ocuparse especialmente *del estudio de las propiedades de las figuras*, considerando las relaciones que existen entre las partes de que están formadas ó entre otras figuras más sencillas ó más adecuadas á nuestras investigaciones.

359.—Todo cuerpo ocupa en el espacio un lugar, y con el objeto de no considerar en el estudio de la geometría sino la extension, prescindiendo de las demas propiedades de los cuerpos, consideraremos el lugar y la forma del espacio que ocupan, haciendo abstraccion de la materia que los constituye.

Todo cuerpo tiene tres dimensiones: *longitud, latitud* y *altura*, que comunmente se les llama *largo, ancho y grueso;* pero como á menudo nuestras investigaciones no se dirigen sino á una sola ó á dos de estas dimensiones, con el fin de no complicar nuestro estudio con elementos innecesarios, prescindimos de aquellas dimensiones que no son objeto de la cuestion de que tenemos que ocuparnos. Cuando consideramos el espacio con tres dimensiones, se le llama *volúmen;* si hacemos abstraccion del espesor ó grueso, la extension que consideramos lleva el nombre de *superficie;* y si prescindimos del grueso y de la anchura, resultará una extension en longitud solamente, que se llama *línea*, y aunque aisladamente no hay superficies ni líneas materiales, estas concepciones son de grande utilidad para estudiar sucesivamente las propiedades de las diversas figuras y poder medir la extension. Por lo demas, en la práctica es de un uso frecuente este género de consideraciones. Cuando se trata de la altura de una montaña ó de un edificio, se prescinde de sus otras dimensiones, así como de sus demas cualidades.

Los límites que determinan la extension de un cuerpo, son las *superficies*, las cuales vienen á quedar limitadas por *líneas*, y los extremos de éstas son *puntos*. Los diversos límites de los cuerpos nos sirven para reconocer su figura y determinar su extension.

A fin de proceder de lo simple á lo compuesto, en nuestro estudio dividiremos la geometría en tres partes, la primera tratará de las *líneas*, la segunda de las *superficies* y la tercera de los *volúmenes*.

360.—Puntos.—Acabamos de ver que prescindiendo de una de las dimensiones de un volúmen resulta una superficie, y que prescindiendo de otra de las dimensiones de la superficie, se obtiene una línea; del mismo modo, si en una línea hacemos abstraccion de la longitud, se concebirá lo que se llama *punto*, destinado únicamente á determinar el lugar ó la posicion.

Se distinguen cuatro clases de puntos: *puntos extremos*, que son los límites A y B de una línea (fig. 1); *punto de interseccion*, que es el lugar en que se encuentran dos ó más líneas, como C (fig. 2); *puntos de concurso,* que son aquellos donde se reunen dos ó más rectas, como el D en la fig. 3; y *puntos de contacto,* que son aquellos donde dos ó más lineas se tocan, como el E en la fig. 4.

Figura 1.

Figura 2.

Figura 3.

Figura 4.

Careciendo los puntos de magnitud, todos son iguales, y por lo mismo, se concibe que si se sobrepusieran, coincidirian.

361.—Líneas.—*Se llama línea toda extension en longitud sin ninguna latitud ni profundidad.* Puede concebirse una línea como engendrada por la interseccion de dos superficies, ó como el trazo ó huella que dejaria un punto en su movimiento.

Las líneas pueden ser *rectas, quebradas, curvas* y *mixtas.*

362.—*Línea recta es aquella cuyos puntos todos están en la misma direccion.* De esto resulta que es el camino más corto entre dos puntos.

La interseccion C de dos rectas (fig. 2) es un punto.

Figura 5.

Por un punto A (fig. 5) pueden pasar una infinidad de líneas rectas; pero desde el momento en que se da otro punto B, determinando estos dos puntos una direccion, queda fijada la posicion de la recta A B.

Así pues, *dos puntos fijan la posicion de una recta, y si son éstos los extremos determinarán su magnitud.—Para que dos rectas coincidan es necesario y basta que coincidan dos puntos de una con dos puntos de la otra; y para que dos rectas tengan la misma longitud, es preciso que puedan coincidir los extremos de una con los de la otra.*

363.—La distancia entre dos puntos se estima por la magnitud de la línea recta que los une. Para medir la longitud de una recta es preciso determinar la relacion que existe con la longitud de otra recta tomada por unidad. Así cuando se dice, por ejemplo, que la altura de una torre es de 50 metros, esto significa que cincuenta veces está contenida la longitud de la unidad lineal llamada metro, en la altura de esa torre.

Dos rectas están en la razon, por ejemplo, de 3 á 5 cuando una tercera recta, tomada como unidad, está contenida tres veces en la primera y 5 en la última. La determinacion de la relacion de dos rectas exige,

pues, que se busque otra recta que esté contenida un número cabal de veces en una y en otra, para que sea la comun medida de ambas.

Si estando dadas dos rectas A B y C D (fig. 6) se quiere determinar su mayor medida comun, ó por lo ménos la razon aproximada de una á otra, tendremos que proceder como sigue:

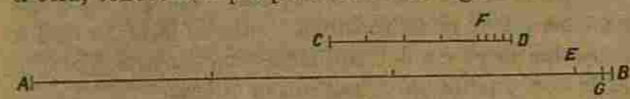

Figura 6.

Se llevará la más pequeña C D sobre la mayor, cuantas veces se pueda: se encontrará tres veces desde A hasta E y quedará una resta ó parte menor que C D de E á B; por lo que se tendrá:

$$A\,B=3\,C\,D+E\,B$$

En seguida se llevará la resta E B sobre C D, y se encontrará que está contenida 4 veces con una segunda resta F D, lo que dá:

$$C\,D=4\,E\,B+F\,D$$

Se llevará esta segunda resta sobre E B y como solo está contenida una vez de E á G, con una tercera resta G B, se tiene:

$$E\,B=F\,D+G\,B$$

Por último, llevando G B sobre F D, se encuentra que

$$F\,D=4\,G\,B$$

Sustituyendo sucesivamente el valor de F D en el de E B, éste en el de C D, y por último el de C D en el de A B, se tendrá:

$$F\,D=4\,G\,B,\ E\,B=5\,G\,B,\ C\,D=24\,G\,B,\ \text{y}\ AB=77\,G\,B.$$

Resulta, pues, que la última resta G B está contenida 24 veces en C D y 77 en A B, por lo que estas dos rectas están en la razon de 24 á 77.

El procedimiento empleado es análogo á la operacion que sirve para encontrar el máximo comun divisor de dos números, y se termina como aquel cuando la resta encontrada es nula. Un raciocinio semejante al que hicimos en aritmética, (110) probaria que así se encuentra no solo una medida comun para ambas líneas, sino la *mayor* de las medidas comunes, que pueden tener.

Se dice que dos rectas son *conmensurables* entre sí, cuando tienen una medida comun, y que son *inconmensurables* en el caso contrario.

Cuando dos rectas son inconmensurables, el procedimiento que acabamos de indicar no puede conducir á una resta nula; pero como las restas sucesivas van decreciendo, llegan á tal grado de pequeñez, que pueden considerarse como nulas. Que ciertas líneas son inconmensurables, es un hecho que la teoría nos da á conocer, pero que ninguna operacion mecánica nos puede hacer sensible, y aunque la razon de dos líneas inconmensurables no pueda determinarse exactamente, siempre es posible expresarla con cuanta aproximacion se quiera.

En efecto, sean A y B dos líneas, ó más generalmente dos magnitudes de la misma especie. Imaginémonos que B esté dividida en 1000 partes por ejemplo, y que llevando una de éstas sobre A se encuentre que la contiene 3257 veces y que quede una resta. La magnitud A estará comprendida entre $\frac{B}{1000}\times3257$ y $\frac{B}{1000}\times3258$, ó lo que es lo mismo, entre $B\times3'257$ y $B\times3'258$. Estos números 3'257 y 3'258 serán los valores de la razon $\frac{A}{B}$ con una aproximacion de ménos de $\frac{B}{1000}$, el primero por defecto y el segundo por exceso. Si en lugar de dividir B en 1000 partes iguales se hubiera dividido en 10000, la aproximacion habria sido 10 veces mayor, y si se hubiera dividido B en 100000 partes, la aproxmacion habria sido 100 veces mayor que la obtenida, y así se concibe que prescindiendo de la dificultad material que la division en mayor número de partes presenta en la práctica, siempre se podrán representar las magnitudes de la misma especie por números, ya sea exactamente, ya con la aproximacion que se desée ó que exija la naturaleza de la cuestion.

364.—Para trazar una línea recta sobre un plano nos valemos de la regla y del lápiz ó grafio. La regla es una barra de madera ó de metal construida con la condicion de que todos los puntos de uno de sus bordes estén en la misma direccion, como lo representa la fig. 7. El grafio ó tira-líneas sirve para trazar las rectas con tinta apoyando dos puntos de la regla A y B sobre los dos puntos dados A' B' y haciéndolo resbalar contra el borde de la regla al mismo tiempo que se apoya sobre el papel.

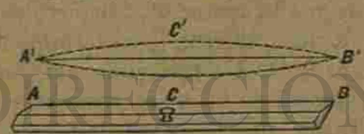

Figura 7.

Para asegurarse de la buena construccion de la regla, á lo cual se llama *rectificarla*, se marca una recta, como se ha explicado, haciendo coincidir el punto A con A' y el punto B con B'. En seguida se invierte la regla teniendo cuidado de hacer coincidir el punto A con B', y el punto B con A', y se traza una nueva línea. Si la regla está bien

construida las dos marcas se confundirán, supuesto que por dos puntos solo puede pasar una recta. Si la regla está mala resultarán dos trazas como son A' C' B' y A' C B'.

Como la falta de exactitud en las construcciones geométricas resulta á veces de que las líneas que se marcan, tienen una anchura más ó ménos considerable y los puntos son pequeñas superficies, debe procurarse que las líneas sean lo más finas posibles, y que los puntos estén determinados por líneas que se corten bajo ángulos casi rectos.

Cuando se quiere fijar no solo la direccion, sino tambien la magnitud de una recta, debe trazarse sobre la regla únicamente hasta los puntos extremos, y para medir su longitud, nos servimos de la escala y del compás.

La escala es una regla de madera, de marfil ó de metal (fig. 8) en la que se han marcado divisiones iguales referidas á una unidad de longitud como el metro, la vara, la yarda, etc.


Figura 8.

Figura 9.

El compás es un instrumento regularmente de metal (fig. 9) compuesto de dos piernas de igual longitud A B y A C, que pueden girar al rededor de un eje A. Cuando sirve para medir la longitud de las líneas sus puntas son fijas, y cuando se usa para trazar círculos, una de sus puntas debe reemplazarse por un lápiz ó un grafio. Si la recta que se trata de medir tiene ménos longitud que la escala y ésta tiene hecho su borde en bisel, basta poner la escala junto á la recta haciendo coincidir su cero con uno de los extremos, y leer la division en que toca el otro extremo de la recta. En caso contrario se toma con el compás un cierto número de unidades de la escala, (20 por ejemplo), y se llevan sobre la línea el número de veces que es posible, (supongamos que hayan sido 3), hasta que quede una parte menor. En seguida se mide esta resta con el compás, cuya abertura llevada sobre la escala indicará cuánto se debe agregar á las primeras medidas. Si la resta tenia 5 divisiones, toda la línea tendria 65 milímetros por ejemplo. En todos los casos el grado de aproximacion depende de la igualdad y finura de las divisiones de la escala así como del menor grueso que se pueda dar á las líneas y á las puntas del compás.

365.—Cuando se quieren sumar dos rectas B C y D E (fig. 10) se lleva una D E sobre la prolongacion C A de la otra B C y la recta B A será igual á B C + D E. Si las líneas B C y D E fueran iguales, la recta B A seria doble de una de ellas y así se concibe el modo de duplicar, triplicar y en general de multiplicar una recta por un número.

Figura 10.

Para restar DE de BC bastaria llevar DE de C á D', y se tendria BD'=BC—DE.

366.—*Se llama línea quebrada* (fig. 11) *la que está compuesta de líneas rectas que no quedan en la misma direccion.*

Para fijar la posicion de una línea quebrada, es preciso conocer los puntos extremos A, B, C, D, E, F, de las partes que la forman; y para que dos líneas quebradas sean iguales, es necesario que en el caso de que se sobrepusieran coincidiesen los expresados puntos A, B, C, D, E y F. Entre dos puntos, A y F, se pueden tirar una infinidad de líneas quebradas.

Figura 11.

367.—*Se llama línea curva* (fig. 12), *la que tiene todos sus puntos en diferente direccion.* Puede concebirse como descrita por un punto que se mueve cambiando por grados insensibles á cada instante de direccion.

Para fijar la forma de una curva, es necesario conocer la posicion de todos sus puntos, ó la ley del movimiento del punto que la engendró. Para que dos curvas sean iguales, es preciso que sobreponiéndose puedan coincidir en todos sus puntos. Entre dos puntos, A y B, puede tirarse una infinidad de curvas.

Figura 12.

368.—*Se llama línea mixta* (fig. 13) *la que está compuesta de partes rectas y de partes curvas.*

Para determinar una línea mixta es preciso poder fijar las partes de que se compone, siendo necesario que estas partes sean iguales para que dos líneas mixtas lo sean.

Figura 13.

369.—*Se llama circunferencia de círculo una curva* (fig. 14) *plana,*

cerrada, cuyos puntos todos están á igual distancia de otro C *interior, llamado centro.*

Círculo es la porcion de superficie comprendida dentro de la circunferencia.

Suele aplicarse, aunque indebidamente, la palabra círculo á la circunferencia; pero como lo indican las definiciones respectivas, *la circunferencia es una línea*, miéntras que *el círculo es una superficie.*

Se llama *radio toda recta*, C A, *que va del centro á la circunferencia*, y como esta curva tiene todos sus puntos equidistantes del centro, resulta que *todos los radios son iguales.*

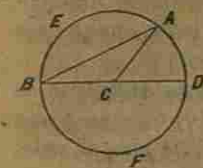

Figura 14.

La posicion de un círculo queda fijada cuando se conoce su centro y el radio, por lo que *dos círculos serán iguales cuando lo sean sus radios.*

Se llama *diámetro toda recta*, B D, *que pasando por el centro, termina en la circunferencia.* Como todo diámetro se compone de dos radios y éstos son iguales, se infiere que *todos los diámetros de un mismo círculo son iguales.*

Se llama *arco una parte*, A D, *de la circunferencia.*

Cuerda es una recta, B A, *que va de un punto á otro de la circunferencia.* Se dice que la cuerda B A subtende al arco B E A, y aunque toda cuerda subtende dos arcos B E A y B F A, comunmente se aplica esta expresion al arco menor. Recíprocamente se dice que la línea B A se subtensa del arco B E A.

Se llama *segmento la porcion de superficie* B A E B *comprendida entre una cuerda y el arco que subtende.*

Sector es la porcion de superficie A C D A *comprendida entre dos radios y un arco.*

Secante es una recta A B (fig. 15) *que corta la circunferencia en dos puntos, y tiene parte dentro y parte fuera del círculo.*

Tangente es una recta F G *que toca á la circunferencia en un solo punto* H.

Se llama sagita ó flecha la parte L M *de un radio comprendida entre la mitad de la cuerda y la mitad del arco que subtende.*

Cuadrante es el arco J M I *equivalente á la cuarta parte de la circunferencia.*

Figura 15.

370.—Las *superficies* pueden ser planas, curvas y mixtas.

Se llama *plano, ó superficie plana, aquella á la que se puede aplicar* *una línea recta en cualquiera direccion, tocándola en todos sus puntos.* La superficie tranquila del agua, cuando no tiene una gran extension, es plana.

La interseccion comun de dos planos es una línea recta; pues si tomamos dos puntos en la interseccion y por ellos hacemos pasar una recta, por la definicion de plano esta recta deberá tener todos sus puntos en ambos planos.

Figura 16.

Por una recta pueden pasar una infinidad de planos. Basta imaginarse (fig. 16) que un plano A B C D que pasa por la recta P Q gira al rededor de ella, para comprender que puede tomar una multitud de posiciones como A' B' C' D' conteniendo todos los planos á la recta P Q.

Por tres puntos no se puede hacer pasar más de un solo plano. Si á la condicion de pasar el plano por los dos puntos de la recta P Q se une la de que pase por un tercer punto A, se comprende fácilmente que si se hace pasar un plano por P Q y nos imaginamos que gire al rededor de esta recta, entre la multitud de planos que nos es dado concebir, solo uno tendrá la propiedad de pasar al mismo tiempo por el punto A.

De esto resulta que *la posicion de un plano queda enteramente fijada por tres puntos que no están en línea recta ó por dos rectas que se cortan en un punto.*

Para fijar la extension de un plano (fig. 16) *es preciso conocer la situacion de los puntos extremos* A B C D *que lo limitan.*

Dos planos coincidirán siempre que coincidan tres puntos de uno de ellos, con tres puntos del otro.

Para que dos planos sean iguales en extension, es necesario que puedan coincidir todos los puntos extremos que los limitan.

Figuras planas son aquellas que pueden estar contenidas en un plano. El círculo y el triángulo son, por ejemplo, figuras planas, y de ellas nos ocuparemos especialmente en las dos primeras secciones de la geometría.

371.—En los *volúmenes* distinguiremos aquellos en los que todas las superficies que los limitan son planas, y aquellos que están terminados por superficies curvas.

Axiomas, métodos de demostracion y definiciones.

372.—AXIOMAS.—Al tratar de los fundamentos del cálculo, hemos establecido (32 y 242) los siguientes axiomas:

Dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí.

Si á cantidades iguales se agregan ó quitan iguales, los resultados serán iguales.

Si con cantidades iguales se ejecutan las mismas operaciones, los resultados serán iguales.

Una cantidad es igual á la reunion de sus partes.

Los cuales como se refieren á las cantidades, son aplicables en geometría á la extension; pero por la naturaleza ú objeto de esta ciencia tenemos que agregar el siguiente que es de un uso frecuente:

Las líneas, superficies ó volúmenes que aplicados unos encima de otros coinciden en todos sus puntos, son iguales.

De este corto número de axiomas y de las *definiciones,* que además de explicar una palabra constituyen *la asercion de un hecho ó de una propiedad fundamental geométrica,* por un riguroso raciocinio se van sucesivamente infiriendo nuevas verdades de las que á su vez nos servimos para deducir y establecer principios desconocidos.

Así, por ejemplo, la definicion de *círculo* además de explicar esta palabra señala, ó si se quiere, enseña la propiedad de esta curva de tener sus puntos equidistantes del centro, de la cual deducimos que los radios son iguales, lo mismo que los diámetros, y otro gran número de teoremas, como que el diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales, que es la mayor de todas las cuerdas, etc., etc.

373.—MÉTODOS DE DEMOSTRACION.—En geometría se emplea lo mismo que en aritmética y en álgebra, la *demostracion positiva* [27] y la *negativa;* pero como la igualdad ó desigualdad de dos figuras puede hacerse muy perceptible á nuestros sentidos colocando una sobre otra; á menudo usamos este método llamado de *sobreposicion* para demostrar por medio de un raciocinio directo ó indirecto la igualdad ó desigualdad de dos figuras.

Repetiremos que la *demostracion positiva es aquella en la que el teorema por demostrar resulta como consecuencia inmediata de otros principios ciertos.* Unas veces de una propiedad general se deduce otra particular ó ménos general, y otras de lo explícito de una proposicion se deduce lo que en ella hay implícito.

Demostracion negativa es la que nos hace ver, que de no sér cierto el principio que trata de demostrarse, resultaria cierto otro principio incompatible con los que hemos demostrado.

En la demostracion por sobreposicion, sabiendo que una parte de una figura puede coincidir con parte de otra figura, y fundándose en teoremas demostrados, se deduce que el resto de las dos figuras debe coincidir.

Para dar á comprender mejor estas definiciones, pondremos un ejemplo de estas diferentes clases de demostracion.

Demostracion directa sin sobreposicion.

TEOREMA.—*El diámetro es la mayor de todas las cuerdas.*

Vamos á demostrar que el diámetro A B [fig. 17] es mayor que la cuerda A D. Si tiramos el radio C D, tendremos que por ser A D línea recta, y A C D quebrada; y por ser la línea recta el camino más corto entre dos puntos, se tiene:

A C D>A D

Figura 17.

pero como A C D consta de dos radios, y el diámetro A B es igual tambien á dos radios, se tiene que A C D=A B, luego

A B>A D.

Y como el raciocinio hecho con *A D* puede aplicarse á otra cuerda cualquiera, se infiere la verdad del teorema en toda su generalidad.

Ejemplo de demostracion directa con sobreposicion.

TEOREMA.—*El diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales.*

Figura 18.

Si suponemos que la figura 18 se doblara por el diámetro A B quedando fija la parte A E D B y girando al rededor de A B la parte A D' B, es claro que la recta A B es comun á las dos parte en la figura, y en virtud de que todos los radios son iguales, el extremo D' deberá coincidir con algun otro punto como D equidistante de C; el punto E' por la misma razon deberá coincidir con algun otro punto como E, y así sucesivamente debiendo coincidir todos los puntos de la circunferencia que quedan á la derecha del diámetro con los que están á su izquierda, se infiere que estas dos partes determinadas por el diámetro son iguales.

Como se vé en este ejemplo hay una cosa conocida: que la recta A B es comun á las dos partes, cuya igualdad se va á demostrar, y de esto que sabemos y de un principio cierto, que los radios son iguales, se deduce el teorema. Así, pues, es preciso en todos los casos dar el fundamento ó la razon en virtud de la que coincidiendo una parte de dos figuras deberán coincidir todas las demás.

Ejemplo de demostracion negativa con sobreposicion.

TEOREMA.—*El diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales.*

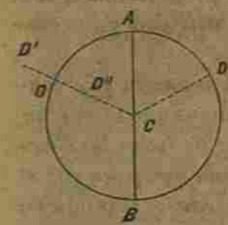

Figura 19.

Si suponemos que las dos partes determinadas por el diámetro son desiguales, al doblar la figura [fig. 19] por A B, el punto D caeria en D' fuera de la circunferencia si la parte de la derecha era la mayor. En este caso tendriamos

C D=C D'

pero C D'>C O

luego C D>C O

esto es, seria preciso que los radios fueran desiguales, lo que no es admisible.

Si suponemos que la parte de la derecha sea la menor, al doblar la figura D caeria dentro del círculo y tendriamos:

por una parte C D=C D''

por otra C D''<C O

luego C D<C O

esto es, que los radios serian desiguales, lo que es imposible.

Luego si la parte A D B no puede ser mayor, ni tampoco menor que la parte A O B, tendrá que ser igual á ella, que es lo que se queria demostrar.

Este ejemplo pone de manifiesto que es preciso completar la demostracion negativa haciendo ver que en cualquiera otro supuesto que no sea el del teorema, forzosamente resulta un absurdo. Si la parte de la derecha no puede ser mayor ni menor que la de la izquierda, tendrá que ser igual á ella, que es lo que establece el teorema.

En geometría, el método de demostracion indirecta, llamado tambien de *reduccion al absurdo*, se usa á menudo para demostrar los teoremas que se llaman *recíprocos*. [374]

374.—DEFINICIONES.—Hay dos vicios de raciocinio que los estudiantes deben evitar en geometría. El uno llamado *peticion de principio, consiste en pretender tomar como fundamento de la demostracion el teorema que debe demostrarse.* Para excusarlo, no hay más que tener presente que el teorema por demostrar debe resultar como consecuencia *de otras* verdades ya conocidas. El otro vicio se llama *círculo vicioso, y consiste en tomar como fundamento de la demostracion un teorema que todavía no se ha demostrado, y que para hacerlo seria necesario apoyarse en el teorema que trata de demostrarse.*

Lema es una proposicion fundamental que sirve de preparacion á varios teoremas ó á la resolucion de una série de ploblemas.

Corolario, es la consecuencia de una proposicion.

Escolio es una observacion relativa á una ó varias proposiciones, con el objeto de explicar sus relaciones, su extension, su utilidad y las restricciones á que deben estar sometidas.

En todo teorema deben distinguirse dos partes: *el supuesto* y la *conclusion*, que es su consecuencia. Por ejemplo, si decimos que *la cuerda que pasa por el centro, ó bien el diámetro, es la mayor de todas las cuerdas; el supuesto* ó hipótesis es que se trata de la *cuerda que pasa por el centro*, y la conclusion es que sea la *mayor de las cuerdas*. Cuando de un teorema se forma otro en el que se toma la *conclusion* como *supuesto*, y éste como conclusion, resulta una proposicion que se llama *recíproca* de la primera. Así el teorema recíproco del que nos ocupamos es que *la mayor de todas las cuerdas es la que pasa por el centro.*

Como algunas veces la conclusion del teorema primitivo conviene á otros casos no comprendidos en el supuesto, resulta que no siempre es cierta la recíproca, y de aquí la necesidad de demostrarla.

Los problemas de geometría que, como los demás que hemos resuelto, tienen por objeto determinar algo desconocido que satisfaga determinadas condiciones, pueden ser relativos á la figura ó relativos á la extension. Los primeros son *gráficos* y los segundos *numéricos*. Es un problema gráfico tirar una tangente á un círculo; y es un problema numérico determinar la longitud del radio de un círculo.

Todo problema consta de resolucion y de demostracion.

ANGULOS.

375.—Definiciones.—*Se llama ángulo la figura formada por dos rectas* A B, A C, [fig. 20], *inclinadas entre sí que concurren en un punto.* Pueden suponerse prolongadas las dos rectas A B y A C, sin que el valor del ángulo cambie. La magnitud de un ángulo depende de la mayor ó menor inclinacion de las rectas que lo forman, pero no de la longitud de éstas. Así, pues, en un ángulo lo que se estima, es la inclinacion de dos rectas.

Figura 20.

Cuando no hay más que un solo ángulo en un punto, como en la figura 20, se denomina por la letra A que está en este punto que se llama *vértice;* y las rectas A B y A C se llaman *lados* del ángulo.

Cuando hay varios ángulos en un mismo punto, como en la figura 21, se denominan con sus tres letras; pero teniendo cuidado de nombrar siempre la del vértice en medio de las dos que corresponden al extremo libre de cada uno de los lados. Así se dice el ángulo A C D y el ángulo D C B.

Cuando una recta D C cae sobre otra A B formando con ella dos ángulos D C A y D C B iguales entre sí [fig. 21], se dice que esta recta es *perpendicular*, y los ángulos D C A y D C B se llaman *rectos.*

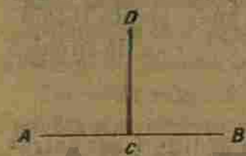

Figura 21.

Todo ángulo E C B [fig. 22], *menor que un recto D C B, se llama agudo; y todo ángulo E C A, mayor que un recto D C A, se llama obtuso.*

Figura 22.

Cuando dos ángulos como E C B y E C A valen juntos dos ángulos rectos, se dice que son suplementarios.

Se llaman complementarios dos ángulos como E C B y E C D, cuya suma es igual á un ángulo recto.

Se llaman ángulos adyacentes los que forma una recta [fig. 23]. *C D que cae sobre otra A B.* Los ángulos A D C y C D B son adyacentes.

Figura 23.

Se llaman *ángulos opuestos al vértice, los que están formados por dos rectas* [fig. 24] *A B y C D que se cortan en un punto O y tienen la expresada posicion,* como los ángulos A O C y B O D.

Figura 24.

376.—Para que dos ángulos sean iguales, es necesario que la inclinacion respectiva de las dos rectas que forman cada uno, sea la misma; esto se prueba haciendo coincidir el vértice A [fig. 25] con el A' y el lado A C con el A' C', y si el otro lado A B coincide con A' B' los dos ángulos serán iguales.

Por tanto, siempre que dos ángulos sean iguales, estamos seguros de que si hiciéramos coincidir sus vértices y uno de sus lados, en el otro lado tambien coincidirian; y recíprocamente cuando los lados coincidan los ángulos serán iguales.

Figura 25.

377.—Teorema.—*Si desde los vértices de dos ángulos* [fig. 25] *y con el mismo radio se trazan arcos de círculo B C y B' C', á ángulos iguales corresponden arcos iguales, y recíprocamente.*

Por haber tomado el radio A C = A' C' y porque todas las líneas rectas pueden sobreponerse, si pusiéramos una sobre otra estas rectas, el punto A coincidiria con A' y el C con C'. Por ser iguales los dos ángulos [376], el lado A B tomaria la direccion A' B', y como estas dos rectas tienen igual longitud por ser rádios, resulta que el punto B coincidiria con B'; luego siendo los dos arcos B C y B' C' arcos de círculos iguales y coincidiendo sus extremos, serán iguales.

La recíproca se demostrará como sigue:

Si sobrepusiéramos las rectas A C y A' C', coincidirian sus extremos por haberlas tomado iguales por construccion. Por ser iguales los arcos B C y B' C', el punto B' coincidiria con B, y coincidiendo los dos extremos de la recta B A con los de la B' A' ésta coincidiria, de lo que resulta que los dos ángulos B A C y B' A' C' serán iguales.

378.—Teorema.—*Los ángulos son proporcionales á los arcos del círculo descrito desde su vértice como centro.*

Si desde el vértice C [fig. 26] del ángulo B C A trazamos una circunferencia con el rádio C A, y al lado de este ángulo trazamos otro B C D igual á B C A, resulta que conforme al teorema anterior el arco B D = B A; luego al ángulo D C A doble de B C A corresponde un arco D A doble de B A.

Figura 26.

Si al lado de D C B trazamos otro ángulo igual E C D, tendremos [377] que E D = D B = B A, luego al ángulo E C A que es triple de B C A, corresponde un arco E A triple de B A.

Y como lo mismo demostrariamos de un ángulo cuádruplo, quíntuplo, etc., se infiere que *los ángulos son proporcionales á los arcos del círculo trazados desde su vértice como centro*, y por esta razon se toma por *medida de un ángulo el arco que sus lados abrazan.*

En efecto, de la magnitud del arco depende la inclinacion de los lados, y por tanto el valor del ángulo.

379.—Toda circunferencia de círculo se considera dividida en 360

partes iguales que se llaman grados, cada grado se subdivide en 60 partes que se llaman minutos, y cada minuto se subdivide en 60 segundos. Los grados se indican con un pequeño cero arriba del número que los representa, los minutos con una coma y los segundos con dos comas. Así 25°—30′—18″ se lee 25 grados 30 minutos y 18 segundos.

Y como los arcos son la medida de los ángulos, éstos se estiman tambien en grados, minutos y segundos. Así, *un ángulo recto,* cuya medida es un cuadrante, *vale* 90°. *Dos ángulos suplementarios valen juntos* 180°. *Dos ángulos complementarios valen juntos* 90°. *Un ángulo agudo vale ménos de* 90°, *y uno obtuso vale más de* 90°.

Este sistema de division, que es el más generalmente adoptado, se llama *sexagesimal;* pero hay otro llamado *centesimal,* en el que la circunferencia se considera dividida en 400 grados, el grado en 100 minutos y el minuto en 100 segundos.

380.—Teorema.—*En un mismo círculo, ó en círculos iguales á arcos iguales, corresponden cuerdas iguales,* y *recíprocamente.*

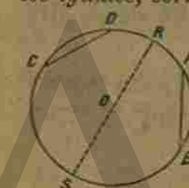

Figura 27.

Sea el arco A B = C D [fig. 27] del mismo círculo, y vamos á demostrar que las cuerdas A B y D C serán iguales. Tomemos el punto R en la mitad del arco D A y tiremos el diámetro R S. Si dobláramos la figura por la recta R S, la semicircunferencia R B S coincidiria con la R C S; [373] por haberse tomado R en el medio de D A, el punto A concidirá con D; y por ser el arco A B = D C el punto B coincidiria con C; y supuesto que los extremos de la cuerda A B coinciden respectivamente con los de la C D resulta que estas dos cuerdas serán iguales.

Recíprocamente si la cuerda A B = C D, haciendo la misma construccion y doblando la figura segun R S resulta que coincidirian los extremos de los arcos, por lo que serán iguales.

Si se tratara de dos círculos iguales comenzariamos por sobreponerlos, y en seguida serian aplicables las demostraciones anteriores.

De este teorema resulta que *dos ángulos serán iguales cuando lo sean las cuerdas de los arcos descritos desde sus vértices con el mismo rádio, y recíprocamente.*

381.—Antes de ocuparnos de la resolucion de algunos problemas diremos que, al tratar de una demostracion, la figura tiene solo por objeto ayudar á la inteligencia del raciocinio que se funda en las relaciones que hay entre el enunciado y el objeto de la demostracion; por cuya razon esas figuras no tienen necesidad de ser trazadas con gran cuidado; no sucediendo otro tanto cuando el objeto es resolver un problema *gráfico*, en el que se trata de construir figuras que satisfagan determinadas condiciones, cuyo resultado depende de la exactitud con que se tracen las líneas, objeto de la cuestion. En la resolucion de los problemas gráficos importa que el papel esté restirado sobre un plano perfecto, que los instrumentos que se usen estén rectificados, que las líneas sean tan finas como sea posible, y por último, que los puntos tengan la menor extension que se pueda.

En cuanto á los problemas *numéricos*, que tienen por objeto determinar los valores numéricos de los elementos de una figura deduciéndolos de otros, son del resorte de la aritmética; la geometría solo interviene en ellos para hacer conocer las relaciones de extension que ligan los datos con las incógnitas, así como aquellos procedimientos por cuyo medio se determina la relacion de estos últimos con la unidad de su especie. Debe tenerse en cuenta la aproximacion que los instrumentos usados pueden dar para no llevar inútilmente los cálculos más allá de ese grado. Si, por ejemplo, la escala no indica sino medios milímetros, será inútil llevar la aproximacion en los cálculos más allá de los diez milímetros.

Además del lápiz, del grafio, de la regla, de la escala y del compás para la resolucion de los problemas gráficos, nos servimos de la *escuadra* y del *trasportador*.

Figura 28.

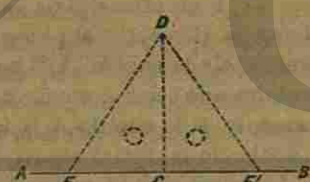

Figura 29.

La *escuadra* [fig. 28] es un triángulo de madera, de metal ó de marfil, en el que uno de sus ángulos A precisamente es recto. Sirve particularmente para trazar líneas perpendiculares y paralelas. Para cerciorarse de que está bien construida, por un punto C [fig. 29] de la recta A B se traza la perpendicular C D aplicando el borde E C de la escuadra contra ella. En seguida se voltea la escuadra aplicando contra el papel la cara que estaba para arriba y quedando el vértice E cerca de B en el punto E', se traza otra perpendicular por el mismo punto C. Si esta segunda perpendicular se confunde con la primera, es prueba de que la escuadra está buena, pues entónces el ángulo D C E será recto.

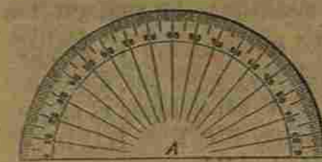

Figura 30.

El trasportador (fig. 30) es un semicírculo de metal ó de cuerno trasparente, en el que está marcado el centro A, y los grados y medios grados. Sirve para medir los ángulos ó para construirlos de determinado valor. Hay dos cosas que rectificar en este instrumento: que el punto marcado A sea el centro del semicírculo, y que los grados sean iguales entre sí. Para cerciorarse de la buena colocacion del centro, basta tomar con el compás la longitud del radio del trasportador y trazar una circunferencia: si en cualquiera posicion pueden hacerse coincidir el centro y la semicircunferencia del trasportador con el centro y circunferencia trazada, el centro del instrumento estará bien fijado. Para averiguar si está bien dividido, se toma con el compás la cuerda, por ejemplo, del arco de 15°, y se va llevando entre las divisiones de 1 y 16°, de 2 y 17°, de 3 y 18°, etc., cuyas distancias deben ser constantemente iguales, supuesto que á arcos iguales corresponden cuerdas iguales.

382.—Problemas de ángulos.—I.—*Sobre la recta* A B (fig. 31) *construir un ángulo igual al ángulo dado* D.

Figura 31.

Desde el vértice D, como centro y con un radio cualquiera, trácese el arco E F; haciendo centro en A y con el mismo radio trácese el arco indefinido G H: tómese la cuerda E F y llévese desde G hasta C: y tirando la recta C A ésta formará un ángulo igual al dado.

El fundamento de esta construccion es que los arcos E F y C G, que miden estos ángulos, son iguales por pertenecer á círculos iguales y tener cuerdas iguales.

II.—*Construir un ángulo igual á la suma de dos ángulos dados.*

Figura 32.

Sean los ángulos dados A y B. Sobre la recta C D (fig. 32) y conforme á lo explicado en el problema anterior, se construye el ángulo D C E=A. En seguida sobre la recta C E y empleando el mismo método, se construye el ángulo E C F = B. El ángulo F C D será igual á A + B. Así puede construirse un ángulo doble, triple, etc, de otro.

III.—*Determinar la diferencia entre dos ángulos* A *y* B (fig. 33).

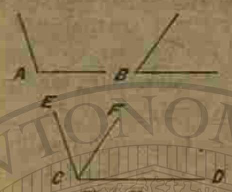
Figura 33.

Sobre la recta C D' se construye el ángulo D' C E = A, que es el mayor de los ángulos. Sobre el mismo lado C D' constrúyase el ángulo D' C F = B. El ángulo E C F = E C D' — D' C F = A — B será el pedido.

IV.—*Determinar el número de grados del ángulo* C A B (fig. 34) *por medio del trasportador.*


Figura 34.

Se colocará el trasportador sobre el ángulo C A B, teniendo cuidado de hacer coincidir el centro del instrumento con el vértice A del ángulo y la línea marcada con 0° y 180° con uno de los lados, con C A por ejemplo. Hecho esto, bastará ver el número de grados que marca el otro lado A B para conocer el valor del ángulo, que en este caso es de 37°—30'. Siempre que sea necesario se prolongarán los lados del ángulo.

V.—*Construir un ángulo de* $35°\frac{1}{2}$ *sirviéndose del trasportador.* (Fig. 35).


Figura 35.

Trácese la recta A B; hágase coincidir el punto A con el centro del trasportador, y la recta A B con el diámetro que pasa por el cero: márquese un punto C en la graduacion $35°\frac{1}{2}$; y tirando la recta C A quedará trazado el ángulo pedido.

Principales casos de igualdad en los triángulos.

383.—Se llama triángulo rectilíneo una figura que determina un espacio cerrado por tres líneas rectas, como A B C (fig. 36).

Las rectas que limitan el triángulo se llaman *lados*, y los puntos en que concurren de dos en dos, se llaman *vértices*. Así pues, todo triángulo tiene tres lados y tres ángulos.

Para que dos triángulos puedan coincidir en todos sus puntos, y que

por lo mismo sean iguales, se necesita que coincidan respectivamente sus tres vértices, que son los extremos de sus lados.

Consideraremos por ahora tres casos de igualdad de los triángulos.

384.—I.—*Dos triángulos son iguales cuando tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales* (fig. 36).

A B = A' B', A = A' y B = B'

Demostracion.—Por ser A B = A' B' si sobrepusiéramos estas figuras el lado A B coincidirian con A' B'. Por ser el ángulo A = A' coincidiendo el lado A B con A' B', el lado A C tomaria la misma direccion que A' C'. Por ser el ángulo B = B' coincidiendo el lado A B con A' B', el lado B C tomaria la misma direccion que B' C', y coincidiendo respectivamente los dos lados A C y B C con A' C' y B' C' es claro que el punto C, interseccion de las dos primeras rectas, coincidiria con C' interseccion de las dos últimas. Finalmente, coincidiendo los tres vértices de los dos triángulos resulta que son iguales.

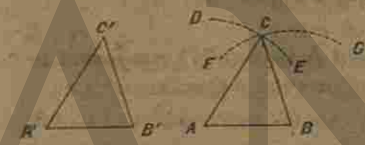
Figura 36.

385.—II.—*Dos triángulos son iguales cuando tienen un ángulo igual formado por lados iguales* (fig. 36).

A = A', A B = A' B' y A C = A' C'.

Demostracion.—Por ser el ángulo A = A' si sobrepusiéramos las dos figuras, los lados A B y A C tomarian la misma direccion que A' B' y A' C'; y por ser A B = A' B' y A C = A' C', el punto B coincidiria con B' y el C con C'; luego el tercer lado B C coincidiria con B' C' por coincidir sus extremos, y los triángulos serán iguales.

386.—III.—*Dos triángulos serán iguales cuando tengan sus tres lados respectivamente iguales.*

(Fig. 36) A B = A' B', A C = A' C' y B C = B' C'

Demostracion.—Por ser el lado A B = A' B' si sobrepusiéramos las dos figuras, estos lados, lo mismo que sus extremos, coincidirian. Si desde el punto A como centro y con el radio A C trazamos un arco de círculo D E por ser A C = A' C' el punto C' caerá en alguno de los de este arco. Si desde el punto B como centro y con el radio B C trazamos un arco de círculo F G, por ser B C = B' C' el punto C' caerá en alguno de los del expresado arco F G; y debiendo pertenecer á los dos arcos D E y F G el punto C' caerá sobre C, que es la interseccion de los arcos; luego coincidiendo los tres vértices de los dos triángulos resulta que son iguales.

387.—*En triángulos iguales a lados iguales están opuestos ángulos iguales, y recíprocamente.*

Siendo los triángulos iguales podrán sobreponerse coincidiendo los lados y los ángulos, y cuando coincidan los dos triángulos en todos sus puntos, resultará que á los lados iguales quedan opuestos ángulos iguales, y recíprocamente que á los ángulos iguales quedarán opuestos lados iguales.

Estos tres casos de igualdad de los triángulos, y el teorema que acabamos de demostrar, son de muy frecuente uso.

PERPENDICULARES Y OBLICUAS.

388.—*Se llama perpendicular toda recta* A B (fig. 37) *que forma con otra* D C *dos ángulos* A B C *y* A B D *adyacentes é iguales entre sí.*

Figura 37.

Se llama oblícua una recta F G (fig. 38) *que forma con otra* H L *dos ángulos adyacentes desiguales.*

389.—Teorema.—*Cuando una recta* F G (fig. 38) *cae sobre otra* H L *los ángulos* F G H *y* F G L *que forman, son suplementarios.*

Figura 38.

Demostracion.—Si en el punto G levantamos la perpendicular G O tendremos:

$$FGH + FGL = OGH + OGL$$

pero por construccion

$$OGH + OGL = 2 \text{ rectos.}$$
$$FGH + FGL = 2 \text{ rectos.}$$

390.—Teorema.—*La suma de todos los ángulos consecutivos formados de un lado de una recta, es igual á dos rectos.*

Demostracion.—Para demostrar que la suma de los ángulos (fig. 39) A C D, D C E, E C F y F C B valen dos rectos, por el punto C levantaremos la perpendicular C O, y como

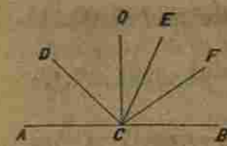

Figura 39.

$$ACD + DCE + ECF + FCB = ACO + OCB$$

y como $ACO + OCB = 2$ rectos se infiere que

$$ACD + DCE + ECF + FCB = 2 \text{ rectos.}$$

391.—*La suma de todos los ángulos* (fig. 40) *formados al rededor de un punto* C *es igual á cuatro rectos.*

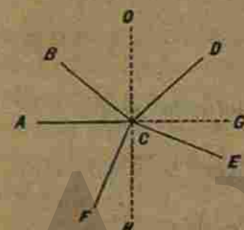

Figura 40.

Si prolongamos el lado A C hasta G, y por el punto C levantamos la perpendicular O C H tendremos que

$$ACB + BCD + DCE + ECF + FCA = ACO + OCG + GCH + HCA$$

y como los cuatro ángulos del segundo miembro son rectos, se infiere que la suma de los ángulos del primer miembro de la ecuacion, valdrán 4 rectos.

392.—*Las bisectrices de los ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí.*

Se llama bisectriz la recta que divide un ángulo en dos partes iguales.

Sean los dos ángulos adyacentes [fig. 41) A C B y B C D, y vámos á demostrar que las rectas C E y C F, que dividen en dos partes iguales esos ángulos, son perpendiculares entre sí, esto es, que el ángulo F C E es recto.

Figura 41.

Por ser adyacentes los ángulos [389] se tiene:

$$ACB + BCD = 2 \text{ rectos}$$

tomando la mitad

$$\frac{ACB}{2} + \frac{BCD}{2} = 1 \text{ recto}$$

sustituyendo por $\frac{ACB}{2}$ su igual F C B y por $\frac{BCD}{2}$, B C E se tiene

$$FCB + BCE = 1 \text{ recto}$$

$$FCE = 1 \text{ recto}$$

de los arcos; luego coincidiendo los tres vértices de los dos triángulos resulta que son iguales.

387.—*En triángulos iguales a lados iguales están opuestos ángulos iguales, y recíprocamente.*

Siendo los triángulos iguales podrán sobreponerse coincidiendo los lados y los ángulos, y cuando coincidan los dos triángulos en todos sus puntos, resultará que á los lados iguales quedan opuestos ángulos iguales, y recíprocamente que á los ángulos iguales quedarán opuestos lados iguales.

Estos tres casos de igualdad de los triángulos, y el teorema que acabamos de demostrar, son de muy frecuente uso.

PERPENDICULARES Y OBLICUAS.

388.—*Se llama perpendicular toda recta* A B (fig. 37) *que forma con otra* D C *dos ángulos* A B C *y* A B D *adyacentes é iguales entre sí.*

Figura 37.

Se llama oblicua una recta F G (fig. 38) *que forma con otra* H L *dos ángulos adyacentes desiguales.*

389.—Teorema.—*Cuando una recta* F G (fig. 38) *cae sobre otra* H L *los ángulos* F G H *y* F G L *que forman, son suplementarios.*

Figura 38.

Demostracion.—Si en el punto G levantamos la perpendicular G O tendremos:

$$FGH + FGL = OGH + OGL$$

pero por construccion

$$OGH + OGL = 2 \text{ rectos.}$$
$$FGH + FGL = 2 \text{ rectos.}$$

390.—Teorema.—*La suma de todos los ángulos consecutivos formados de un lado de una recta, es igual á dos rectos.*

Demostracion.—Para demostrar que la suma de los ángulos (fig. 39) A C D, D C E, E C F y F C B valen dos rectos, por el punto C levantaremos la perpendicular C O, y como

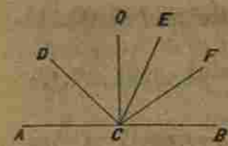

Figura 39.

$$ACD + DCE + ECF + FCB$$
$$= ACO + OCB$$

y como $ACO + OCB = 2$ rectos

se infiere que

$$ACD + DCE + ECF + FCB = 2 \text{ rectos.}$$

391.—*La suma de todos los ángulos* (fig. 40) *formados al rededor de un punto* C *es igual á cuatro rectos.*

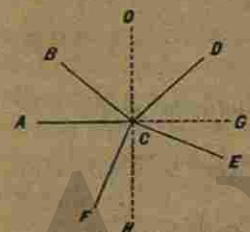

Figura 40.

Si prolongamos el lado A C hasta G, y por el punto C levantamos la perpendicular O C H tendremos que

$$ACB + BCD + DCE + ECF + FCA$$
$$= ACO + OCG + GCH + HCA$$

y como los cuatro ángulos del segundo miembro son rectos, se infiere que la suma de los ángulos del primer miembro de la ecuacion, valdrán 4 rectos.

392.—*Las bisectrices de los ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí.*

Se llama bisectriz la recta que divide un ángulo en dos partes iguales.

Sean los dos ángulos adyacentes [fig. 41) A C B y B C D, y vámos á demostrar que las rectas C E y C F, que dividen en dos partes iguales esos ángulos, son perpendiculares entre sí, esto es, que el ángulo F C E es recto.

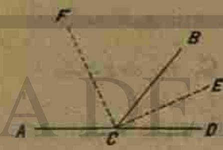

Figura 41.

Por ser adyacentes los ángulos [389] se tiene:

$$ACB + BCD = 2 \text{ rectos}$$

tomando la mitad

$$\frac{ACB}{2} + \frac{BCD}{2} = 1 \text{ recto}$$

sustituyendo por $\frac{ACB}{2}$ su igual F C B y por $\frac{BCD}{2}$, B C E se tiene

$$FCB + BCE = 1 \text{ recto}$$

$$FCE = 1 \text{ recto}$$

393.—*Los ángulos* (fig. 42) D B C y A B E *opuestos al vértice, son iguales.*


Figura 42.

Tenemos que por ser adyacentes (389) los ángulos

D B C + A B D = 2 rectos

por igual razon

A B E + A B D = 2 rectos

luego

D B C + A B D = A B E + A B D

suprimiendo A B D resulta

D B C = A B E

que es lo que se debia demostrar.

394.—*Cuando una recta* (fig. 43) A B, *es perpendicular á otra* C D, *ésta tambien es perpendicular á la primera* A B.


Figura 43.

Prolonguemos la recta A B hasta E, y demostraremos que siendo A B C = A B D, los ángulos A B C y C B E que forma la recta C D con A E, tambien serán iguales, y en consecuencia la recta C D será perpendicular á A E.

Por lo supuesto del teorema

A B C = A B D;

por opuestos al vértice (393)

A B D = C B E

luego

A B C = C B E

395.—*Desde un punto* A (fig. 44) *de una recta* B C, *no se puede levantar mas de una sola perpendicular.*


Figura 44.

Si supusiéramos que se pudiera levantar otra perpendicular A E, tendriamos:

por el teorema

D A C = 1 recto

por el supuesto

E A C = 1 recto

luego

D A C = E A C

pero siendo ésto inadmisible, se infiere que A E no es perpendicular á B C, y que solo podrá serlo en el caso de confundirse con A D.

396.—*Por un punto* A (fig. 45) *situado fuera de una recta* B C, *no se le puede bajar mas de una sola perpendicular* A D.

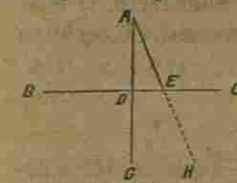
Figura 45.

Si fuera posible bajar otra perpendicular A E, tendriamos prolongando A D y A E que B C seria perpendicular á A G y á A H (394). Si dobláramos la figura por la recta B C, por ser el ángulo A D B = B D G, la recta A D tomaria la direccion de D G y el punto A caeria en alguno de la recta D G; y por suponerse el ángulo A E B = B E H, la recta A E deberia tomar la direccion E H y el punto A caeria en alguno de la recta E H. En consecuencia, si las dos rectas A D y A E pudieran ser perpendiculares á B C, al doblar la figura, el punto A deberia caer al mismo tiempo sobre D G y E H, y no siendo esto posible, á ménos que A D coincida con A E, inferiremos que no se puede bajar desde el punto A mas de una sola perpendicular.

397.—*Cuando dos ángulos* A B C *y* C B D (fig. 46), *tienen la posicion de adyacentes y juntos valen dos rectos, las dos rectas* A B *y* B D *tiradas por el extremo de la línea comun* C B, *serán prolongacion una de la otra.*


Figura 46.

Si suponemos que B D no sea prolongacion de A B sino que lo fuera B E, tendriamos:

conforme al supuesto del teorema

A B C + C B D = 2 rectos.

Por suponer que son adyacentes A B C y C B E

A B C + C B E = 2 rectos

de las que resulta

A B C + C B D = A B C + C B E

luego

C B D = C B E

lo que no es posible, á ménos que B E y B D coincidan, esto es, cuando B D sea la prolongacion de A B.

398.—*La menor distancia de un punto* A (fig. 47) *á una recta* B C, *es la perpendicular* A D *bajada desde dicho punto.*


Figura 47.

Demostraremos que la perpendicular A D es más corta que cualquiera otra oblícua A E. Si dobláramos la figura por B C, el punto A caeria en F, y por tener los ángulos B D A y B D F la posicion de adyacentes y ser cada uno de ellos recto, D F será prolongacion de A D (397) esto es, A F será una línea recta, luego:

$$A F < A E F$$

tomando la mitad

$$A D < A E.$$

Que es lo que se debia demostrar.

Esta propiedad hace que la distancia de un punto á una recta se mida siempre por la perpendicular bajada del punto á la recta.

399.—*Las oblícuas* A B *y* A C (fig. 48) *bajadas desde un mismo punto sobre una recta, y que se separan igualmente del pié de la perpendicular serán iguales.*


Figura 48.

Los triángulos A D B y A D C serán iguales (385) por tener el ángulo A D B = A D C por recto, el lado A D comun, y B D = D C por el supuesto, y como en triángulos iguales á ángulos iguales están opuestos lados iguales (387) tendremos que por estar opuestos á los ángulos rectos: A B = A C.

400.—*Si dos puntos* C *y* D (fig. 49) *desigualmente distantes de una recta* A B *se reunen á sus extremos, la suma de las rectas* C A + C B *tiradas del punto mas próximo* C, *será menor que la suma de las* D A + D B *tiradas del mas distante* D.

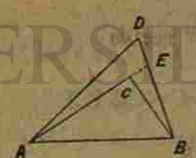
Figura 49.

Para demostrar que C A + C B < D A + D B prolongaremos A C hasta E, y supuesto que la línea recta es el camino más corto entre dos puntos, se tiene:

$$A E < D A + D E$$

y agregando á los dos miembros E B

$$A E + E B < D A + D B \ldots . [1]$$

Por otra parte

$$C B < E C + E B$$

y agregando á los dos miembros C A

$$C A + C B < A E + E B \ldots . [2]$$

Observando que el primer miembro de la última desigualdad, es menor que A E + E B y que conforme á la (1) esta suma es menor que D A + D B, se infiere que:

$$C A + C B < D A + D B.$$

401.—*Si desde un punto* A (fig. 50) *se bajan varias oblícuas* A B A D, *la que se separe más del pié de la perpendicular* A C, *será la mayor*.

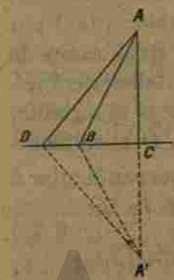
Figura 50.

Si dobláramos la figura por la recta D C y suponemos que el punto A caiga en A', A B tomaria la posicion de A' B, y A D la de A' D.

Teniendo los ángulos A C D y A' C D la posicion de adyacentes y siendo cada uno de ellos recto, la línea C A' será la prolongacion de A C (397) y en consecuencia A A' es una línea recta. Por otra parte, estando B más próximo á la recta A A' que el punto D tendremos que (400)

$$A B + B A' < A D + D A'$$

tomando la mitad

$$A B < A D$$

que es lo que se debia demostrar.

402.—Como si desde un punto se tiran varias líneas á una recta, por una parte la perpendicular es menor que cualquiera oblícua, y por otra solo pueden ser iguales las oblícuas que se separan igualmente del pié de la perpendicular, siendo mayores las que se separan más; se infiere que *desde un punto tomado fuera de una recta, no se le pueden tirar mas que dos rectas iguales.*

403.—*Si por el medio* C (fig. 51) *de una recta* A B *se levanta una perpendicular* C D: 1° *cualquier punto de la perpendicular estará equidistante de los extremos* A *y* B: 2° *cualquier punto que no pertenezca á la perpendicular, distará desigualmente de los extremos.*


Figura 51.

Demostracion.—1° A E = E B por ser oblícuas, que segun el supuesto, distan igualmente del pié de la perpendicular (399).

2° Vamos á demostrar ahora que un punto F que no pertenece á la perpendicular, dista desigualmente de los extremos. Reuniremos F con A y con B y por el punto E tiremos la recta E B. Tendremos

$$F B < E B + E F$$

sustituyendo por E B, su igual E A resulta

$$F B < F A.$$

404.—*Siempre que una recta* A B (fig. 52) *tiene dos puntos* A *y* B *equidistantes de dos puntos* C *y* D *de otra recta, la primera será perpendicular á la segunda, y la dividirá en dos partes iguales.*

Figura 52.

Fundándonos en que A C = A D y B C = B D, demostraremos que el ángulo A O C=A O D. Los triángulos A B C y A B D son iguales (386) por tener sus tres lados iguales; luego si dobláramos la figura por la línea A B, el punto D deberia coincidir con C, y permaneciendo el punto O invariable, resultaria que los lados del ángulo A O C coincidirán con los del A O D por lo que serán iguales, y A B perpendicular á C D. Además, se ve que A B divide á C D en dos partes iguales.

405.—*Todos los puntos de la bisectriz de un ángulo están equidistantes de los lados del ángulo.*

Sea el ángulo A B C (fig. 53) y vamos á demostrar que cualquier punto E de la recta B D, que lo divide en dos ángulos A B D y D B C iguales, está equidistante de los lados A B y B C del ángulo A B C Como la distancia de un punto á una recta se mide por la perpendicular bajada sobre la recta, si bajamos las perpendiculares E F y E G, debemos probar que estas líneas que miden la distancia de un punto de la bisectriz á los lados del ángulo son iguales.

Figura 53.

Si dobláramos la figura por la recta B D el punto E permaneceria fijo, y por ser el ángulo A B D= D B C el lado B C coincidiria con B A y el punto F de la primera recta debeberá hallarse en alguno de los de la recta B A. Por otra parte, la línea E F que es perpendicular á B C despues de doblada la figura, deberá tomar una posicion perpendicular á A B; pero como desde un mismo punto E no se puede bajar mas de una sola perpendicular á una recta (396), resulta que E F tomará la direccion E G, y como el punto F debe encontrarse á la vez sobre las rectas A B y E G tendrá que coincidir con G; luego E F=E G.

406.—*Todo punto* O (fig. 54) *que queda dentro de un ángulo* A B C *y que no pertenece á la bisectriz, está desigualmente distante de los lados del ángulo.*

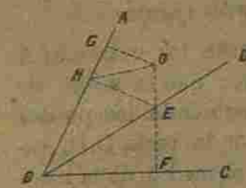

Figura 54.

Las perpendiculares O F y O G son las distancias del punto O á los lados del ángulo, y vamos á probar que O G<O F.

Por el punto E tiremos la perpendicular E H á A B, y unamos O con H.

Tendremos:

$$O G < O H \ (398)$$

$$O H < O E + E H$$

pero siendo E H=E F (405)

sustituyendo se tiene $\quad O H < O F$

luego con más razon $\quad O G < O F$

407.—Problemas de oblícuas y perpendiculares.—I.—*Levantar una perpendicular á una recta,* A B (fig. 55) *desde un punto* C *de la misma recta.*

Figura 55.

Resolucion.—Tómense dos puntos B y D equidistantes de C, y haciendo centro primero en B y luego en D con un radio arbitrario pero mayor que C B, trácense dos arcos de círculo, y reuniendo el punto E de interseccion de estos dos arcos con el punto C, la recta C E será la perpendicular; por tener conforme á la construccion dos puntos C y E equidistantes de otros dos D y B de la línea dada (404).

El rádio arbitrario B E debe ser mayor $\frac{BD}{2}$ para que los arcos del círculo puedan cortarse.

II.—*Bajar una perpendicular á una recta,* A B (fig. 56) *desde un punto* C *tomado fuera de ella.*

Figura 56.

Haciendo centro en el punto C y con un rádio C D trácese el arco D E que corte la recta dada en dos puntos; hágase centro en cada uno de estos puntos D y E y con un mismo radio descríbanse dos arcos que se cortarán en el punto F; reuniendo los puntos C y F con una recta C F, esta será la pedida por tener dos puntos C y F, equidistantes de los D y E de la recta dada. (404).

III.—*Dividir una recta* A B (fig. 57) *en dos partes iguales.*

Figura 57.

Tómense como centros sucesivamente los extremos A y B de la recta, y con un radio mayor que la mitad de dicha recta trácense dos arcos, y reuniendo los puntos C y D de interseccion de los arcos por la recta C D, esta determinará el punto M que será el medio de la línea A B.

Demostracion.—Estando dos puntos C y D equidistantes de A y de B, si se reunen estos dos puntos resultarán dos triángulos A C D y B C D iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales; luego si se doblara la figura por C D permaneciendo fijo el punto M, el punto B coincidiria con A, lo que prueba que las partes A M y B M son iguales.

IV.—*Dividir un ángulo C en dos partes iguales.*

Figura 58.

Desde el vértice C (fig. 58) trácese un arco A B; haciendo centro en A y B descríbanse dos arcos que se cortarán en D, y reuniendo C con D esta recta dividirá en dos partes iguales el ángulo dado. En efecto, los dos triángulos A C D y B C D son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales; y por estar opuestos á lados iguales en triángulos iguales, los ángulos A C D y B C D, serán iguales.

Como empleando el mismo procedimiento podrian dividirse en dos partes iguales cada uno de los ángulos A C D y B C D, resulta que así podrá sucesivamente dividirse en 4, 8, 16, etc., partes iguales.

V.—*Determinar el suplemento, y el complemento de un ángulo.*

Figura 59.

Sea el ángulo A B C (fig. 59); bastará prolongar uno de sus lados, y conforme al teorema del núm. 389 el ángulo C B D será el suplemento del ángulo dado. Para determinar su complemento haciendo uso de la construccion del problema I de la figura 55 se levantará una perpendicular en el punto B y el ángulo C B E será el complemento buscado.

PARALELAS

408.—Definicion.—*Se llaman paralelas las rectas que estando en un plano tienen todos sus puntos equidistantes.*

Como la distancia de un punto á una recta se mide por la perpendicular bajada sobre ella, para que dos rectas A B y C D sean paralelas (fig. 60) es necesario que las perpendiculares bajadas de dos puntos cualesquiera E y F sobre C D sean iguales.

409.—Teorema.—*Toda recta* J L (fig. 60) *perpendicular á una de dos paralelas, es tambien perpendicular á la otra.*

Figura 60.

Supongamos que J L sea perpendicular á C D, y vamos á demostrar que tambien lo será á A B, para lo que necesitaremos inferir que los ángulos L J B y L J A son iguales. Tomemos á distancias iguales de L los puntos H y G, y por ellos levantemos las perpendiculares H F y G E á C D, resultará que E G = F H por medir las distancias de los puntos de las dos paralelas A B y C D. Si dobláramos la figura por J L por ser esta línea perpendicular á C D, la parte L D tomaria la direccion de L C, y como por construccion L H = L G, el punto H coincidirá con G. Como F H y E G son perpendiculares á C D, la recta H F despues de doblada la figura deberia tomar la direccion de G E; y como además H F = G E resulta que el punto F caeria sobre E; y como el punto J ha permanecido fijo, se infiere que el ángulo L J B es igual á L J E que es lo que se debia demostrar.

410.—*Por un punto* A (fig. 61) *no se puede tirar más de una sola paralela á otra recta* B C.

Figura 61.

Siendo A D paralela á B C, tendremos A B = C D. Si suponemos que pudiera tirarse otra paralela desde A, como A E, tendriamos A B = C E, de lo que resultaria C D = E C lo que es imposible, á ménos que A E coincida con A D.

Debemos insistir sobre lo que dijímos en la definicion, y es que las paralelas están en un mismo plano.

411.—*Si cada una de las rectas* A B y C D (fig. 62) *es paralela á una tercera recta* E F; *serán paralelas entre sí.*

Figura 62.

Por ser A B paralela á E F se tiene

A E=B F

por ser C D paralela á E F

C E=DF

restando esta ecuacion de la anterior, resulta.

A C=B D

luego A B será paralela á C D.

412.—Cuando una recta corta dos paralelas (fig. 63), á la recta A B se le llama *secante* y los ángulos que forma con las paralelas toman las siguientes denominaciones:

Figura 63.

Se llaman *internos* los cuatro ángulos que quedan dentro de las paralelas, y son: C G H, D G H, E H G y F H G.

Se llaman *externos* los cuatro ángulos que quedan fuera de las paralelas, y son: C G B, B G D, A H E y A H F.

Considerando los ángulos de dos en dos: se llaman *alternos internos*, los internos colocados de diferente lado de la secante como C G H y F H G, ó E H G y D G H: se llaman *alternos externos* los ángulos que están fuera de las paralelas y de diferente lado de la secante, como C G B y A H F, ó B G D y E H A: por último, se llaman *correspondientes* los ángulos colocados del mismo lado de la secante, siendo uno interno y el otro externo, como B G D y B H F, A H F, y A G D, E H A y C G A, E H B y C G B.

413.—Tomaremos como principio fundamental de las propiedades del paralelismo de dos líneas, el siguiente

TEOREMA.—*Siempre que los ángulos* C A B y D B A (fig. 64) *que tienen la posicion de alternos internos, sean iguales, las dos rectas* C E *y* F D *serán paralelas.*

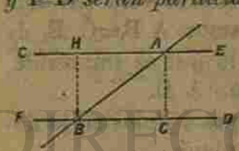

Figura 64.

Conforme á la hipótesis del teorema, C A B =D B A y vamos á demostrar que las rectas C E y F D tienen sus puntos equidistantes. Por el punto A levántese A G perpendicular á C E; y por B levántese B H perpendicular á F D. El ángulo B A G será complemento de C A B, y el ángulo H B A será complemento de D B A; pero siendo

C A B=D B A

se infiere que tambien lo serán sus complementos, luego

B A G=H B A.

Los dos triángulos A B G y A B H serán iguales (384) por tener el lado A B comun adyacente á dos ángulos respectivamente iguales; y como en triángulos iguales á ángulos iguales están opuestos lados iguales, tendremos:

A G=B H

por opuestos á los ángulos

A B G=B A H

y como A G y B H miden las distancias de dos puntos de las rectas C E y F D, se infiere que serán paralelas por estar equidistantes.

414.—*Siempre que en dos rectas* A B *y* C D (fig. 65) *cortadas por una secante, los ángulos que tienen la posicion de alternos externos sean iguales, estas rectas serán paralelas.*

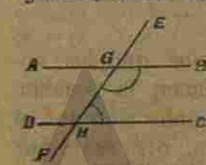

Figura 65.

Conforme á la hipótesis

A G E=F H D

sustituyendo á estos ángulos sus iguales por opuestos al vértice, se tiene

B G H=C H G

pero como estos tienen la posicion de alternos internos, se infiere que las rectas serán paralelas.

415.—*Si los ángulos correspondientes son iguales, las rectas serán paralelas.*

Sean (fig. 65) E G B=E H D

sustituyendo por E G B su opuesto al vértice, se tiene

A G H=E H D

pero siendo estos ángulos alternos internos, las rectas serán paralelas.

416.—*Siempre que los ángulos internos del mismo lado de la secante sean suplementarios, las dos rectas serán paralelas.* (fig. 65).

Sean A G H+C H G=2 rectos

y como

A G H+H G B=2 rectos (389)

igualando los primeros miembros se infiere que

C H G=H G B

pero siendo estos alternos internos, las rectas serán paralelas.

417.—*Siempre que los ángulos externos del mismo lado de la secante sean suplementarios, las rectas serán paralelas.*

Sean (fig. 65) $\quad A\ G\ E + C\ H\ F = 2$ rectos
sustituyendo sus iguales por opuestos al vértice

$$B\ G\ H + D\ H\ G = 2 \text{ rectos}$$

pero como

$$B\ G\ H + A\ G\ H = 2 \text{ rectos } (389)$$

igualando los primeros miembros se infiere que

$$D\ H\ G = A\ G\ H$$

pero siendo estos ángulos alternos internos, las rectas serán paralelas.

418.—Los teoremas recíprocos del fundamental y de los cuatro siguientes á él son tambien ciertos; pero como la demostracion de estas proposiciones recíprocas es muy sencilla, solo daremos la del teorema fundamental.

Teorema.—*Siempre que dos rectas* A B *y* C D (fig. 66) *sean paralelas, los ángulos alternos internos serán iguales.*

Figura 66.

Demostracion.—Si suponemos que los ángulos A F G y F G D, que tienen la posicion de alternos internos, no sean iguales sino que el primero sea mayor que el último, otra recta que pase por F como A' B', será la que tenga la propiedad de formar el ángulo

$$A'\ F\ G = F\ G\ D$$

pero teniendo estos ángulos la posicion de alternos internos conforme al teorema (413) directo, las rectas A' B' y C D serian paralelas, y como por el supuesto A B es tambien paralela á C D, resultaria que por un mismo punto F se podrian tirar dos paralelas, á una misma recta, lo que es imposible; (410) y como el mismo absurdo resultaria si supusiéramos $A\ F\ G < F\ G\ D$ se tiene, que no pudiendo ser estos ángulos desiguales, tendrá que verificarse que siempre que las rectas sean paralelas los ángulos alternos internos serán iguales.

419.—*Dos ángulos cuyos lados son paralelos y que tienen sus vértices vueltos en el mismo sentido son iguales.*

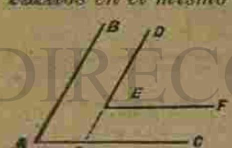

Figura 67.

Si prolongamos el lado D E (fig. 67) hasta G. tendremos:

$$A = D\ G\ C \text{ por correspondientes}$$
$$D\ G\ C = D\ E\ F \text{ por la misma razon}$$

luego

$$A = D\ E\ F.$$

420.—*Dos ángulos cuyos lados son paralelos y que tienen sus vértices vueltos en sentido contrario, son iguales.*

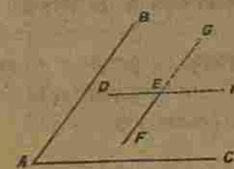

Figura 68.

Sean los ángulos B A C y D E F; (fig. 68) prolongando los lados del último, tendremos que

$$B\ A\ C = G\ E\ H \ (419)$$
$$G\ E\ H = D\ E\ F \text{ por opuestos al vértice}$$

luego

$$B\ A\ C = D\ E\ F.$$

421.—*Dos ángulos cuyos lados son paralelos y cuyos vértices no están vueltos en el mismo sentido ni en sentido contrario, son suplementarios.*

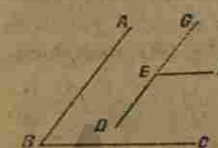

Figura 69.

Si prolongamos el lado D E (fig. 69), tendremos:

$$D\ E\ F + F\ E\ G = 2 \text{ rectos } (389)$$

pero

$$F\ E\ G = A\ B\ C \ (419)$$

luego

$$D\ E\ F + A\ B\ C = 2 \text{ rectos.}$$

422.—*Dos ángulos cuyos lados son perpendiculares, serán iguales si dichos ángulos son de la misma especie, y serán suplementarios cuando uno sea agudo y el otro obtuso.*

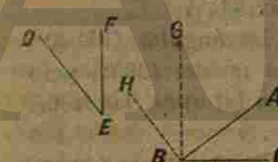

Figura 70.

Sean los ángulos agudos A B C y D E F (fig. 70) en los que D E es perpendicular á A B y F E perpendicular á B C; y vámos á demostrar que son iguales. Por el vértice B tiremos B G paralela á E F y B H paralela á E D, con lo que resultará el ángulo H B G $= D\ E\ F$ (419).

Por ser los lados de estos ángulos respectivamente perpendiculares tendremos:

$$H\ B\ A = G\ B\ C \text{ por rectos}$$

restando G B A de ambos, se tiene

$$H\ B\ G = A\ B\ C$$

pero como

$$H\ B\ G = D\ E\ F$$

resulta que

$$A\ B\ C = D\ E\ F.$$

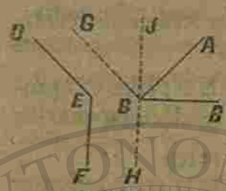
Figura 71.

Si los ángulos son de diferente especie, como en la figura 71, tirando por el vértice B las rectas B G y B H respectivamente paralelas á E D y á E F, tendremos que

G B H=D E F (419)

prolongando B H hasta J

G B H+G B J=2 rectos;

pero como

G B J=A B B'

sustituyendo se tiene:

G B H+ A B B'=2 rectos

luego

D E F + A B B'=2 rectos

que es lo que se debia demostrar.

423.—Problemas de paralelas.—I.—*Por un punto* C *dado fuera de una recta* A B, *tirarle una paralela.*


Figura 72.

1ª *Construccion.* (fig. 72).—Desde el punto C como centro y con un radio cualquiera, trácese el arco de círculo D E: hágase en seguida centro en D, y con el mismo radio trácese el arco C A: tómese la cuerda A C y llévese de D á F; tirando la recta C F ésta será la paralela pedida.

En efecto, si se tira la recta C D resulta que los ángulos C D A y D C F son iguales, por tener por medida arcos iguales (380); pero como estos ángulos tienen la posicion de alternos internos, las rectas serán paralelas.

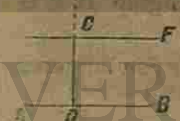
Figura 73.

2ª *Construccion.* (Fig. 73).—Desde el punto dado C bájese la perpendicular C D, y en seguida prolongando D C levántese en C la recta C F perpendicular á C D. La línea C F será la paralela pedida en razon de ser por construccion F C D=C D A y ser estos ángulos alternos internos.

II.—*Por un punto* A (fig. 74) *tomado fuera de una recta* B C *tirar otra que la encuentre bajo un ángulo dado* M.


Figura 74.

En un punto cualquiera, B por ejemplo, de la recta B C, constrúyase un ángulo D B C igual á M, y por el punto A tírese la recta A E paralela á B D. Esta recta llenará la condicion del problema, supuesto que el ángulo A E C=B por correspondientes, y B=M por construccion, luego A E C=M.

Estas construcciones, así como las de los problemas de perpendiculares, pueden facilitarse haciendo uso de la escuadra y del trasportador; pero, por regla general, son mucho más exactas las resoluciones que se efectúan por medio del compás.

III.—*Construir en un punto un ángulo igual á otro.*


Figura 75.

(Fig. 75). Sean A el ángulo, y D el punto dado. Por el punto D se tirarán las rectas D B y D C paralelas á los lados del ángulo, y estando formados estos ángulos por lados paralelos y teniendo sus vértices en el mismo sentido, serán iguales (419).

Si se prolongara el lado B D más allá de D, esta construccion daria el medio para encontrar el suplemento de un ángulo A.

TRIANGULOS.

424.—Definiciones.—Hemos dicho que se llama *triángulo rectilíneo una figura cerrada por tres líneas rectas.* Se consideran en los triángulos los valores relativos de los lados y de los ángulos.

Triángulo escaleno es el que tiene desiguales sus tres lados.

Triángulo isósceles es el que tiene dos lados iguales; y equilátero es el que tiene sus tres lados iguales.

Se llama *triángulo oblicuángulo al que no está formado por ningun ángulo recto, se dice que es obtusángulo cuando uno de los ángulos es obtuso, acutángulo cuando todos los ángulos son agudos; y rectángulo cuando uno de los ángulos es recto.*

En los triángulos rectángulos, el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa, y á los otros dos lados se les denomina catetos.

425.—*En todo triángulo* A B C (fig. 76), *un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos.*

Figura 71.

Si los ángulos son de diferente especie, como en la figura 71, tirando por el vértice B las rectas B G y B H respectivamente paralelas á E D y á E F, tendremos que

$$G\,B\,H = D\,E\,F \quad (419)$$

prolongando B H hasta J

$$G\,B\,H + G\,B\,J = 2 \text{ rectos;}$$

pero como

$$G\,B\,J = A\,B\,B'$$

sustituyendo se tiene:

$$G\,B\,H + A\,B\,B' = 2 \text{ rectos}$$

luego

$$D\,E\,F + A\,B\,B' = 2 \text{ rectos}$$

que es lo que se debia demostrar.

423.—Problemas de paralelas.—I.—*Por un punto* C *dado fuera de una recta* A B, *tirarle una paralela.*

Figura 72.

1ª *Construccion.* (fig. 72).—Desde el punto C como centro y con un radio cualquiera, trácese el arco de círculo D E: hágase en seguida centro en D, y con el mismo radio trácese el arco C A: tómese la cuerda A C y llévese de D á F; tirando la recta C F ésta será la paralela pedida.

En efecto, si se tira la recta C D resulta que los ángulos C D A y D C F son iguales, por tener por medida arcos iguales (380); pero como estos ángulos tienen la posicion de alternos internos, las rectas serán paralelas.

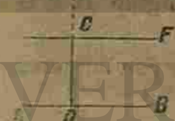

Figura 73.

2ª *Construccion.* (Fig. 73).—Desde el punto dado C bájese la perpendicular C D, y en seguida prolongando D C levántese en C la recta C F perpendicular á C D. La línea C F será la paralela pedida en razon de ser por construccion F C D = C D A y ser estos ángulos alternos internos.

II.—*Por un punto* A (fig. 74) *tomado fuera de una recta* B C *tirar otra que la encuentre bajo un ángulo dado* M.

Figura 74.

En un punto cualquiera, B por ejemplo, de la recta B C, constrúyase un ángulo D B C igual á M, y por el punto A tírese la recta A E paralela á B D. Esta recta llenará la condicion del problema, supuesto que el ángulo A E C = B por correspondientes, y B = M por construccion, luego A E C = M.

Estas construcciones, así como las de los problemas de perpendiculares, pueden facilitarse haciendo uso de la escuadra y del trasportador; pero, por regla general, son mucho más exactas las resoluciones que se efectúan por medio del compás.

III.—*Construir en un punto un ángulo igual á otro.*

Figura 75.

(Fig. 75). Sean A el ángulo, y D el punto dado. Por el punto D se tirarán las rectas D B y D C paralelas á los lados del ángulo, y estando formados estos ángulos por lados paralelos y teniendo sus vértices en el mismo sentido, serán iguales (419).

Si se prolongara el lado B D más allá de D, esta construccion daria el medio para encontrar el suplemento de un ángulo A.

TRIANGULOS.

424.—Definiciones.—Hemos dicho que se llama *triángulo rectilíneo una figura cerrada por tres líneas rectas.* Se consideran en los triángulos los valores relativos de los lados y de los ángulos.

Triángulo escaleno es el que tiene desiguales sus tres lados.

Triángulo isósceles es el que tiene dos lados iguales; y equilátero es el que tiene sus tres lados iguales.

Se llama *triángulo oblicuángulo al que no está formado por ningun ángulo recto,* se dice que es *obtusángulo cuando uno de los ángulos es obtuso, acutángulo cuando todos los ángulos son agudos; y rectángulo cuando uno de los ángulos es recto.*

En los triángulos rectángulos, el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa, y á los otros dos lados se les denomina catetos.

425.—*En todo triángulo* A B C (fig. 76), *un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos.*


Figura 76.

Siendo la recta A B el camino más corto entre dos puntos, se infiere que $AB < AC + CB$.

426.—*Un lado cualquiera* A B (fig. 76) *es mayor que la diferencia de los otros dos.*

En virtud del teorema anterior, se tiene:

$$AB + AC > BC$$

despejando á

$$AB > BC - AC$$

427.—*En todo triángulo isósceles son iguales los ángulos opuestos á los lados iguales.*


Figura 77.

En la figura 77 sea $AB = AC$, y vamos á demostrar que $B = C$. Desde el vértice A tiremos la recta A D de modo que divida el ángulo B A C en dos partes iguales, y tendremos que los triángulos B A D y D C A serán iguales por tener un ángulo igual $BAD = DAC$ por construccion, formado por lados iguales, A D, que es comun; y $AB = AC$ por lados del triángulo isósceles. Siendo los triángulos iguales, los ángulos opuestos al lado comun A D serán iguales (387), luego $B = C$.

De la igualdad de los triángulos se infiere ademas que $BD = DC$ y que $ADC = ADB$, luego.

La bisectriz del ángulo desigual de un triángulo isósceles: 1º *divide el lado opuesto en dos partes iguales, y* 2º *es perpendicular á este lado.*

Supuesto que en un triángulo á los lados iguales están opuestos ángulos iguales, se infiere que *todo triángulo equilátero será equiángulo y recíprocamente.*

428.—*La recta que une el vértice de un triángulo isósceles al medio del lado opuesto, es perpendicular á este lado.*

Los dos triángulos A D B y A D C tendrán A D comun, $AB = AC$ por lados del triángulo isósceles, y $BD = DC$ por el supuesto; luego los triángulos serán iguales (386), y siéndolo se tendrá que el ángulo $ADB = ADC$.

429.—*Si dos ángulos* A *y* B *de un triángulo* A C B (fig. 78) *son iguales entre sí, los lados opuestos* B C *y* A C, *tambien serán iguales.*


Figura 78.

Construyamos otro triángulo A' B' C' igual al primero, y en el que las letras acentuadas indican las mismas partes de las que no lo están. Siendo $A = B = B' = A'$ si sobrepusiéramos los triángulos haciendo coincidir el lado A' B' con A B poniendo B' sobre A y A' sobre B, resultaria que por ser iguales los ángulos B' C' coincidiria con A C y A' C' con B C, pero por construccion $B'C' = BC$ y $A'C' = AC$, luego $AC = BC$ que es lo que debia demostrarse.

430.—*En todo triángulo al mayor ángulo está opuesto el mayor lado.*


Figura 79.

Supongamos el ángulo B A C [fig. 79] mayor que C y vamos á demostrar que $BC > AB$.

Construyamos el ángulo $DAC = C$; el triángulo A D C será isósceles y se tiene

$$AD = DC$$

Por otra parte

$$AD + BD > AB$$

sustituyendo

$$DC + BD \text{ ó } BC > AB$$

que es lo que se debia demostrar.

431.—Recíprocamente *en todo triángulo* [fig. 79] *al mayor lado está opuesto el mayor ángulo.*

Si siendo $BC > AB$ el ángulo A no fuera mayor que C, tendria que ser igual ó menor; pero no puede ser igual, porque entónces (429) B C seria igual á A B; ni puede ser menor, porque conforme al teorema directo [430] se tendria $BC < AB$, lo que es contrario al supuesto luego si el ángulo A no puede ser igual ni menor que C, resulta que será mayor, que es lo que teniamos que demostrar.

432.—*Si en dos triángulos A B C y A' B' C'* [fig. 80] *un ángulo A es mayor que otro A', y ambos ángulos están formados por lados respectivamente iguales, $AC = A'C'$ y $BA = B'A'$, el lado B C opuesto al mayor ángulo será mayor que B' C' opuesto al menor ángulo.*

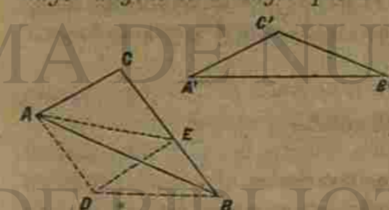
Figura 80.

Demostracion.—Si sobre el lado $AB = A'B'$ construimos el triángulo A D B igual á A' B' C' y en seguida dividimos por mitad el ángulo D A C con la recta A E, en razon de ser $CAB > BAD$ esta recta caerá dentro del ángulo mayor C A B. Reuniendo E D resultará el triángulo A E D igual á C A E por tener el ángulo $CAE = EAD$ por construccion, formado por lados iguales [385] A E comun y $AC = AD$, luego

$$C\,E = E\,D$$

agregando E B se tiene

$$C\,B = E\,D + E\,B$$

pero

$$E\,D + E\,B > D\,B$$

luego

$C\,B > D\,B$ ó que su igual C' B'

que es lo que se debia demostrar.

Recíprocamente si $B\,C > B'\,C'$ deberá ser el ángulo $C\,A\,B > C'\,A'\,B'$

En efecto, no puede ser $C\,A\,B = C'\,A'\,B'$ porque entónces los triángulos serian iguales [385], y siéndolo resultaria $B\,C = B'\,C'$ contra el supuesto.

Tampoco puede ser $C\,A\,B < C'\,A'\,B'$; porque conforme al teorema directo que acabamos de demostrar se tendrá $B'\,C' > B\,C$, lo que tambien es contra el supuesto.

Luego si C A B no puede ser igual ni menor que C' A' B' tendrá que ser mayor, que es lo que trataba de demostrarse.

433.—*La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos rectos.*

Figura 81.

Prolongado el lado B C [fig. 81] hasta D y tirando por el punto C la recta C E paralela á A B, tendremos que en virtud del teorema del número 390

$$A\,C\,B + A\,C\,E + E\,C\,D = 2 \text{ rectos.}$$

Sustituyendo en esta ecuacion por A C E su igual A por alternos internos, y en lugar de E C D el ángulo B, que es igual por correspondiente, resulta

$$A\,C\,B + A + B = 2 \text{ rectos.}$$

434.—De aquí se infieren los siguientes corolarios:

1° *El ángulo exterior* A C D *de un triángulo es igual á la suma de los dos interiores opuestos.*

Porque

$$A\,C\,D = A\,C\,E + E\,C\,D$$

sustituyendo

$$A\,C\,D = A + B$$

2° *El ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquiera de los opuestos.*

3° *Todo ángulo de un triángulo es suplemento de la suma de los otros dos.*

4° *Si dos ángulos de un triángulo son iguales á dos ángulos de otro triángulo, tambien será igual el tercer ángulo del primer triángulo al tercero del otro.*

435.—*Si desde un punto* D [fig. 82] *tomado en el interior de un triángulo se tiran rectas,* D B *y* D C *á las extremidades de un lado, el ángulo formado* B D C *será mayor que el ángulo* A *del triángulo opuesto á ese lado.*

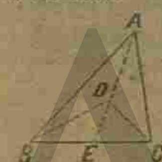

Figura 82.

Considerando el triángulo A D C, conforme al corolario segundo del párrafo anterior, se tiene:

$$E\,D\,C > D\,A\,C$$

en el triángulo A D B

$$E\,D\,B > D\,A\,B$$

sumando estas desigualdades

$$B\,D\,C > B\,A\,C$$

436.—*Un triángulo no puede tener á la vez dos ángulos obtusos, ni dos ángulos rectos, ni uno recto y otro obtuso.*

Porque en cualquiera de estos casos la suma de sus tres ángulos valdria más de dos ángulos rectos.

437.—*Los ángulos agudos de todo triángulo rectángulo son complementarios.*

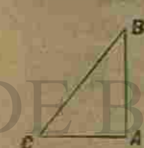

Figura 83.

En el triángulo A B C [fig. 83] rectángulo en A tenemos [433]

$$A + B + C = 2 \text{ rectos}$$

de donde

$$B + C = 2 \text{ rectos} - A$$

luego

$$B + C = 1 \text{ recto.}$$

438.—*Si desde un punto tomado sobre un lado de un ángulo se baja una perpendicular al otro lado, ésta caerá dentro del ángulo cuando sea agudo, y caerá fuera cuando sea obtuso.*


Figura 84.

Sea [fig. 84] el caso en que el ángulo A B C es agudo. Si la perpendicular bajada desde A no cayera dentro del ángulo, sino en el punto D, resultaria el triángulo A D B con el ángulo D recto y A B D obtuso, lo que es imposible [433].


Figura 85.

Sea [fig. 85] el ángulo E F G obtuso. Si la perpendicular E H pudiera caer dentro del ángulo, nos resultaria el triángulo E F H con el ángulo H recto, y F obtuso, lo que es un absurdo.

439.—De aquí se infiere que *la perpendicular bajada desde el vértice de un ángulo de un triángulo sobre el lado opuesto, caerá dentro del triángulo cuando los ángulos adyacentes* [fig. 86] *al lado sean agudos, y caerá fuera cuando* [fig. 87] *uno de los ángulos sea obtuso.*


Figura 86.

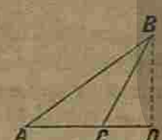
Figura 87.

440.—Hemos visto (384, 385 y 386) y demostrado que *dos triángulos son iguales: 1° cuando tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales: 2° cuando tienen un ángulo igual formado por lados iguales: 3° cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales; y ahora agregaremos el siguiente caso:*

4° *Dos triángulos son iguales cuando tienen iguales dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos.*


Figura 88.

Sean [fig. 88] los triángulos A B C y A' B' C' que tienen

$$A = A',\ B = B' \text{ y } B\,C = B'\,C'$$

sumando las dos primeras ecuaciones se tiene que

$$A + B = A' + B'$$

luego C que es suplemento de A + B, será igual á C' suplemento de A' + B' (434 3°). De esto se infiere que los triángulos serán iguales por tener un lado igual, B C=B' C' adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, B=B' y C=C'.

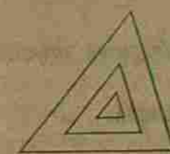
Figura 89.

441.—Como habrá podido observarse en los cuatro casos de igualdad de los triángulos, siempre entra como elemento uno de los lados, pues dos triángulos no son iguales cuando tienen sus tres ángulos iguales, como puede observarse en la figura 89 con los triángulos cuyos lados son paralelos.

442.—*Dos triángulos rectángulos son iguales: 1° cuando tienen iguales las hipotenusas y uno de los ángulos agudos: 2° cuando tienen iguales un cateto y uno de los ángulos agudos: y 3° cuando tienen iguales la hipotenusa y uno de los catetos.*

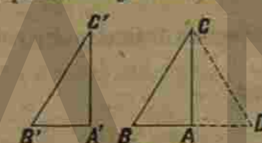
Figura 90.

Por ser los triángulos rectángulos, tendrán forzosamente el ángulo recto igual, así es que en el 1° y 2° caso los triángulos serán iguales por tener dos ángulos y un lado respectivamente iguales.

Para demostrar el tercer caso, sean los triángulos A B C y A' B' C' (fig. 90) que tienen B C=B' C' y A C=A' C'.

Si sobre A C construimos el triángulo C A D igual C' A' B', tendremos que por tener los ángulos C A B y C A D la posicion de adyacentes y valer juntos dos rectos (397) la recta A D será prolongacion de B A, y como las dos oblícuas B C y C D son iguales, se separarán igualmente del pié de la perpendicular C A (399) luego B A=A D.

Así, pues, el triángulo A B C será igual á A C D por tener A C comun, A B=A D y B C=C D; pero siendo A C D igual á A' C' B' por construccion, se infiere que el triángulo A B C será igual á A' B' C'.

443.—Problemas de triángulos.—I.—*Dados dos ángulos de un triángulo determinar el tercero.*

Sea A=29° 15', y B=75° 38' y vamos á determinar á C.

Tenemos (433)

$$A + B + C = 180°$$

despejando á

$$C = 180° - (A + B)$$

sustituyendo

$$C = 180° - (29° \, 15' + 75° \, 38')$$

lo que da

$$C = 75° \, 7'$$

II.—*Conocido en un triángulo isósceles uno de los ángulos iguales determinar el del vértice.*

Sea A=B el ángulo conocido, y C el ángulo que se busca.

Tendremos

$$A + B + C = 180°$$

por ser A=B

$$2\,A + C = 180°$$

de donde

$$C = 180° - 2\,A.$$

III.—*Dado el ángulo C del vértice de un triángulo isósceles determinar los de la base.*

Despejando A en la última ecuacion, se tiene

$$A = 90° - \frac{C}{2}$$

Si se conocen los valores numéricos, bastará sustituirlos en estas ecuaciones.

IV.—*Dado un ángulo C de un triángulo y los dos lados a y b que lo forman* (fig. 91) *construir el triángulo.*

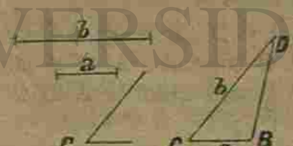

Figura 91.

Sobre la recta C B=a se construirá el ángulo C igual al dado y sobre el lado C D indefinido se tomará la parte C D=b; reuniendo el punto D con B, se tendrá el triángulo D B C que satisface las condiciones del problema.

El ángulo dado C debe ser menor que 180°.

V.—*Dado un lado a* (fig. 92) *y los dos ángulos adyacentes, construir un triángulo.*

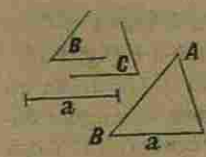

Figura 92.

Tómese B C=a; en cada uno de sus extremos constrúyanse los ángulos B y C iguales á los dados, y prolongando las rectas que los forman hasta su punto de interseccion A, se tendrá el triángulo pedido.

Para que el problema sea posible, se necesita tener $B + C < 180°$.

VI.—*Construir un triángulo conocidos sus tres lados a, b y c* (fig. 93).

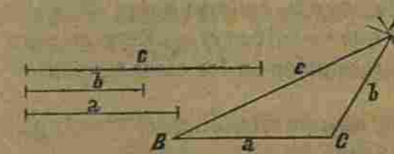

Figura 93.

Tómese B C=a y haciendo centro en B con un radio igual á c, trácese un arco de círculo, en seguida hágase centro en C y con un radio igual á b, trácese otro arco de círculo, y reuniendo el punto A de interseccion de los arcos con B y C, se tendrá el triángulo pedido.

Para que el problema sea posible, es necesario que el mayor de los lados sea menor que la suma de los otros dos.

VII.—*Construir un triángulo, dados dos ángulos A y B, y un lado a opuesto á uno de ellos.*

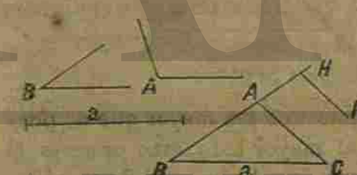

Figura 94.

Sea (fig. 94) a el lado opuesto al ángulo A. Tómese B C=a; en el punto B constrúyase el ángulo C B H =B; en un punto cualquiera de la recta B H constrúyase el ángulo H =A, y por el punto C tírese la recta C A paralela á H P. El triángulo B A C será el pedido.

Para que el problema sea posible, debe tenerse $A + B < 180°$.

Los problemas IV, V, VI y VII que corresponden á los cuatro casos de igualdad de los triángulos, no admiten más que una sola resolucion.

VIII.—*Construir un triángulo, dados dos lados y un ángulo opuesto á uno de ellos.*

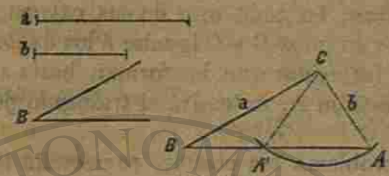

Figura 95.

Suponemos conocidos a y b y el ángulo B opuesto á *b* (fig. 95).

Tómese la recta B C=a; en un extremo constrúyase el ángulo dado B, y haciendo centro en C y con un radio igual á *b*, trácese un arco de círculo que cortará la recta B A en dos puntos A y A'; reuniendo C con A y con A', resulta que hay dos triángulos que satisfacen el problema: A B C y A' C B.

Cuando se conocen dos lados, y un ángulo opuesto á uno de ellos, por regla general hay dos triángulos que resuelven el problema; pero la cuestion no admitirá más que una resolucion en los casos siguientes:

1° Cuando el ángulo dado B sea obtuso; pues entónces el otro ángulo será forzosamente agudo (fig. 96) (436).

Figura 96.

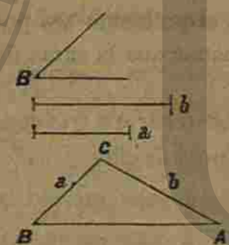

Figura 97.

2° Cuando siendo B agudo, el lado opuesto *b* sea mayor que *a*; pues entónces conforme al principio de que al mayor lado está opuesto el mayor ángulo, siendo b>a, deberá tenerse B>A; luego si B es agudo, tendrá que serlo A (fig. 97).

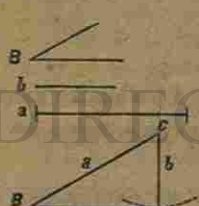

Figura 98.

3° Cuando siendo B agudo el arco no corta á la recta B A, sino que solo la toca en un punto. En este caso (fig. 98) el ángulo A será recto.

4° Cuando B sea recto, porque entónces A tendrá que ser agudo (436).

Por último, el problema será imposible cuando el lado dado *b* es menor que la perpendicular C A (fig. 98).

IX.—*Construir un triángulo isósceles, dado el ángulo C del vértice* (fig. 99) *y la base c.*

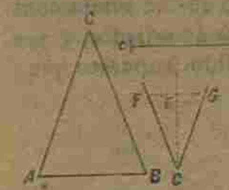

Figura 99.

Tómese la recta A B=c; divídase el ángulo C por la mitad con la línea C E; en un punto cualquiera E de esta recta, levántese la perpendicular F G, y construyendo en A y B ángulos iguales á F ó á G, se tendrá el triángulo A B C pedido.

X.—*Construir un triángulo rectángulo, dada la hipotenusa* a (fig. 100) *y un ángulo agudo B.*

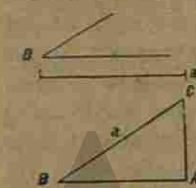

Figura 100.

Tómese la recta B C=a; en el punto B constrúyase un ángulo igual á B, y bajando desde C una perpendicular á la recta indefinida B A, se tendrá el triángulo B A C pedido.

XI.—*Construir un triángulo rectángulo, dado un cateto* b (fig. 101) *y el ángulo adyacente C.*

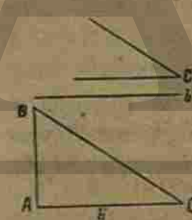

Figura 101.

Tómese C A=b; en el punto C constrúyase un ángulo igual al dado, y prolongando C A levántese en el punto A la perpendicular A B. El triángulo pedido será C B A.

XII.—*Determinar un ángulo igual á la suma de otros dos A y B, cuando esta suma es menor que dos rectos.*

Figura 102.

Sobre los extremos de una recta de longitud arbitraria A B (fig. 102) constrúyanse los ángulos A y B respectivamente iguales á los dados; complétese el triángulo A B C, y prolongando B C, el ángulo pedido será A C D; pues por ser externo del triángulo es igual á B+A (434).

XIII.—*Dados dos ángulos A y B* (fig. 102) *cuya suma es menor que dos ángulos rectos, construir un ángulo igual á su suplemento.*

Tómese una recta A B de longitud arbitraria; en sus extremos constrúyanse los ángulos A y B respectivamente iguales á los dados, y completando el triángulo, el ángulo A C B será el pedido, supuesto que

$$A+B+A\ C\ B=180^\circ$$

despejando á

$$A\ C\ B=180^\circ-(A+B).$$

En todos los problemas que hemos resuelto, podrán darse valores numéricos á los datos, debiendo emplearse en este caso la escala y el trasportador ademas del compás para su resolucion.

CUADRILATERO.

444.—*Se llama cuadrilátero una figura cerrada por cuatro líneas rectas* [fig. 103]. En los cuadriláteros se distinguen las siguientes figuras.

Se llama trapecio un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos [fig. 104].

Paralelógramo es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos (fig. 105).

Figura 103.

Figura 104.

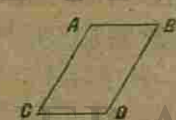

Figura 105.

Rombo es un paralelógramo que tiene los lados iguales entre sí (fig. 106) *y los ángulos diferentes.*

Rectángulo es un paralelógramo cuyos ángulos todos son rectos [fig. 107] *y los lados desiguales.*

Cuadrado es un paralelógramo que tiene iguales sus cuatro lados y sus cuatro ángulos [fig. 108].

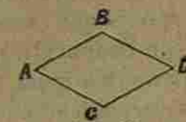

Figura 106.

Figura 107.

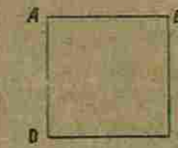

Figura 108.

Para que dos cuadriláteros sean iguales, es necesario que tengan iguales sus lados y sus ángulos, y que los ángulos iguales estén formados respectivamente por los lados iguales. En general, para probar que dos cuadriláteros son iguales, es preciso demostrar que sobreponiéndolos, coincidirian todos los extremos de los lados que los forman. Para construir un cuadrilátero, es indispensable conocer tres lados y dos ángulos, ó dos lados y tres ángulos; pero como los casos de igualdad de los cuadriláteros son algo complicados, generalmente lo que se hace es descomponerlos en dos triángulos, tanto para tratar de su igualdad como para construirlos conociendo algunos de sus elementos.

Las diagonales de un cuadrilátero generalmente son desiguales pero cada diagonal A C [fig. 103] es menor que la suma de los lados A D + D C ó que A B + B C con los que forma un triángulo, y mayor que su diferencia [426].

445.—*La suma de los ángulos de un cuadrilátero, es igual á cuatro rectos.*

Tirando la diagonal A C [fig. 103] el cuadrilátero quedará dividido en dos triángulos. Como la suma de los ángulos del cuadrilátero A+B+C+D es igual á la de los ángulos de que están formados los dos triángulos, y como la suma de los ángulos de cada triángulo vale dos rectos [433], resulta que los del cuadrilátero valdrán cuatro rectos.

446.—Las propiedades de los cuadriláteros son comunes á los paralelógramos, de los cuales pasamos á ocuparnos.

Dos paralelógramos son iguales cuando tienen un ángulo igual (fig. 109) *A=A' formado por lados respectivamente iguales, A B=A' B' y A C=A' C'.*

Por ser el ángulo A=A' si sobrepusiéramos las figuras haciendo coincidir los vértices de estos ángulos y el lado A C con A C', el lado A B

XIII.—*Dados dos ángulos A y B* (fig. 102) *cuya suma es menor que dos ángulos rectos, construir un ángulo igual á su suplemento.*

Tómese una recta A B de longitud arbitraria; en sus extremos construyanse los ángulos A y B respectivamente iguales á los dados, y completando el triángulo, el ángulo A C B será el pedido, supuesto que

$$A+B+A\,C\,B=180^\circ$$

despejando á

$$A\,C\,B=180^\circ-(A+B).$$

En todos los problemas que hemos resuelto, podrán darse valores numéricos á los datos, debiendo emplearse en este caso la escala y el trasportador ademas del compás para su resolucion.

CUADRILATERO.

444.—*Se llama cuadrilátero una figura cerrada por cuatro líneas rectas* [fig. 103]. En los cuadriláteros se distinguen las siguientes figuras.

Se llama trapecio un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos [fig. 104].

Paralelógramo es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos (fig. 105).

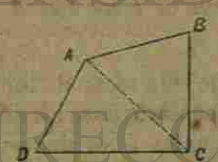

Figura 103.

Figura 104.

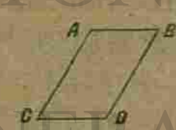

Figura 105.

Rombo es un paralelógramo que tiene los lados iguales entre sí (fig. 106) *y los ángulos diferentes.*

Rectángulo es un paralelógramo cuyos ángulos todos son rectos [fig. 107] *y los lados desiguales.*

Cuadrado es un paralelógramo que tiene iguales sus cuatro lados y sus cuatro ángulos [fig. 108].

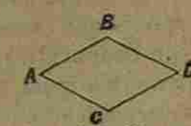

Figura 106.

Figura 107.

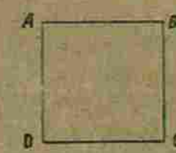

Figura 108.

Para que dos cuadriláteros sean iguales, es necesario que tengan iguales sus lados y sus ángulos, y que los ángulos iguales estén formados respectivamente por los lados iguales. En general, para probar que dos cuadriláteros son iguales, es preciso demostrar que sobreponiéndolos, coincidirian todos los extremos de los lados que los forman. Para construir un cuadrilátero, es indispensable conocer tres lados y dos ángulos, ó dos lados y tres ángulos; pero como los casos de igualdad de los cuadriláteros son algo complicados, generalmente lo que se hace es descomponerlos en dos triángulos, tanto para tratar de su igualdad como para construirlos conociendo algunos de sus elementos.

Las diagonales de un cuadrilátero generalmente son desiguales pero cada diagonal A C [fig. 103] es menor que la suma de los lados A D+D C ó que A B+B C con los que forma un triángulo, y mayor que su diferencia [426].

445.—*La suma de los ángulos de un cuadrilátero, es igual á cuatro rectos.*

Tirando la diagonal A C [fig. 103] el cuadrilátero quedará dividido en dos triángulos. Como la suma de los ángulos del cuadrilátero A+B+C+D es igual á la de los ángulos de que están formados los dos triángulos, y como la suma de los ángulos de cada triángulo vale dos rectos [433], resulta que los del cuadrilátero valdrán cuatro rectos.

446.—Las propiedades de los cuadriláteros son comunes á los paralelógramos, de los cuales pasamos á ocuparnos.

Dos paralelógramos son iguales cuando tienen un ángulo igual (fig. 109) *A=A' formado por lados respectivamente iguales, A B=A' B' y A C=A' C'.*

Por ser el ángulo A=A' si sobrepusiéramos las figuras haciendo coincidir los vértices de estos ángulos y el lado A C con A C', el lado A B tomaria la direccion A' B': por ser A C=A' C', el extremo C coincidiria con C': por ser A B=A' B', el punto B coincidiria con B'. Ahora bien: como por un punto no puede tirarse más de una paralela á otra recta, resulta que debiendo ser C D paralela á A B, cuya recta ha coincidido con A' B', tendrá que coincidir con C' D'; y por igual razon habiendo coincidido B con B', la paralela B D tendrá que coincidir con B' D', y en consecuencia, el punto de interseccion D coincidirá con D'; luego basta que dos paralelógramos tengan un ángulo igual formado por lados respectivamente iguales, para que sobreponiéndolos coincidan sus cuatro vértices.

Figura 109.

447.—*En todo paralelógramo los ángulos opuestos son iguales.*

El ángulo C (fig. 109) y el ángulo B, que son opuestos, serán iguales por estar formados por lados paralelos y tener sus vértices vueltos en sentido contrario [420], y por la misma razon A será igual á D.

448.—Para facilitar á los alumnos las demostraciones de los siguientes teoremas, anticiparemos la marcha que en ellas vamos á seguir: 1° buscaremos los triángulos formados por las líneas que son objeto del teorema: 2° demostraremos que estos triángulos son iguales por estar comprendidos en uno de los cuatro casos de igualdad [440], y 3° fundándonos en que en triángulos iguales á ángulos iguales, están opuestos lados iguales y recíprocamente [387] deduciremos la conclusion del teorema.

449.—*En todo paralelógramo los lados opuestos son iguales.*

Tirando la diagonal A C [fig. 110] resultarán los triángulos A C B y A C D, que son iguales [384] por tener el lado A C comun, A C B= D A C y B A C=A C D, por ser la figura paralelógramo y tener la posicion de alternos internos. Siendo los triángulos iguales, los lados opuestos á ángulos iguales serán iguales, luego A B=D C y B C=D A, que es lo que se debia demostrar.

450.—*Si dos lados de un cuadrilátero son iguales y paralelos, la figura sera paralelógramo.*

Figura 110.

Sean [fig. 110] A D y B C iguales y paralelos, y vamos á demostrar que los otros dos lados A B y D C serán tambien paralelos.

Tirando la diagonal A C, el triángulo A C B será igual á A C D [385], por tener el ángulo

A C B=C A D, por alternos internos, formados por lados respectivamente iguales, A C comun y B C=A D. Siendo los triángulos iguales, á los lados B C y A D estarán opuestos ángulos iguales, B A C= A C D; pero como éstos tienen la posicion de alternos internos, se infiere que serán paralelos los lados A B y C D.

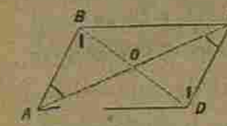

Figura 111.

451.—*Las diagonales de un paralelógramo se cortan en partes mútuamente iguales.*

De que los lados opuestos son iguales y paralelos, vamos á inferir [fig 111] que B O=O D y A O=O C. Los triángulos A O B y D O C son iguales [384] por tener el lado A B=D C adyacente á los ángulos O A B=O C D y O B A=O D C. Se tiene A B=D C por lados opuestos de paralelógramo, y los ángulos indicados son iguales por alternos internos. Siendo los triángulos iguales por ser lados opuestos á ángulos iguales, resulta que B O=O D y A O=O C.

452.—Las recíprocas de las cuatro últimas proposiciones son ciertas, y pueden demostrarse por reduccion al absurdo, ó de un modo semejante al empleado para demostrar las directas.

Así, pues, un cuadrilátero será paralelógramo: 1° siempre que sean iguales los ángulos ó los lados opuestos: 2° siempre que dos lados opuestos sean iguales y paralelos; y 3° cuando las diagonales se corten en partes mútuamente iguales.

453.—*La diagonal mayor de un paralelógramo está opuesta al mayor ángulo* [fig. 111].

Sea A C>B D, y vamos á demostrar que el ángulo A D C>B C D. Si consideramos los triángulos A C D y B D C, desde luego advertimos que los ángulos A D C y B C D están formados por el lado D C comun y A D=B C; luego conforme al teorema recíproco demostrado en el número 432, debe ser el ángulo A D C>B C D por estar opuesto el ángulo A D C al lado A C, que es mayor que B D.

454.—Siendo *el rombo un paralelógramo cuyos cuatro lados son iguales entre sí*, todas las propiedades de los paralelógramos son comunes á los rombos, resultando además de la igualdad de los lados, que:

En todo rombo las diagonales son perpendiculares entre sí.

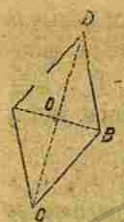

Figura 112.

Tirando las diagonales A B y C D [fig. 112], resultan los triángulos A O D y B O D que son iguales [386] por tener O D comun, A D=B D por lados del rombo, y A O=O B por partes de la diagonal (451). Siendo iguales los triángulos, los ángulos opuestos á A D y B D serán iguales, luego A O D=D O B, y por tanto D C será perpendicular á A B.

455.—Como *el rectángulo es un paralelógramo cuyos cuatro ángulos son rectos,* naturalmente participa de todas las propiedades del paralelógramo; pero además, demostraremos que:

Las diagonales de un rectángulo son iguales.

Figura 113.

Los triángulos rectángulos (fig. 113) A D C y D A B son iguales (385) por tener el ángulo A D C=D A B formado por A D, que es comun, y D C=A B como lados opuestos de paralelógramo. Siendo iguales estos triángulos, sus hipotenusas tambien lo serán, y se tendrá que A C=D B, que es lo que se debia demostrar.

456.—Siendo el *cuadrado un paralelógramo* (fig. 108) *cuyos lados y ángulos son iguales,* es una figura que tiene las propiedades del cuadrilátero, del paralelógramo, del rombo y del rectángulo.

457.—En resúmen en el *cuadrilátero* la suma de los 4 ángulos vale 4 rectos, sus lados, sus ángulos y sus diagonales son desiguales, así como las partes en que se cortan estas últimas.

En el *paralelógramo* los lados opuestos son paralelos, los ángulos y los lados opuestos son iguales; las diagonales son desiguales pero las partes en que se cortan son mútuamente iguales.

El *rombo,* además de las propiedades del paralelógramo, tiene la de que todos sus lados son iguales, y la de que las diagonales se cortan en ángulo recto.

El *rectángulo* tiene las propiedades del paralelógramo, y además, son iguales sus diagonales y ángulos.

El *cuadrado* tiene iguales los lados, los ángulos, las diagonales, las partes de éstas y los ángulos que forman.

Las recíprocas de todas las proposiciones establecidas desde el número 453, son ciertas y pueden demostrarse siguiendo el mismo método que para las directas ó por absurdo.

458.—Hemos dicho que *trapecio es un cuadrilátero, en el que solo dos de sus lados son paralelos.* Generalmente se llaman bases los lados paralelos.

TEOREMA.—*La recta E F* (fig. 114) *que une los medios de los lados, no paralelos de un trapecio, es paralela á las bases.*

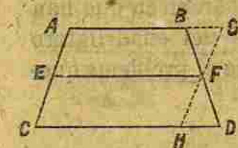

Figura 114.

Tenemos A B paralela á C D, A E=E C y B F=F D, y vamos á demostrar que E F es paralela á A B y á C D. Por el punto F tiremos H G paralela á A C, de lo que resultará que siendo A G H C paralelógramo G H=C A (449).

Los triángulos B F G y F D H son iguales (384) por tener B F=F D adyacente á los ángulos B F G=D F H por opuestos al vértice y F B G=F D H por alternos internos. De la igualdad de los triángulos, resulta F G=F H, ó F G$=\frac{GH}{2}=\frac{CA}{2}$; luego F G=E A, y como además de ser iguales estas rectas son paralelas, conforme á lo demostrado en el número 450, la figura A E F G será paralelógramo, por lo que E F será paralela á A B y (411) á C D.

459.—*La recta E F* (fig. 114) *tirada á distancias iguales de las bases, es igual á su semisuma.*

Tenemos

$$AB = AG - BG = EF - BG$$

$$CD = CH + HD = EF + BG$$

sumando estas ecuaciones

$$AB + CD = 2\ EF$$

Despejando á

$$EF = \frac{AB + CD}{2}$$

que es lo que se debia demostrar.

460.—PROBLEMAS DE CUADRILÁTEROS.—I.—*Construir un cuadrilátero, dada una diagonal* d *y la magnitud y órden de los cuatro lados* a, b, c *y* e (fig. 115):

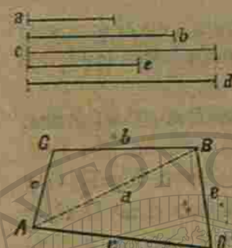
Figura 115.

Tómese A B=d, y haciendo centro en sus extremos y con los rádios a y b, c y e, trácense los arcos de círculo que se cortarán en C y en D. Reuniendo estos puntos con A y con B, se tendrá el cuadrilátero pedido. Debemos hacer notar que es preciso conocer el órden en que han de quedar colocados los lados del cuadrilátero respecto á la diagonal, para que el problema quede bien determinado.

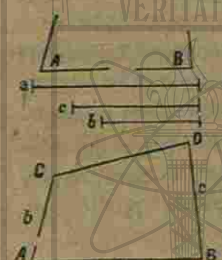
Figura 116.

II.—*Construir un cuadrilátero en el que se conoce un lado* a *y los dos ángulos y lados adyacentes: A y B,* b *y* c (fig. 116).

Sobre A B=a constrúyanse los ángulos A y B respectivamente iguales á los lados. Tómese A C=b y B D=c, y reuniendo los extremos C y D se tendrá el cuadrilátero pedido.

III.—*Construir un paralelógramo, dados dos lados* a, b *y el ángulo C que forman* [fig. 117].

Tómese C D=a, constrúyase en el extremo C un ángulo igual al dado; tómese B C=b, y tirando por los puntos B y D paralelas á los lados D C y B C, se tendrá el paralelógramo pedido.

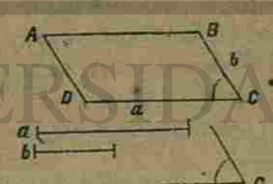
Figura 117.


Figura 118.

IV.—*Construir un rombo, dados un lado* a *y un ángulo A* [fig. 118].

Sobre A B=a, constrúyase el ángulo A: tómese A C=A B y por los puntos B y C tírense las rectas B D y C D paralelas á los lados opuestos. A B D C será el rombo pedido.

V.—*Construir un rombo, conocidas sus dos diagonales* a *y* b (fig. 119)

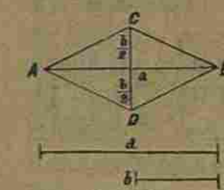
Figura 119.

Tómese A B=a; levántese por su medio una perpendicular llevando la mitad de b hacia arriba hasta C, y la otra mitad hácia abajo hasta D, y reuniendo estos puntos con A y con B, se tendrá el rombo pedido.

VI.—*Construir un rectángulo dados dos lados* a *y* b (fig. 120).

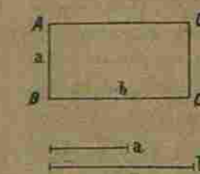
Figura 120.

Tómese A B=a, prolónguese esta línea y levántese por B la perpendicular B C=b, y tirando por C y por A las paralelas C D y A D á los lados opuestos, se tendrá el rectángulo pedido.

VII.—*Construir un rectángulo, dado un lado y una diagonal.*

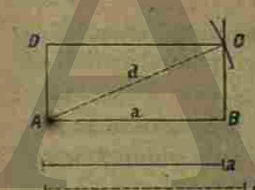
Figura 121.

Sean *a* el lado conocido y *d* la diagonal (fig. 121). Tómese A B=a, en el punto B constrúyase un ángulo recto, y haciendo centro en A y con un radio igual á d, trácese un arco de círculo, y por el punto C, donde corta á la perpendicular tírese una recta paralela á A B, y por A otra paralela á B C, con lo que quedará formado el rectángulo A B C D.

VIII.—*Construir un cuadrado conociendo uno de sus lados* a (figura 122).

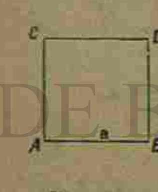
Figura 122.

Tómese A B=a, levántense las perpendiculares A C y B D tambien iguales á a, y reuniendo C y D se tendrá el cuadrado pedido.

IX.—*Construir un trapecio, conocidas las dos bases* b *y* b' *uno de los lados* a *y el ángulo* A *que este lado forma con una de las bases* b [figura 123].

Figura 123.

Tómese A B=b; constrúyase en A un ángulo igual al lado; tómese A C=a: tírese C D=b' paralela á A B, y reuniendo B y D se tendrá el trapecio pedido.

POLIGONOS.

461.—Definiciones.—Se llama *polígono toda figura plana cerrada por más de cuatro líneas rectas.*

Si el polígono tiene *cinco* lados, se le llama *pentágono;* si tiene *seis, exágono;* si tiene *siete, heptágono;* si es de *ocho, octágono;* de *nueve, eneágono;* de *diez, decágono;* de *doce, dodecágono,* y de *quince, pentedecágono.*

Los polígonos pueden ser *convexos* ó *cóncavos.* Son *convexos* aquellos que tienen todos sus ángulos *salientes* (fig. 124), y *cóncavos* los que tienen uno ó varios ángulos *entrantes* (fig. 125).

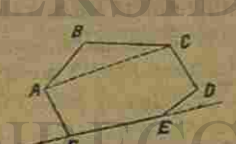

Figura 124.

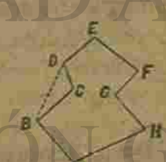

Figura 125.

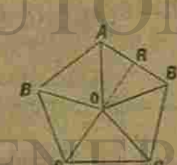

Figura 126.

Polígonos *regulares son los que tienen iguales sus lados y sus ángulos, é irregulares las que los tienen desiguales.*

Se llama *diagonal* la recta como A C [fig. 124] que va de un vértice á otro; *perímetro es la línea quebrada formada por la reunion de todos los lados que cierran la figura.*

En los polígonos regulares [fig. 126] se llama *radio oblícuo la recta que va del punto O llamado centro, á uno de los vértices.* El punto O se denomina centro por estar á igual distancia de todos los ángulos. Se llama *apotema ó radio recto la línea que va del centro á la mitad de un lado.*

En lo que sigue, solo consideraremos los polígonos *convexos;* éstos se distinguen de los *cóncavos* en que no tienen ángulos entrantes; en que los vértices de los ángulos están colocados en distintas regiones de cualquiera de las diagonales que se tire, esto es, unos como B (fig. 124), estarán arriba, y otros abajo de la diagonal A C como F, E, etc.; y en que si se prolonga cualquiera de los lados, F E por ejemplo, todos los vértices quedan en la misma region, la superior en el caso que tratamos. En los polígonos cóncavos (fig. 125) hay siempre alguna diagonal, como B D, respecto de la que todos los ángulos quedan en la misma region; y hay tambien algun lado, como C D, respecto del que prolongándolo vienen á quedar unos vértices de un lado y otros del contrario.

462.—En los polígonos regulares se llama ángulo del centro (figura 126) el formado por dos radios oblícuos O A y O B que son contiguos.

La suma de todos los ángulos del centro vale cuatro rectos [391] y como más adelante veremos que todos los triángulos A O B, B O C, C O D, etc., son iguales, resulta que cada uno de los ángulos del centro vale cuatro rectos divididos por el número de lados.

463.—*La suma de todos los ángulos interiores de un polígono, vale tantas veces dos ángulos rectos, como lados tiene ménos dos.*

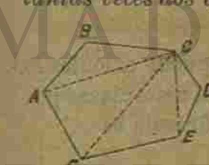

Figura 127.

[Fig. 127]. Si desde uno cualquiera de sus vértices, C por ejemplo, se tiran diagonales, como no pueden tirarse á los dos vértices B y D contiguos, pues se confundirian con los lados C B y C D, resulta que el *polígono quedará dividido en tantos triángulos como lados tiene ménos dos.*

Por otra parte, la suma de los ángulos interiores del polígono, es igual á la de los ángulos de los triángulos en que se ha dividido el polígono; y como los ángulos de cada triángulo valen dos rectos, y hay tantos triángulos como lados tiene el polígono ménos dos; resulta que los ángulos interiores del polígono valen tantas veces dos rectos como lados tiene ménos dos.

Si se designa por S la suma de los ángulos interiores de un polígono y por n el número de sus lados, conforme al teorema que acabamos de demostrar, se tiene:

$$S = 2\,r\,[n-2]$$

ó

$$S = 2\,r\,n - 4\,r$$

r representa un ángulo recto ó 90° en estas fórmulas.

464.—*Si se prolongan en la misma direccion todos los lados de un polígono convexo A, B, C, D....* (fig. 128) *la suma de los ángulos exteriores, cualquiera que sea el número de lados, es igual á cuatro rectos.*

Figura 128.

La suma de los dos ángulos formados en el vértice A, de los que uno es exterior y otro interior del polígono, valen juntos dos rectos [389], esto es, B A G + B A F=2 rectos; igualmente los ángulos exterior é interior del vértice B, esto es, C B H + C B A=2 rectos; otro tanto sucede con los ángulos formados en C, en D, en E y en F. Así, pues, la suma total de los ángulos exteriores é interiores de un polígono, vale tantas veces dos rectos como vértices ó lados hay. Si representamos por e la suma de los ángulos exteriores, y por i la de los interiores, tendremos:

$$e + i = n.\ 2 \text{ rectos}$$

despejando á $\qquad e = n.\ 2 \text{ rectos} - i$

pero la suma de los ángulos interiores $i = 2$ rectos $[n-2]$; (463) luego sustituyendo $\quad e = n.\ 2 \text{ rectos} - 2 \text{ rectos } [n-2]$

$$e = n.\ 2 \text{ rectos} - n.\ 2 \text{ rectos} + 4 \text{ rectos}.$$

de donde $\qquad e = 4$ rectos,

que es lo que se debia demostrar.

465.—Por medio de la fórmula del número 463, se puede calcular lo que vale el ángulo de un polígono regular; pues bastará reemplazar por n el número de lados del polígono, y por r, 90°. La fórmula es:

$$S = 2\,r\,[n-2]$$

Para el triángulo, siendo $n = 3 \qquad S = 180°$

de donde un ángulo $= \frac{180°}{3} = 60°$

Para el cuadrado $S = 180° \times 2 = 360°$

un ángulo $= \frac{360°}{4} = 90°$

Para el pentágono $S = 180° \times 3 = 540°$

un ángulo $= \frac{540°}{5} = 108°$

y como en general $A = \frac{2\,r\,(n-2)}{n} = 2 \text{ rectos} - \frac{4 \text{ rectos}}{n}$, desde que $n > 4$, el término $\frac{4 \text{ rectos}}{n}$ es menor que un recto, resulta que los ángulos de un polígono regular de más de cuatro lados, forzosamente son obtusos.

466.—Para que dos polígonos sean iguales, es preciso que tengan iguales sus lados y los ángulos adyacentes á cada lado dispuestos en el mismo órden. Cuando se descomponen en triángulos, bien sea por medio de diagonales ó por rectas tiradas desde un punto interior, dos polígonos serán iguales cuando estén compuestos del mismo número de triángulos iguales, y dispuestos ó reunidos de un modo semejante; pues entónces podrá probarse que si se sobrepusieran los dos polígonos, coincidirian en todos sus puntos, por ser iguales los triángulos de que están formados.

467.—Problemas de polígonos.—I.—*Determinar la suma de todos los ángulos de un polígono de 7 lados, y de otro de 11.*

La fórmula correspondiente es $\quad S = 2\,r\,(n-2)$

Sustituyendo para el heptágono $\quad S = 2.90° \times 5 = 900°$

Id. para el polígono de 11 lados $\quad S = 2.90° \times 9 = 1620°$

II.—*Determinar lo que vale un ángulo del polígono regular de 6 y del de 8 lados.*

Determinaremos primero lo que vale la suma de todos los ángulos, y dividiéndola por el número de lados obtendremos el valor de un solo ángulo.

Llamándolo A, tendremos:

$$A = \frac{S}{n} = \frac{2\,r\,(n-2)}{n}$$

Para el exágono sustituyendo $A = \frac{180° \times 4}{6} = 120°$

Para el octágono $\quad$,, $\quad A = \frac{180° \times 6}{8} = 135°$

III.—*Determinar el valor de un ángulo externo de un polígono regular de 5 lados.*

La suma de todos los ángulos externos vale 4 rectos (464), ó 360°, y como estos ángulos son iguales, uno valdrá $\frac{360}{5}=72°$

IV.—*Construir un polígono igual á otro dado, A B C D E F* (figura 129).

Figura 129.

A este fin, desde uno cualquiera de los vértices, A, por ejemplo, se tiran diagonales á todos los demás, con lo que quedará dividido en triángulos. Tómese A' B'= A B, y como se conocen los tres lados del triángulo A B C, se construirá el triángulo igual A' B' C'. Sobre A' C' se construirá un triángulo A' C' D' igual á A C D, cuyos tres lados se conocen, y así sucesivamente se construirán los demás triángulos hasta completar el polígono A' B' C' D' E' F', que será igual al dado por estar formado de triángulos iguales dispuestos en el mismo órden.

V.—*Construir un polígono regular de seis lados, conocida la longitud de uno de los lados:* a (fig. 130).

Figura 130.

Comenzaremos por determinar el valor de uno de los ángulos por la fórmula

$$A=\frac{S}{n}=\frac{2\,r\,(n-2)}{n}=\frac{180°\times 4}{6}=120°$$

En seguida tomaremos A B=a; en sus dos extremos construiremos ángulos de 120° por medio del trasportador; tomaremos A C y B D iguales á a; en C y D construiremos ángulos de 120°; tomaremos C F y D E iguales á a; y tirando F E tendremos el exágono regular pedido. E F debe como comprobacion resultar igual á a.

CIRCUNFERENCIA DEL CIRCULO.

Líneas rectas consideradas en el círculo

468.—Hemos dicho que *se llama circunferencia de círculo una curva cerrada cuyos puntos todos están en un plano á igual distancia del centro*; y que *círculo es la porcion de superficie comprendida dentro de la circunferencia.*

En el número 369 igualmente hemos dado las definiciones de *radio, diámetro, arco, cuerda, sector, segmento, sagita y cuadrante;* por lo que ahora solo repetiremos que *se llama secante una recta A B, que cortando la circunferencia en dos puntos* [fig. 131], *tiene parte dentro y parte fuera del círculo;* y que se *entiende por tangente una recta que solo toca á la circunferencia, en un punto M como D H.*

Figura 131.

469.—*Dos círculos descritos con el mismo radio son iguales;* porque si se sobrepusieran haciendo coincidir los centros, por ser iguales los radios, todos los puntos de una de las circunferencias coincidirian con los de la otra.

Así, pues, para probar que dos círculos coinciden al sobreponerlos, bastará demostrar que coinciden los centros y un punto de cada una de las circunferencias.

Para que dos arcos coincidan en todos sus puntos, bastará igualmente que puedan coincidir los centros de los círculos á que pertenecen, y sus puntos extremos.

De la definicion de circunferencia resulta que *todos los radios de un mismo círculo son iguales,* y como todo diámetro es igual á dos radios, es claro que *todos los diámetros de un mismo círculo ó de círculos iguales, son iguales.*

Ya demostramos en el número 373, que *el diámetro es la mayor de todas las cuerdas, y que divide la circunferencia en dos partes iguales.*

De esto resulta que *toda cuerda que no es diámetro subtende dos arcos desiguales;* pero cuando no se expresa lo contrario, se entiende que se trata del arco menor de los dos que subtende la cuerda.

470.—*Una recta A B* [fig. 132] *no puede cortar la circunferencia del círculo en más de dos puntos.*

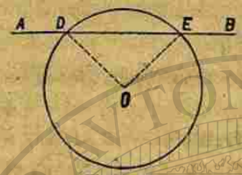

Figura 132.

Si la recta A B pudiera cortar ó tocar á la circunferencia en tres ó más puntos, tirando desde el centro rectas como O D, O E, todas estas rectas serian radios, y por tanto iguales; pero esto no es posible, porque como hemos demostrado en el número 402, desde un punto O no se pueden tirar á una línea B A, más que dos rectas iguales, que son las oblícuas que se separan igualmente del pié de la perpendicular.

471.—En el número 380 demostramos que en un mismo círculo ó en círculos iguales á arcos iguales, corresponden cuerdas iguales y recíprocamente, y ahora demostraremos el siguiente

Teorema.—*En un mismo círculo, ó en círculos iguales al arco mayor corresponde la cuerda mayor y recíprocamente, con tal que los arcos sean menores que una semicircunferencia.*

Figura 133.

Sea figura 133 el arco A B > C D y vamos á demostrar que la cuerda A B > C D. Tirando radios á los puntos A, B, C y D, resultan dos triángulos A O B y O C D, en los que el ángulo A O B > C O D por ser el arco A B, medida del primero, mayor que C D; pero los lados que forman el ángulo A O B son iguales á los que forman el ángulo C O D, luego conforme al teorema del número 432, tendremos el lado A B > C D, que es lo que se debia demostrar. Si los círculos fueran iguales, bastaria comenzar por sobreponerlos, y en seguida se daria la anterior demostracion.

472.—*Dos cuerdas iguales de un mismo círculo están equidistantes del centro.*

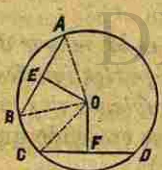

Figura 134

Como la distancia de un punto á una recta se mide por la perpendicular bajada del punto á la recta, siendo A B=C D [fig. 134], tendremos que demostrar que O E, perpendicular á A B, será igual á O F, perpendicular á C D. Tirando O B y O C resultan dos triángulos O B E y O C F, que serán iguales [442—3°] por

ser rectángulos y tener iguales las hipotenusas por radios y el cateto B E=C F, por ser mitades de cuerdas iguales A B=C D (427).

Siendo los triángulos iguales, se infiere que el lado O E será igual á O F.

473.—*De dos cuerdas desiguales la mayor está más cerca del centro.*

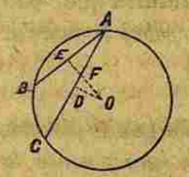

Figura 135.

Figura 135. Sea A C > A B, y vamos á probar que O D, perpendicular á A C, es menor que O F, perpendicular á A B. Tenemos que por ser la cuerda A B < A C el arco A B será menor que A C y la cuerda A B quedará dentro del arco A B C. Además O D < O E, porque la perpendicular es menor que cualquiera oblícua; y como O E < O F se infiere que O D < O F. Recíprocamente la cuerda ménos distante del centro será la mayor, supuesto que no puede ser igual ni menor que la que dista más.

474.—*De todas las cuerdas tiradas desde un punto interior A, del círculo, la mayor es la B C* (fig. 136) *que pasa por el centro, y la menor la D E, perpendicular al diámetro.*

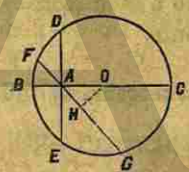

Figura 136.

B C es mayor que cualquiera otra cuerda, porque el diámetro es la mayor de todas las cuerdas. Ahora, para demostrar que D E es menor que otra cualquiera como F G, bajemos O H, perpendicular á F G y tendremos que siendo O H perpendicular y O A oblícua con respecto á F G O H < A O; luego por estar más cerca del centro F G que D E (473) será: F G > D E.

475.—*Toda recta C D* (fig. 137), *perpendicular á la mitad de una cuerda A B, pasará por el centro del círculo y por el medio del arco que la cuerda subtende*

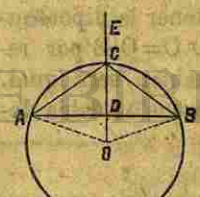

Figura 137.

Siendo por el supuesto C D perpendicular á la mitad de A B, debe pasar por todos los puntos equidistantes de A y de B (403—1°) y como el centro es uno de ellos, resulta que forzosamente pasará por el centro. El punto C, donde la misma perpendicular corta la circunferencia por igual razon estará equidistante de A y de B; luego la cuerda A C=C B y siendo iguales las cuerdas lo serán los arcos que cada una de ellas subtende.

476.—Supuesto que dos puntos fijan la posicion de una recta, y que *la mitad de la cuerda, el centro y el medio del arco están en la misma recta, resulta que siempre que una recta pase por dos de estos puntos, forzosamente pasará por el tercero.*

477.—Como desde un punto no se puede bajar más que una sola perpendicular á una recta (396), de lo que precede resulta que *toda perpendicular bajada del centro ó del medio de un arco sobre la cuerda, caerá en la mitad de dicha cuerda.*

478.—*El radio tirado al punto de contacto A* (fig. 138) *de la circunferencia con la tangente es perpendicular á esta; y recíprocamente la tangente será perpendicular al radio tirado al punto de contacto.*

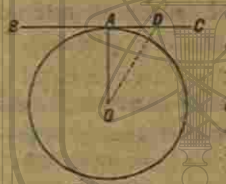
Figura 138.

Siendo B C tangente al círculo, no lo tocará más que en un solo punto A; luego si desde el centro tiramos varias rectas á la línea B C, cualquiera otra, como O D, que no sea el radio O A, deberá tener parte dentro y parte fuera de la circunferencia, por lo que A O < O D; y como (398) la perpendicular es la menor distancia de un punto á una recta, se infiere que el radio O A será perpendicular á la tangente.

La recíproca de esta proposicion está fundada en el teorema del número 394.

479.—*Si desde un punto A exterior á un círculo se tiran dos tangentes, las porciones de estas A B y A C* (fig. 139) *comprendidas entre el punto comun A y los de contacto serán iguales.*


Figura 139.

Tirando la recta O A y los radios O C y O B, resultarán dos triángulos A O B y A O C, que serán iguales (442—3°) por ser rectángulos, uno en B y otro en C (478); por tener la hipotenusa A O comun, y un cateto O C=O B por radios; luego el tercer lado tambien será igual, esto es, A B=A C, que es lo que se debia demostrar.

480.—*Los arcos A B y C D* (fig. 140) *de un mismo círculo comprendidos entre paralelas son iguales.*

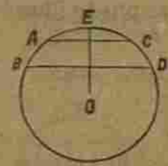
Figura 140.

Si desde el centro O tiramos una recta O E perpendicular á la cuerda B D, lo será tambien á A C [409] por ser ambas paralelas. Además esta perpendicular bajada desde el centro pasará por la mitad de la cuerda y por el medio del arco que cada una subtende [477 y 476], luego

$$B E = E D$$

y

$$A E = E C$$

restando la segunda ecuacion de la primera, se tiene

$$A B = C D$$

que es lo que se debia demostrar.

481.—*Los arcos A B y B C* [fig. 141] *comprendidos entre una cuerda y una tangente que le es paralela, son iguales.*


Figura 141.

Si desde el centro tiramos el radio O B, este será perpendicular á la tangente [478] y á la cuerda, por ser estas paralelas. Además, por ser perpendicular el radio á la cuerda [476] tendremos A B=B C.

482.—Problemas de líneas en el círculo.—I.—*Dados dos arcos de un mismo círculo ó de círculos iguales, determinar la relacion numérica de sus longitudes.*

No pudiendo hacerse con el compás la sobreposicion de los arcos, como lo hemos hecho [363] con las rectas, la supliremos con la de las cuerdas que siendo iguales corresponden á arcos iguales [fig 142]. Llevaremos la cuerda del arco menor C D, dos veces sobre A B, de A á E; y el arco A E estará compuesto de dos partes iguales á C D y una resta, por lo que


Figura 142.

$$A B = 2 C D + E B$$

Se tomará la cuerda de la resta E B para llevarla de C á F sobre C D. Efectuado esto una vez, queda por resta el arco F D, de donde

$$C D = E B + F D$$

Finalmente, como la cuerda de la segunda resta F D se puede llevar cuatro veces sobre la anterior E B, se tendrá:

$$E\,B=4\,F\,D$$

Sustituyendo este valor en el penúltimo, y luego ese en el anterior, etc., se tiene sucesivamente:

$$E\,B=4\,F\,D,\ C\,D=5\,F\,D,\ A\,B=14\,F\,D.$$

La comun medida de los arcos A B y C D es F D que, segun se ha visto, está contenida 14 veces en el primero y 5 en el segundo.

Cuando se encuentra una resta que está contenida un número cabal de veces en la anterior, la operacion queda concluida y los arcos serán *conmensurables;* pero si despues de llevar una resta sobre otra una ó más veces, se llega á obtener una, que por ser muy pequeña, ó no influye en el resultado práctico de la cuestion propuesta, ó no puede apreciarse por los sentidos, se desprecia, y la relacion hallada solo es aproximada. Cuando no hay números que expresen con exactitud la relacion de la longitud de los arcos, se dice que son *inconmensurables.*

II.—*Sobre una recta dada A B* [fig. 143] *como diámetro, trazar un círculo.*

Figura 143.

Haciendo centro en los extremos de la recta, y con un rádio A E mayor que su mitad se describen arcos que se corten arriba y abajo de ella en los puntos E y F: la recta que pasa por estos puntos determina en O la mitad de A B [404]. Haciendo centro en O y con el rádio O B, se trazará el círculo pedido.

III.—*Dado el punto D* [fig. 144] *interior de un círculo, determinar la menor cuerda que por él pueda tirarse.*

Figura 144.

Tirando por D el diámetro C F, y levantando en D una perpendicular al diámetro, se tendrá la cuerda pedida [474].

IV.—*Dividir un arco de círculo A B* (fig. 145) *en dos partes iguales.*

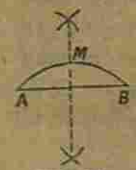

Figura 145.

Tírese la cuerda A B, y levantando por su medio una perpendicular, ésta determinará en M la mitad del arco dado (475).

Del mismo modo se dividirá A M en otras dos partes iguales, y así se concibe cómo puede dividirse un arco no solo en 2, sino tambien 4, 8, etc., partes iguales.

V.—*Dado el arco A B, determinar otro igual desde el punto D* (figura 146).

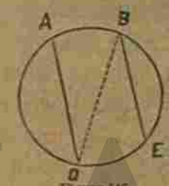

Figura 146.

Tomando la cuerda A B, se llevará de D á E, y el arco D E será el pedido.

Puede resolverse el problema tambien tirando la línea A D y por B una paralela que determinará el punto E del arco D E=A B (480).

ANGULOS EN EL CIRCULO.

483.—Ya hemos visto (378) que por ser proporcionales las magnitudes de los ángulos cuyos vértices están en el centro de un círculo, á las de los arcos que sus lados abrazan, se toman estos arcos como medida de los ángulos; pero para esto es necesario que el vértice esté en el centro del círculo. Vamos á ocuparnos ahora de determinar la relacion que existe entre la medida de un ángulo cuyo vértice está en cualquier punto de un círculo con la del ángulo del centro; repitiendo que la unidad de medida adoptada tanto para los arcos como para los

Finalmente, como la cuerda de la segunda resta F D se puede llevar cuatro veces sobre la anterior E B, se tendrá:

$$E\,B=4\,F\,D$$

Sustituyendo este valor en el penúltimo, y luego ese en el anterior, etc., se tiene sucesivamente:

$$E\,B=4\,F\,D,\ C\,D=5\,F\,D,\ A\,B=14\,F\,D.$$

La comun medida de los arcos A B y C D es F D que, segun se ha visto, está contenida 14 veces en el primero y 5 en el segundo.

Cuando se encuentra una resta que está contenida un número cabal de veces en la anterior, la operacion queda concluida y los arcos serán *conmensurables;* pero si despues de llevar una resta sobre otra una ó más veces, se llega á obtener una, que por ser muy pequeña, ó no influye en el resultado práctico de la cuestion propuesta, ó no puede apreciarse por los sentidos, se desprecia, y la relacion hallada solo es aproximada. Cuando no hay números que expresen con exactitud la relacion de la longitud de los arcos, se dice que son *inconmensurables.*

II.—*Sobre una recta dada A B* [fig. 143] *como diámetro, trazar un círculo.*

Figura 143.

Haciendo centro en los extremos de la recta, y con un rádio A E mayor que su mitad se describen arcos que se corten arriba y abajo de ella en los puntos E y F: la recta que pasa por estos puntos determina en O la mitad de A B [404]. Haciendo centro en O y con el rádio O B, se trazará el círculo pedido.

III.—*Dado el punto D* [fig. 144] *interior de un círculo, determinar la menor cuerda que por él pueda tirarse.*

Figura 144.

Tirando por D el diámetro C F, y levantando en D una perpendicular al diámetro, se tendrá la cuerda pedida [474].

IV.—*Dividir un arco de círculo A B* (fig. 145) *en dos partes iguales.*

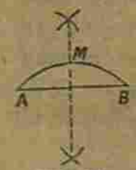

Figura 145.

Tírese la cuerda A B, y levantando por su medio una perpendicular, ésta determinará en M la mitad del arco dado (475).

Del mismo modo se dividirá A M en otras dos partes iguales, y así se concibe cómo puede dividirse un arco no solo en 2, sino tambien 4, 8, etc., partes iguales.

V.—*Dado el arco A B, determinar otro igual desde el punto D* (figura 146).

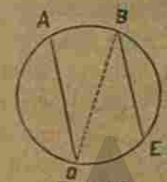

Figura 146.

Tomando la cuerda A B, se llevará de D á E, y el arco D E será el pedido.

Puede resolverse el problema tambien tirando la línea A D y por B una paralela que determinará el punto E del arco D E=A B (480).

ANGULOS EN EL CIRCULO

483.—Ya hemos visto (378) que por ser proporcionales las magnitudes de los ángulos cuyos vértices están en el centro de un círculo, á las de los arcos que sus lados abrazan, se toman estos arcos como medida de los ángulos; pero para esto es necesario que el vértice esté en el centro del círculo. Vamos á ocuparnos ahora de determinar la relacion que existe entre la medida de un ángulo cuyo vértice está en cualquier punto de un círculo con la del ángulo del centro; repitiendo que la unidad de medida adoptada tanto para los arcos como para los ángulos, es la trescientos sesentava parte de la circunferencia, llamada grado, el cual se subdivide en 60 minutos y el minuto en 60 segundos, y como una circunferencia grande ó pequeña tiene siempre 360 grados, resulta que esta unidad no es absoluta, es decir, no tiene una magnitud fija, sino relativa, y por esto sirve para estimar la relacion de inclinacion entre dos líneas, ó la de magnitud entre dos arcos de un mismo círculo ó de círculos iguales.

484.—*El ángulo cuyo vértice está en la circunferencia, tiene por medida la mitad del arco que sus lados abrazan.* A esta clase de ángulos se les llama inscritos.

Tres son las posiciones que el ángulo inscrito puede tener con respecto al ángulo en el centro, cuya medida natural es el arco que sus lados abrazan:

1° Puede quedar el centro sobre uno de los dos lados del ángulo (figura 147).

2° Puede quedar el centro dentro del ángulo (fig. 148), y

3° Puede quedar el centro fuera del ángulo [fig. 149].

Figura 147.

Consideraremos 1° el ángulo A B C (fig. 147) en el que el centro O queda sobre el lado B A. Tirando el radio O C resultará el triángulo C O B isósceles, en el que el ángulo inscrito B es igual á C, y el ángulo externo del triángulo

$$A\ O\ C = B + C = 2\ B \quad (434)$$

de donde despejando:

$$B = \frac{A\ O\ C}{2}$$

pero teniendo A O C por medida A C, la del ángulo inscrito B será $\frac{A\ C}{2}$, que es lo que se tenia que demostrar.

Figura 148.

En el 2° caso, cuando el centro está dentro del ángulo A B C [fig. 148], se tiene, tirando el diámetro B D, que

$$A\ B\ C = A\ B\ D + D\ B\ C$$

pero acabamos de ver que la medida de A B D es $\frac{A\ D}{2}$ y la de D B C es $\frac{D\ C}{2}$; luego la medida de A B C será $\frac{A\ D}{2} + \frac{D\ C}{2} = \frac{C\ A}{2}$

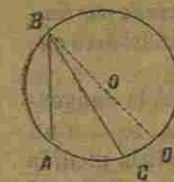

Figura 149.

3° Sea el caso en que el centro esté fuera del ángulo A B C [fig. 149]. Tirando el diámetro B D se tiene

$$A\ B\ C = A\ B\ D - C\ B\ D$$

pero conforme al primer caso, la medida de A B D es $\frac{A\ D}{2}$, y la de C B D es $\frac{C\ D}{2}$; luego la medida de A B C será $\frac{A\ D}{2} - \frac{C\ D}{2} = \frac{A\ C}{2}$

Así pues, en cualquier caso la medida del ángulo inscrito es la mitad del arco que sus lados abrazan.

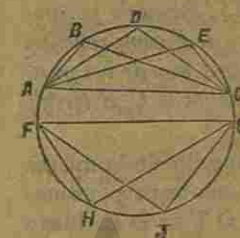

Figura 150.

485.—De aquí se infiere: 1° *que todos los ángulos*, como [fig. 150] *B, D y E, que tienen sus vértices sobre la circunferencia y que abrazan el mismo arco, serán iguales* por tener la misma medida; y 2°, *que todo ángulo inscrito*, como *H ó J, cuyos lados rematan en las extremidades de un diámetro, es recto,* supuesto que tiene por medida la mitad de una semicircunferencia.

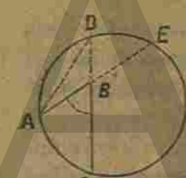

Figura 151.

486.—*El ángulo A B C* [fig. 151] *cuyo vértice está dentro de la circunferencia, pero no en el centro, tiene por medida la mitad de la suma de los arcos A C y D E, que comprenden sus lados prolongados.*

Al ángulo A B C se le llama *excéntrico.*

Tirando la cuerda A D se forma el triángulo A B D en el que [434] el ángulo externo

$$A\ B\ C = D + A$$

pero como la medida de D es $\frac{A\ C}{2}$ y la de A es $\frac{D\ E}{2}$, se tiene que la medida de A B C será $\frac{A\ C}{2} + \frac{D\ E}{2}$

487.—*El ángulo A B C* [fig. 152] *formado por dos secantes, tiene por medida la semidiferencia de los arcos A C y D E que sus lados abrazan.*

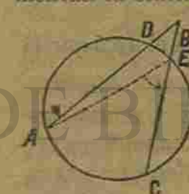

Figura 152.

Tirando la cuerda A E resulta el triángulo A E B en el que el ángulo externo [434]

$$A\ E\ C = B + A$$

despejando á $\quad B = A\ E\ C - A$

pero siendo [484] la medida de A E C, $\frac{A\ C}{2}$ y la de A, $\frac{D\ E}{2}$, resulta que la medida de B será $\frac{A\ C}{2} - \frac{D\ E}{2}$

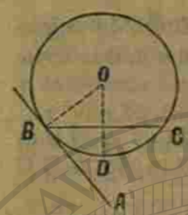
Figura 153.

488.—*El ángulo A B C (fig. 153) formado por tangente y cuerda tiene por medida la mitad del arco que la cuerda subtende.*

Tirando el radio O B, perpendicular á la tangente, y el O D perpendicular á la cuerda, resulta un ángulo B O D=A B C; [422] pero siendo la medida de B O D, B D=$\frac{BC}{2}$ [475], la medida de A B C será tambien $\frac{BC}{2}$.


Figura 154.

489.—*El ángulo A B C (fig. 154) formado por dos tangentes, tiene por medida el arco D F comprendido entre uno de los radios D O, tirado á uno de los puntos de contacto, y la prolongacion del otro O E tirado al otro punto de contacto.*

El ángulo B=D O F por ser ángulo de la misma especie cuyos lados son respectivamente perpendiculares; [422] pero la medida de D O F es D F, luego la del ángulo B será tambien D F.

490.—Problemas de medidas de ángulos.—I.—*Determinar con el trasportador el valor del ángulo inscrito, del excéntrico y de los que están formados respectivamente por dos secantes, por tangente y cuerda, y por dos tangentes.*

Para saber el número de grados de un ángulo *inscrito*, se hará coincidir el centro del trasportador con el del círculo, y se tomará la mitad del número de grados que correspondan al arco interceptado por los lados del ángulo [484].

En un ángulo *excéntrico* se prolongarán sus lados, y determinando con el trasportador el valor de los dos arcos interceptados, se tomará la mitad de la suma [486].

En el ángulo *formado por dos secantes* se medirán con el trasportador los dos arcos interceptados y se tomará la mitad de su diferencia [487]

En el ángulo *formado por tangente y cuerda* se medirá el arco que la cuerda subtende y se tomará su mitad [488].

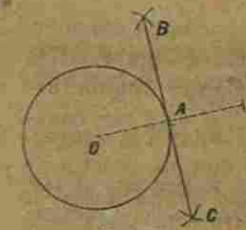
Figura 155.

En el ángulo *formado por dos tangentes*, se tirarán radios á los puntos de contacto, se prolongará uno de ellos, y el arco comprendido entre un radio y la prolongacion del otro, será el valor del ángulo de las dos tangentes [489].

II.—*Levantar una tangente á un círculo en un punto A dado en la circunferencia* (fig. 155).

Tírese el radio O A, y despues de prolongarlo levántese en A la perpendicular B C, la cual será la tangente pedida.

III.—*Tirar una tangente á un círculo desde un punto P tomado fuera de él* (fig. 156).

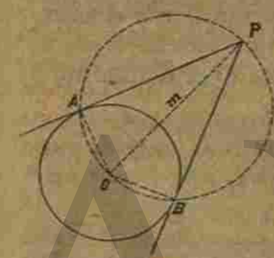
Figura 156.

Reúnase el punto P con el centro O del círculo: divídase por mitad la recta P O y haciendo centro en *m* con el radio P *m* trácese una circunferencia: reuniendo P con A y con B, se tendrán las tangentes pedidas.

La recta P A será tangente del círculo O porque tirando el radio A O, el ángulo P A O que tiene su vértice en la circunferencia del círculo *m* y que abraza el diámetro P O es recto (485 y 478). Otro tanto sucede con P B, por lo que se ve que este problema admite dos resoluciones.

IV.—*Describir sobre una recta dada A B* (fig. 157) *un arco de círculo capaz de un ángulo dado* a.

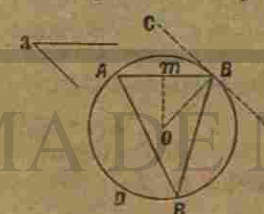
Figura 157.

Se entiende por arco de círculo capaz de un ángulo, aquel en que los ángulos inscritos cuyos lados rematan sobre la cuerda A B son iguales al ángulo dado a.

Resolucion.—En uno de los extremos de la recta A B, constrúyase un ángulo A B C=a; prolónguese C B, y en el punto B levántese la perpendicular B O: en el medio *m* de A B levántese la perpendicular *m* O y haciendo centro en O con el radio O B trácese una circunferencia, de la que el arco A D B será el pedido.

Demostracion.—En efecto, cualquier ángulo inscrito en ese arco, como R, tendrá por medida el arco $\frac{AB}{2}$ (484); pero como el ángulo A B C tambien tiene por medida $\frac{AB}{2}$ (488) resulta que cualquier ángulo inscrito que abrace la cuerda A B, será igual á A B C, el cual por construccion es igual al ángulo dado a.

V.—*Levantar una perpendicular á una recta A R por uno de sus extremos A* [fig. 158], *cuando solo puede prolongarse en la direccion del otro extremo R.*

Figura 158.

Fuera de la recta A R y entre sus dos extremos tómese el punto C; haciendo centro en él, con el radio C A trácese una circunferencia que pasará por A y cortará la recta A R en un punto R; tirando el diámetro R D y reuniendo el punto D con el extremo A, se tendrá la recta D A, que será la perpendicular pedida, por ser el ángulo D A R inscrito, y abrazar un diámetro [485—2°].

VI.—*Desde un punto A dado fuera de una recta B D, que solo puede prolongarse en la direccion de uno de sus extremos, bajarle una perpendicular* [fig. 159].

Figura 159.

Réunase A con D; divídase por la mitad la recta A D: haciendo centro en O, y con el radio O A trácese una circunferencia; reúnase el punto A con el de interseccion B, y B A será la perpendicular pedida [485—2°].

POLIGONOS EN EL CIRCULO

491.—Se llaman *polígonos inscritos, aquellos cuyos ángulos todos están sobre la circunferencia de un círculo; y polígonos circunscritos son aquellos cuyos lados son tangentes del círculo.*

En los polígonos inscritos (fig. 162) los lados quedan dentro del círculo y forman las cuerdas; en los polígonos circunscritos (fig. 163) los vértices quedan fuera del círculo y los lados son tangentes.

492.—*Todo triángulo puede inscribirse á un círculo.*

Figura 160.

Sea el triángulo A B C (fig. 160). Si por el punto *m* medio del lado A B se levanta la perpendicular *m* O, todos los puntos de esta perpendicular estarán equidistantes de los extremos A y B [403—1°]. Si por el medio *n* del lado B C se levanta la perpendicular *n* O, todos sus puntos estarán equidistantes de los extremos B y C; así es que el punto de interseccion O de las dos perpendiculares, estará equidistante de los tres vértices del triángulo; luego si hacemos centro en O y trazamos un círculo con el radio O A=O B=O C, los vértices del triángulo quedarán sobre la circunferencia, y el triángulo resultará inscrito.

493.—*Todo triángulo puede circunscribirse á un círculo.*

Figura 161.

Sea el triángulo A B C (fig. 161). Si dividimos en dos partes iguales el ángulo A con la recta A O, todos sus puntos gozarán de la propiedad de estar equidistantes de los lados A B y A C [405]; esto es, las perpendiculares bajadas desde uno de sus puntos sobre los lados A B y A C serán iguales. Si con la recta C O dividimos en dos partes iguales el ángulo C, todos los puntos de la bisectriz C O estarán equidistantes de los lados C A y C B; así es que el punto O de interseccion de las dos bisectrices estará equidistante de los tres lados luego si desde O como centro y tomando por radio la perpendicular O D=O E=O F, trazamos un círculo; éste tocará á los tres lados del triángulo en D, E y F, y resultará circunscrito el triángulo.

494.—*En todo cuadrilátero inscrito, la suma de los ángulos opuestos es igual á dos rectos* (fig. 162).

Figura 162.

Si consideramos los dos ángulos opuestos B y D, tendremos que la medida de B es

$$B = \frac{A\ D\ C}{2}$$

la de D es

$$D = \frac{A\ B\ C}{2}$$

sumando se tiene $B + D = \frac{A\ D\ C\ B}{2}$

pero como la mitad de toda la circunferencia es igual á 180°, la suma de B y de D valdrá dos rectos.

495.—*En todo cuadrilátero circunscrito, la suma de dos de los lados opuestos es igual á la suma de los otros dos* (fig. 163).

Figura 163.

Si consideramos las partes de las tangentes comprendidas entre los puntos de interseccion y los de contacto, fundándonos en el teorema demostrado en el número 479, se tiene:

$$A\ E = A\ F$$
$$E\ D = D\ H$$
$$B\ G = B\ F$$
$$G\ C = C\ H$$

sumando ordenadamente estas igualdades resulta

$$A\ D + B\ C = A\ B + D\ C$$

que es lo que se debia demostrar.

496.—*El lado del cuadrado circunscrito al círculo es igual al diámetro.*

Figura 164.

Si desde el centro O (fig. 164) tiramos los radios O E, O F, y consideramos el cuadrilátero A F O E, tendremos: que O F = O E por radios, y A F = A E (479) por partes de tangentes; por otra parte, siendo los ángulos A, O F A y O E A (478) rectos, el ángulo E O F tambien lo será, de lo que resulta que A F O E es un cuadrado, y por tanto,

A F = E O y A E = O F. Como lo mismo podria demostrarse de los cuadrados O F B G, O G C H y O H D E, cada uno de los lados del cuadrado será igual á dos rádios, supuesto que cada una de sus partes A F y F B es igual á un radio, E O y O G.

De aquí se infiere que el perímetro del cuadrado circunscrito es igual á ocho radios.

497.—*El lado del exágono regular inscrito, es igual al radio.*

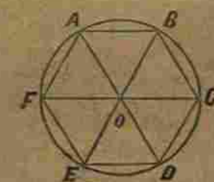

Figura 165.

(Figura 165). Por ser el polígono regular (461) los lados A B, B C, C D, etc., serán iguales entre sí; siendo iguales estas cuerdas, lo serán los arcos que subtenden, y como los arcos A B, B C, C D, etc., son las medidas de los ángulos A O B, B O C, C O D, etc., formados en el centro, se infiere que estos seis ángulos son iguales entre sí. Todos estos ángulos formados al rededor de un punto O valen cuatro ángulos rectos ó 360°, luego uno de ellos valdrá $\frac{360°}{6}$ Así A O B=60°

Considerando el triángulo A O B, tendremos que, siendo A O=O B por radios, los ángulos opuestos O B A y O A B serán iguales, y valiendo la suma de los tres ángulos dos rectos, se tiene

$$A\ O\ B + O\ B\ A + O\ A\ B = 180°$$

sustituyendo $60° + 2.\ O\ B\ A = 180°$

De donde $O\ B\ A = O\ A\ B = 60°$

Por ser los tres ángulos iguales y estar opuestos á ángulos iguales lados iguales, el triángulo A O B será equilátero, y el lado A B del exágono inscrito será igual á A O, que es el radio del círculo.

De aquí se infiere que el perímetro del exágono regular inscrito, es igual á seis radios.

498.—Como la circunferencia del círculo es menor que el perímetro del polígono circunscrito, y mayor que el perímetro del polígono inscrito, resulta que llamando C la circunferencia del círculo, r el radio, y considerando el cuadrado circunscrito y el exágono inscrito,

se tiene $C < 8\ r$ (496)

y $C > 6\ r$ (497)

luego *la circunferencia del círculo es menor que ocho veces el radio, y mayor que seis.*

Dividiendo por 2 r los dos miembros de las desigualdades anteriores, se tiene

$$\frac{C}{2r} < 4$$

$$\frac{C}{2r} > 3$$

luego *la razon de la circunferencia al diámetro es mayor que 3 y menor que* 4. Generalmente se representa la razon $\frac{C}{2r}$ por π, y se tiene $\pi = 3{,}141592$, como veremos más adelante.

499.—*Todo polígono regular se puede inscribir al círculo* (fig. 166).

Figura 166.

Dividiendo en dos partes iguales cada uno de los ángulos del polígono, con las rectas A O, B O, C O, etc., para probar que el polígono se puede inscribir á un círculo, nos bastará demostrar: primero *que estas rectas son iguales entre sí*, y segundo *que concurren en un mismo punto* O.

1° Todos los triángulos A O B, B O C, C O D, etc., formados por cada uno de los lados del polígono y dos de las bisectrices de los ángulos, son iguales, por tener un lado igual adyacente á dos ángulos iguales (384). Comparando, por ejemplo, los triángulos A O B y C O D, se tiene: A B=C D por lados de polígono regular, O C D=O A B y O D C=O B A por ser mitades de ángulos iguales, luego O D=O B y O C=A O, por estar opuestos estos lados á ángulos iguales en triángulos iguales (387). Además, por ser isósceles los triángulos, todas esas rectas serán iguales entre sí.

2° Las bisectrices concurrirán en el mismo punto, porque si dos de ellas concurrieran en O y otras dos en i, se inferiria que en los triángulos iguales A i B y B O C á los ángulos iguales O C B=i A B, estarían opuestos lados desiguales O B>i B, lo que es inadmisible.

Luego si desde el punto O de interseccion de las bisectrices como centro, y con el radio O A=O B=O C, etc., se traza una circunferencia, esta pasará por todos los vértices A, B, C, D, etc., del polígono.

500.—*Todo polígono regular A B C D E* (fig. 167) *puede circunscribirse al círculo.*

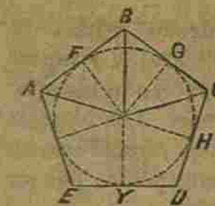

Figura 167.

Si desde el punto O, donde concurren los radios oblícuos (499), bajamos perpendiculares á los lados, nos bastará demostrar que todos los radios rectos O F, O G, O H, etc., son iguales para probar que el polígono puede circunscribirse.

Los triángulos A O F y O G C son iguales (442—3°) por ser rectángulos y tener iguales las hipotenusas A O=O C por radios oblícuos de polígono regular (499), y un cateto A F=G C por mitades de los lados iguales del polígono. A F es la mitad de A B, porque teniendo la perpendicular O F el punto O equidistante de los extremos A y B, cualquiera otro punto F tambien lo estará (403—1°)

Siendo iguales los dos triángulos rectángulos, el otro cateto O F será igual á O G.

Del mismo modo se demostraria que O G=O H y O H=O Y, etc., luego si desde O como centro se traza un círculo con el radio O F, la circunferencia tocará los lados del polígono en F, G, H, Y, etc.

501.—Problemas de polígonos en el círculo.—I.—*Inscribir un triángulo en un círculo* (fig. 168).

Figura 168.

Levantando perpendiculares por la mitad de los lados A B y B C, haciendo centro en el punto O de interseccion de las perpendiculares, y trazando con el radio O A una circunferencia, quedará resuelto el problema [492].

II.—*Circunscribir un triángulo á un círculo* (fig. 169).

Figura 169.

Divídanse por mitad los ángulos B y C y haciendo centro en el punto de interseccion O de as bisectrices y con un radio igual á la perpendicular O D bajada desde O á uno de los lados, trácese una circunferencia, con lo que quedará resuelto el problema (493).

III.—*Inscribir en un círculo polígonos regulares de* 4, 8, 16, 32, *etc., lados.*

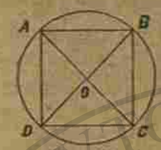

Figura 170.

Para inscribir en el círculo un cuadrado, bastará tirar un diámetro cualquiera A C (fig. 170) y levantar otro B D perpendicular al primero; reuniendo los puntos A, B, C y D, se tendrá el cuadrado. Los ángulos serán rectos por tener sus vértices en la circunferencia y abrazar un diámetro, y los lados son iguales por ser hipotenusas de triángulos iguales.

Para inscribir el polígono de 8 lados, bastará dividir por mitad cada uno de los arcos A B, B C, etc., y tirar las cuerdas respectivas. Volviendo á dividir los arcos que resulten en dos partes iguales, se tendrán los vértices del polígono de 16 lados, y así sucesivamente se obtendrán los de 32, 64, etc., lados.

IV.—*Inscribir en un círculo un polígono regular de* 3, 6, 12, 24, *etc., lados.*

En cuanto al exágono regular, siendo el lado igual al radio, bastará llevar sobre la circunferencia cuerdas de una longitud igual al radio, para tener un exágono inscrito (497). Para inscribir un triángulo se tirarán cuerdas que abracen los vértices no contiguos del exágono.

Para determinar los puntos de los vértices del polígono de 12 lados, se dividirán por la mitad los arcos del exágono; y volviendo á dividir estos de nuevo, en dos partes iguales, se tendrán los puntos del polígono de 24 lados.

V,—*Inscribir á un exágono regular un círculo.*

Figura 171.

(Figura 171). Levántese por el medio de A B una perpendicular G O, y por el medio de B C otra H O, y describiendo desde O como centro una circunferencia con el radio O G, se tendrá resuelto el problema (500).

VI.—*Hacer pasar por tres puntos A, B y C que no están en línea recta, una circunferencia de círculo.*

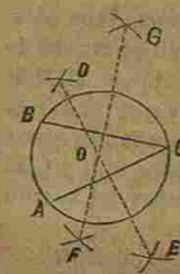

Figura 172.

(Figura 172). Tírense las rectas A C y B C por el medio de cada una de ellas, levántense las perpendiculares E D y F G, y si desde el punto de intersección O, como centro, se traza una circunferencia con el radio O A, esta pasará por los tres puntos dados; porque todos los puntos de la perpendicular E D están equidistantes de A y de C (403—1º), y los puntos de G F lo están de C y de B; luego el punto O que pertenece á ambas perpendiculares, estará equidistante de A, B y C.

VII.—*Dado un círculo, determinar su centro.*

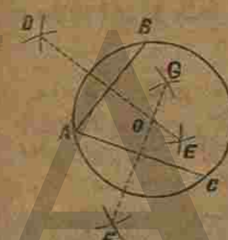

Figura 173.

Desde un punto A de la circunferencia (fig. 173) se tiran dos rectas A B y A C: se levantan por sus mitades las perpendiculares D E y F G, y el punto O de intersección de estas perpendiculares será el centro del círculo, por estar equidistantes de A, B y C (403—1º).

VIII.—*Encontrar el centro de un arco de círculo A B.*

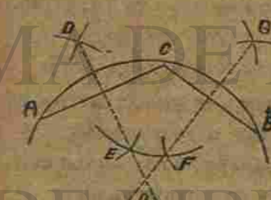

Figura 174.

(Figura 174). Tírense dos cuerdas A C y C B formando un ángulo: levántense perpendiculares por sus mitades, y el punto O de intersección de las perpendiculares, será el centro del arco.

IX.—*Sobre una recta A B construir un arco de círculo capaz del ángulo dado* m.

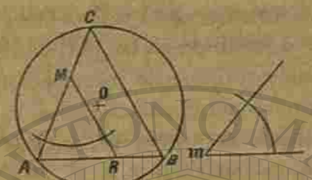

Figura 175.

Tírese la recta A C que forme con A B un ángulo cualquiera: en un punto M de esta recta constrúyase un ángulo A M R $= m$, y por el punto B tírese una recta B C paralela á M R. Haciendo pasar un círculo por los tres puntos A B y C se tendrá el arco de círculo capaz del ángulo dado *m*.

En efecto, el ángulo A C B, cuyo vértice está sobre la circunferencia, es igual á A M R por correspondientes; pero A M R$=m$ por construccion, luego cualquier ángulo inscrito, cuyos lados pasen por los extremos de A B, será igual á *m*.

INTERSECCION Y CONTACTO DE LOS CIRCULOS.

502.—Hemos visto (492) que por tres puntos que no están en línea recta siempre puede hacerse pasar un círculo, y como una vez fijado el centro y el radio queda determinada la posicion del círculo, resulta: 1° que por tres puntos no puede hacerse pasar más de un solo círculo: 2° que dos circunferencias que tienen tres puntos comunes, se confunden en todas sus partes: y 3° que dos circunferencias distintas pueden cortarse en dos puntos, tener un punto comun, ó no tocarse en ninguno.

Se llaman secantes dos circunferencias que se cortan en dos puntos, (fig. 176) *y tangentes las que solo tienen un punto comun* (fig. 177).

503.—*La línea de los centros de dos circunferencias que se cortan es perpendicular á la cuerda comun y la divide en dos partes iguales.*

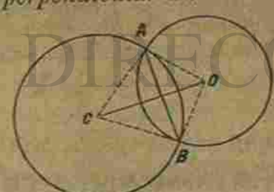

Figura 176.

Sean los dos círculos (fig. 176) cuyos centros son O y C, y que se cortan en A y B. Tirando la cuerda comun A B y los radios O A, O B, C A y C B, se tiene que la línea de los centros O C tiene el punto O equidistante de los extremos A y B de la cuerda y el punto C, centro del círculo mayor, tambien

está equidistante de A y de B; luego conforme á lo demostrado en el número 404, la línea de los centros será perpendicular á la cuerda comun y la dividirá en dos partes iguales.

504.—*Cuando dos circunferencias no tienen más que un punto comun, este pertenece á la línea de los centros.*

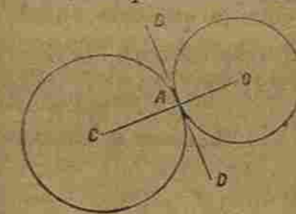

Figura 177.

Teniendo las dos circunferencias un solo punto comun A (fig. 177) si se tira una tangente B D á uno de los círculos por el punto de contacto tambien lo será al otro, y tirando los radios O A y C A tendremos (478) que el ángulo B A O será recto lo mismo que B A C; pero teniendo estos ángulos la posicion de adyacentes y valiendo juntos dos rectos, las líneas A O y A C formarán una sola recta (397), de lo que resulta que A estará en la línea C O.

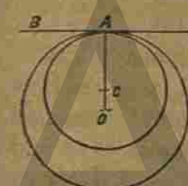

Figura 178.

Si los dos círculos se tocan interiormente (fig. 178), como no puede levantarse desde un mismo punto A más que una sola perpendicular á la tangente comun A B, los dos radios A O y A C tendrán que confundirse y el punto A quedará en la prolongacion de O C que es la línea de los centros.

Figura 179.

505.—Dos círculos situados en un plano pueden tener cinco posiciones relativas diferentes: primero, estar uno fuera de otro, (fig. 179); segundo, ser tangentes exteriormente (fig. 177); tercero, ser secantes (fig. 176); cuarto, ser tangentes interiormente (fig. 178), y quinto estar uno dentro del otro (fig. 180).

En estos casos la línea de los centros goza de las siguientes propiedades.

[Fig. 179]. 1° *Cuando los dos círculos son exteriores, la línea de los centros es mayor que la suma de los radios,* supuesto que O C se compone de los dos radios, más la parte A B.

[Fig. 177]. 2° *Cuando los dos círculos se tocan exteriormente, la línea de los centros es igual á la suma de los radios,* pues pasando por el punto A de contacto se tiene O C = O A + A C.

[Fig. 176]. 3° *Cuando los círculos se cortan, la línea de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.* En efecto, considerando el triángulo C A O se tiene:

$$O\,C < C\,A + O\,A \quad (425)$$

y

$$O\,C > C\,A - O\,A \quad (426)$$

(Fig. 178). 4° *Cuando dos círculos se tocan interiormente, la línea de los centros es igual á la diferencia de los radios.* En efecto, la línea de los centros prolongada pasa por A, y se tiene

$$O\,C = A\,O - A\,C$$

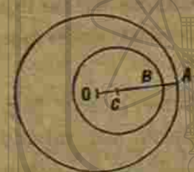
Figura 180.

(Fig. 180). 5° *Cuando uno de los círculos está dentro del otro, la línea de los centros es menor que la diferencia de los radios.* En este caso se tiene

$$O\,C + C\,B + B\,A = O\,A$$

de donde $O\,C = O\,A - C\,B - B\,A$

luego $O\,C < O\,A - C\,B$

Las recíprocas de estas proposiciones tambien son ciertas.

506.—Problemas de dos círculos.—I.—*Tirar una tangente exterior comun á dos círculos dados* (fig. 181).

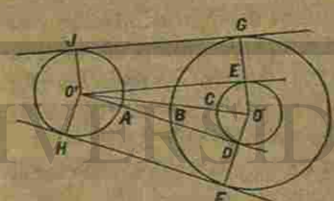
Figura 181.

Construccion.—Llévese el radio O' A del círculo menor de B á C; con el radio O C *igual á la diferencia de los radios,* trácese el círculo E C D; desde O', tírese á este círculos la tangente O' D; tírese al punto de contacto D el radio O D y prolónguese hasta F; por el centro O' llévese O' H paralela á O F; y tirando por F y H una recta, ésta será la tangente comun á los dos círculos.

Demostracion.—Para que F H sea tangente á los dos círculos, es preciso que sea perpendicular á los radios O F y O' H en los puntos de contacto, y para demostrarlo bastará probar que la figura O' D F H es un rectángulo. Tenemos que por ser O' H igual y paralela á D F, el cuadrilátero O' D F H será paralelógramo (450); pero este paralelógra-

mo es rectángulo por ser O' D perpendicular á O F, y por ser O' H paralela á esta recta.

El problema admite dos resoluciones, pues por una construccion idéntica puede tirarse la tangente G J en la parte superior de los dos círculos.

II.—*Tirar una tangente interior comun á dos círculos dados* (figura 182).

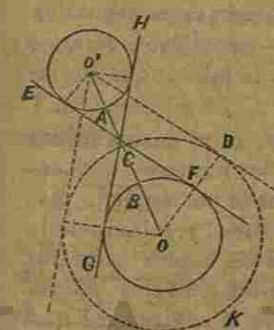
Figura 182.

Construccion.—Llévese el radio O' A del círculo menor de B á C: con un radio O C *igual á la suma de los radios,* trácece el círculo G K D: desde O' tírese la tangente O' D á este círculo: llévese al punto de contacto el radio O D: por O' tírese el radio O' E paralelo á O D, y reuniendo E con F se tendrá la tangente pedida.

Demostracion.—Siendo F D igual y paralela á E O' (450), el cuadrilátero E O' D F será paralelógramo; pero habiéndose tirado O' D tangente al círculo, el ángulo O' D F será recto lo mismo que E O' D por ser O' E paralela á F D, luego E O' D F será un rectángulo, y siendo E F perpendicular á los radios O' E y O F será tangente á los círculos dados.

El problema admite dos resoluciones, pues por una construccion idéntica puede tirarse la tangente G H.

LINEAS PROPORCIONALES.

507.—Las magnitudes A y B son proporcionales á otras dos C y D cuando se puede establecer entre sus razones la siguiente igualdad:

[Fig. 176]. 3° *Cuando los círculos se cortan, la línea de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.* En efecto, considerando el triángulo C A O se tiene:

$$O\,C < C\,A + O\,A \quad (425)$$

y

$$O\,C > C\,A - O\,A \quad (426)$$

(Fig. 178). 4° *Cuando dos círculos se tocan interiormente, la línea de los centros es igual á la diferencia de los radios.* En efecto, la línea de los centros prolongada pasa por A, y se tiene

$$O\,C = A\,O - A\,C$$

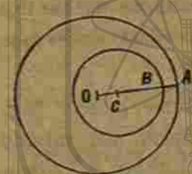

Figura 180.

(Fig. 180). 5° *Cuando uno de los círculos está dentro del otro, la línea de los centros es menor que la diferencia de los radios.* En este caso se tiene

$$O\,C + C\,B + B\,A = O\,A$$

de donde $O\,C = O\,A - C\,B - B\,A$

luego $O\,C < O\,A - C\,B$

Las recíprocas de estas proposiciones tambien son ciertas.

506.—Problemas de dos círculos.—I.—*Tirar una tangente exterior comun á dos círculos dados* (fig. 181).

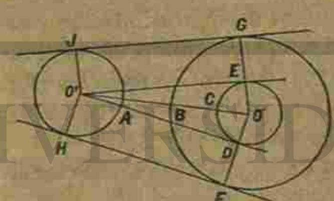

Figura 181.

Construccion.—Llévese el radio O' A del círculo menor de B á C; con el radio O C *igual á la diferencia de los radios*, trácese el círculo E C D; desde O', tírese á este círculos la tangente O' D; tírese al punto de contacto D el radio O D y prolónguese hasta F; por el centro O' llévese O' H paralela á O F; y tirando por F y H una recta, ésta será la tangente comun á los dos círculos.

Demostracion.—Para que F H sea tangente á los dos círculos, es preciso que sea perpendicular á los radios O F y O' H en los puntos de contacto, y para demostrarlo bastará probar que la figura O' D F H es un rectángulo. Tenemos que por ser O' H igual y paralela á D F, el cuadrilátero O' D F H será paralelógramo (450); pero este paralelógramo es rectángulo por ser O' D perpendicular á O F, y por ser O' H paralela á esta recta.

El problema admite dos resoluciones, pues por una construccion idéntica puede tirarse la tangente G J en la parte superior de los dos círculos.

II.—*Tirar una tangente interior comun á dos círculos dados* (figura 182).

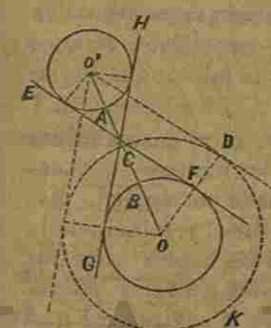

Figura 182.

Construccion.—Llévese el radio O' A del círculo menor de B á C: con un radio O C *igual á la suma de los radios,* trácece el círculo G K D: desde O' tírese la tangente O' D á este círculo: llévese al punto de contacto el radio O D: por O' tírese el radio O' E paralelo á O D, y reuniendo E con F se tendrá la tangente pedida.

Demostracion.—Siendo F D igual y paralela á E O' (450), el cuadrilátero E O' D F será paralelógramo; pero habiéndose tirado O' D tangente al círculo, el ángulo O' D F será recto lo mismo que E O' D por ser O' E paralela á F D, luego E O' D F será un rectángulo, y siendo E F perpendicular á los radios O' E y O F será tangente á los círculos dados.

El problema admite dos resoluciones, pues por una construccion idéntica puede tirarse la tangente G H.

LINEAS PROPORCIONALES.

507.—Las magnitudes A y B son proporcionales á otras dos C y D cuando se puede establecer entre sus razones la siguiente igualdad:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

Unas veces las letras A, B, C y D representan las magnitudes mismas, sean líneas, ángulos, arcos, superficies, eec.: pero otras, y es lo más general, expresan la relacion que existe entre cada una de ellas á la unidad de su especie, y bien sean cantidades ó números sus *razones* y *proporciones* gozan de las propiedades que ya quedan demostradas en aritmética y en álgebra. Las voces *proporcion*, *antecedente*, *término medio proporcional*, etc., significan en geometría lo mismo que en las otras partes de las matemáticas.

Cuando se indique el producto de una línea por otra, generalmente deberá entenderse que se trata del producto de los números, que expresan las relaciones entre estas líneas y otra tomada por unidad. Así si a y b representan dos rectas, $a+b$ podrá indicar el resultado de la operacion mecánica de poner una á continuacion de la otra estas dos líneas, ó el valor numérico que resulta de sumar los números que representan las magnitudes de las rectas a y b; pero si se tiene $a\,b$ ó a^2 etc., estos productos, por regla general, indicarán los productos de los números que representan las magnitudes de las líneas.

508.—*Si dos rectas A F, y G M, situadas en un plano* (fig. 183) *están cortadas por un número cualquiera de paralelas A G, B H, C Y, etc., tiradas por puntos tomados á distancias iguales sobre la primera, las partes G H, H Y, Y K, etc., determinadas sobre la segunda recta, serán iguales entre sí.*

Fundándonos en que son paralelas las rectas, é iguales las partes A B, B C, C D, etc., demostrarémos que tambien serán iguales las partes G H, H Y, Y K, etc.

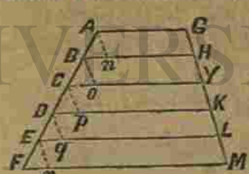

Figura 183.

Por los puntos A, B, C, etc., tiremos las rectas An, Bo, Cp, etc., paralelas á G M, por lo que serán paralelas entre sí, y resultarán los triángulos A B n, B C o, C D p, etc., iguales entre sí por tener un lado igual adyacente á ángulos iguales (384). Los lados iguales son A B=B C =C D, etc., por construccion. Los ángulos adyacentes respectivamente iguales, son: B A n=C B o=D C p, etc., y A B n=B C o=C D p, etc., por correspondientes. Por la igualdad de los triángulos se tiene:

$$A\,n = B\,o = C\,p = D\,q, \text{ etc.}$$

pero como las figuras A n G H, B o Y H, C p K Y etc., son paralelógramos, los lados opuestos serán iguales, esto es,

$$A\,n = G\,H,\ B\,o = H\,Y,\ C\,p = K\,Y \text{ etc.}$$

pero como los primeros miembros de estas ecuaciones son iguales entre sí, se infiere que lo serán los segundos, esto es,

$$G\,H = H\,Y = K\,Y \text{ etc.}$$

que es lo que se tenia que demostrar.

509.—*Dos rectas cualesquiera A B y C D* (fig. 184) *colocadas en un plano, son cortadas en partes proporcionales por tres paralelas A C, E F y B D.*

Las magnitudes E A y E B podrán ser conmensurables ó inconmensurables.

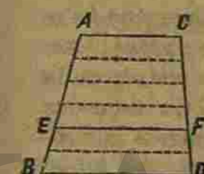

Figura 184.

1º Si las distancias E A y E B son *conmensurables*, y suponemos por ejemplo, que dividiendo E B en dos partes, una de éstas puede llevarse cuatro veces de E á A, y nos imaginamos que por los puntos de division se tiran rectas paralelas entre sí, conforme al teorema del párrafo que antecede, el lado C D quedará dividido en partes iguales, de las que dos corresponderán á la parte F D y cuatro á la C F. Por tanto, si representamos por m la magnitud de una de las partes del lado A B y por m' las del lado C D, tendremos:

$$E\,B : E\,A :: 2m : 4m$$

y

$$F\,D : F\,C :: 2m' : 4m'$$

de donde

$$E\,B : E\,A :: F\,D : F\,C,$$

que es lo que se debia demostrar.

2º En el caso de que A B y B C (fig. 185) sean *inconmensurables*, el teorema es igualmente cierto. Supongamos que dividiendo A B en tres partes iguales y llevando una de éstas cuatro veces sobre B C quede la resta i C, la que forzosamente será menor que una de las partes. Tirando paralelas por los puntos de division, resultará dividida E D en tres partes, y E F en cuatro, más una resta F n.

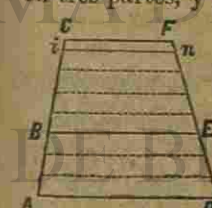

Figura 185.

Si consideramos las porciones conmensurables A B, B i, E D y E n

tendremos $A\,B : B\,i :: E\,D : E\,n$

sustituyendo por B i su igual B C—i C, y por E n su valor E F—F n, se tiene:

$$A\,B : B\,C - i\,C :: E\,D : E\,F - F\,n$$

multiplicando entre sí extremos y medios

$$AB \times EF - AB \times Fn = BC \times ED - ED \times iC$$

trasladando $AB \times EF - BC \times ED = AB \times Fn - ED \times iC$

Establecida esta ecuacion, vamos á demostrar que $AB \times EF$ no puede ser desigual á $BC \times ED$. Si lo fuera, habria entre estos productos, cuyos factores son todos constantes, una diferencia *d* fija é independiente de la magnitud arbitraria de las partes en que se dividieran A C y F D. En el supuesto de que pudieran ser desiguales, se tendria

$$AB \times EF - BC \times ED = d$$

y por lo mismo $\quad AB \times Fn - ED \times iC = d$

en la que por construccion $Fn < \frac{1}{3} ED$ é $iC < \frac{1}{3} AB$

Ahora bien: si en lugar de dividir A B en tres partes iguales, la dividimos en treinta y llevamos estas partes sobre B C y tiramos paralelas, el valor de las restas i C y F n será una fraccion menor que ántes, y mucho menor aún si dividiéramos A B en 300 ó en 3,000 partes. Así, pues, las restas son cantidades variables cuyo valor podremos disminuir á nuestro arbitrio á medida que el número de divisiones aumente, sucediendo otro tanto con cada uno de los términos $AB \times Fn$ y $ED \times iC$, en los que entra una fraccion como factor. Así es, que siendo d constante, por expresar la diferencia entre las cantidades fijas $AB \times EF$ y $BC \times ED$; en la ecuacion

$$AB \times Fn - ED \times iC = d$$

pudiendo ser $\quad Fn < \frac{AB}{3}, \quad Fn < \frac{AB}{30}, \quad Fn < \frac{AB}{3000}$ etc.

tendriamos $AB \times Fn < \frac{AB^2}{3}, \; AB \times Fn < \frac{AB^2}{30}, \; AB \times Fn < \frac{AB^2}{3000}$ etc.

y aumentando el número de divisiones llegaría á tenerse

$$AB \times Fn < d;$$

pero como nunca puede ser el minuendo menor que la resta, tampoco podremos suponer desiguales los productos $AB \times EF$ y $BC \times ED$, y si son iguales resultará la proporcion

$$AB : BC :: ED : EF$$

que es lo que se debia demostrar.

510.—*Si desde un punto D (fig. 186) tomado sobre un lado de un triángulo, se tira una recta D E paralela á otro lado A C, se verificarán tres cosas: 1ª los lados A B y B C quedarán cortados en partes proporcionales: 2ª los lados serán proporcionales á sus partes: y 3ª el lado A B del triángulo total es con su base A C, como el del parcial B D es con la suya D E.*

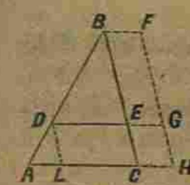

Figura 186.

Para demostrar la primera propiedad, tírese B F paralela á A C, prolónguese este lado y la recta D E, y por el punto F tírese F H paralela al lado B C.

Las rectas A B y F H quedarán cortadas en partes proporcionales por las tres paralelas (509) y se tiene

$$BD : DA :: FG : GH$$

pero por lados opuestos de paralelógramos $FG = BE$, y $GH = EC$ sustituyendo se tiene

$$BD : DA :: BE : EC \ldots\ldots (1)$$

que es la primera parte del teorema.

Para demostrar la segunda, componiendo en la última proporcion, se tiene:

$$BD + DA : DA :: BE + EC : EC$$

Alternando medios y sustituyendo

$$BA : BC :: DA : EC$$

Alternando medios en la proporcion (1) resulta que las partes son proporcionales entre sí, esto es,

$$BD : BE :: DA : EC$$

luego $\quad BA : BC :: BD : BE$

Para demostrar la tercera propiedad tiraremos por el punto D una paralela D L al lado B C, y considerando que los lados totales A B y A C son proporcionales á sus partes B D y L C, se tiene:

$$AB : AC :: BD : LC$$

pero como $LC = DE$ por lados opuestos de paralelógramo, sustituyendo, resulta:

$$AB : AC :: BD : DE$$

511.—*Recíprocamente, siempre que una recta D E (fig. 187) corte los lados de un triángulo en partes proporcionales, será paralela á la base A C.*

Figura 187.

Si suponemos que D E no sea paralela al lado A C, tendrá que serlo otra recta que pase arriba ó abajo de E, como D F, y entónces en virtud de la hipótesis del teorema, se tiene:

$$AB : BC :: AD : CE$$

y por suponerse D F paralela á la base, se tendria (510–2°)

$$AB : BC :: AD : CF$$

pero siendo iguales los tres primeros términos de estas proporciones, no es posible que los cuartos sean desiguales; luego no se puede admitir que otra recta diferente de D E, sea paralela al lado A C.

512.—Problemas de lineas proporcionales.—I.—*Dividir una linea A B* (fig. 188) *en un número dado de partes iguales.*

Figura 188.

Supongamos que se quiere dividir en cinco partes iguales.

1ª Construccion.—En uno de los extremos B de la recta se construye un ángulo; sobre la recta B D de longitud indefinida se llevan cinco partes iguales comenzando desde B, de B á c, de c á e, etc.: se une el punto D, donde llega la última division, con el extremo A de la recta, y tirando paralelas por los otros puntos de division g, f, e y c, estas paralelas dividirán la recta A B en cinco partes iguales.

El fundamento de esta construccion es el teorema del número 508.

2ª Construccion.—Con el fin de evitar la necesidad de tirar muchas paralelas, se emplea el siguiente procedimiento (fig. 189):

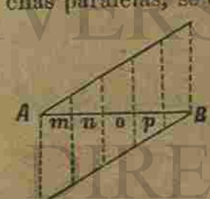

Figura 189.

En los dos extremos de la recta dada se tiran dos paralelas de longitud indefinida: sobre cada una de ellas y partiendo de los puntos A y B, se llevan cinco partes iguales, y uniendo respectivamente los puntos de division de ambas paralelas por rectas, estas dividirán A B en los puntos m, n, o y p en 5 partes iguales. Como las rectas que determinan estas divisiones son paralelas, por lados opuestos de paralelógramos, el fundamento de esta construccion es el mismo que el de la anterior.

II.—*Dividir una recta A B* (fig. 190) *en partes proporcionales á las de otra recta C D.*

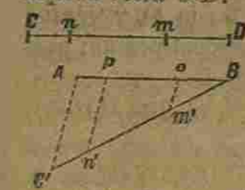

Figura 190.

En el extremo B se construye un ángulo cualquiera. Sobre la recta B C', se llevan las partes B m', m' n', y n' C' iguales respectivamente á las de la recta D C: se unen los puntos C' y A y se tiran paralelas á A C' por los puntos n' y m'. Estas paralelas dividirán á A B en p y en o en partes proporcionales á las de C D (509).

III.—*Construir una cuarta proporcional á tres líneas dadas,* m, n y p (fig. 191).

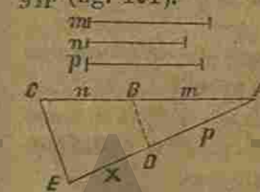

Figura 191.

Supongamos que los términos de la proporcion han de estar en este órden:

$$m : n :: p : x$$

Fórmese el ángulo A y sobre uno de sus lados llévense las magnitudes que forman la primera razon, A B=m, y B C=n. Sobre el otro lado del ángulo llévese A D=p.

Tírese la recta B D y por C una paralela, la parte E D será la cuarta proporcional pedida.

En efecto (510) se tiene

$$AB : BC :: AD : DE$$

sustituyendo

$$m : n :: p : DE$$

luego D E es la cuarta proporcional buscada.

IV.—*Construir una tercera proporcional á dos líneas dadas* m y n (fig. 192).

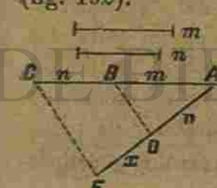

Figura 192.

Como se sabe, se llama tercera proporcional de dos cantidades, el cuarto término de una proporcion contínua. Si suponemos que el órden de los términos de la proporcion ha de ser el siguiente:

$$m : n :: n : x$$

la construccion será idéntica á la del problema anterior. Formando un ángulo A se llevarán sobre uno de sus lados magnitudes iguales á los términos de la primera razon: A B=m y B C=n. Sobre el otro lado se tomará A D=n. Se reunirá B con D, y tirando C E paralela á B D, la D E será la tercera proporcional pedida; pues (510) se tiene:

$$AB : BC :: AD : DE$$

y sustituyendo

$$m : n :: n : DE$$

luego

$$DE = x$$

SEMEJANZA DE FIGURAS

513.—*Se llaman figuras semejantes las que tienen sus ángulos respectivamente iguales, y sus lados homólogos proporcionales.*

En general *se entiende por lados homólogos, los que están adyacentes á ángulos iguales.* En los triángulos, como la suma de los tres ángulos vale dos rectos, los lados de los triángulos que están adyacentes á ángulos iguales, forzosamente quedarán opuestos á ángulos iguales. Por esta causa, *en los triángulos los lados homólogos están opuestos á ángulos iguales.*

514.—*Una recta D E* (fig. 193) *paralela á uno de los lados B C de un triángulo, determina otro triángulo semejante al primero.*

Figura 193.

Los dos triángulos A B C y A D E tienen comun el ángulo A; B=A E D y C=A D E por correspondientes.

Ademas (510—2°)

$$AB : AE :: AC : AD$$

y (510—3°)

$$AB : AE :: BC : ED$$

luego

$$AB : AE :: AC : AD :: BC : ED$$

así es, que teniendo los ángulos iguales y los lados homólogos proporcionales, los triángulos serán semejantes.

515.—*Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales.*

Sean los triángulos A B C y A' B' C' (fig. 194) que tienen los ángulos

$$A = A' \text{ y } B = B'$$

siendo estos dos ángulos iguales (434—4°) el tercero tambien lo será y se tendrá C=C'

Si sobre B A se lleva una parte B D=B' A' y sobre B C se toma B E=B' C' y se tira D E, se tendrá el triángulo B D E igual á B' A' C' (385) por ser el ángulo B=B' formado por lados respectivamente iguales. Por la igualdad de los triángulos, B D E=A' y por hipótesis A=A', luego B D E=A; como estos ángulos son correspondientes, D E será paralela al lado A C (415). Ahora bien: siendo D E paralela á A C (514) el triángulo B D E será semejante á A B C; pero como B D E es igual á A' B' C', se infiere que este triángulo será semejante á A B C.

516.—*Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual, formado por lados proporcionales.*

Figura 194.

Sea el ángulo B=B' (fig. 194) y

$$AB : A'B' :: BC : B'C'.$$

Si pusiéramos el triángulo A' B' C' sobre A B C, haciendo coincidir el ángulo B' con B, por ser iguales estos ángulos, el lado B' A', tomaria la direccion de B A, y B' C' tomaria la de B C; reuniendo los puntos D y E en que suponemos que caen A' y C' se tendrá el triángulo B D E igual á A' B' C' por tener un ángulo igual formado por lados iguales (385). Como por el supuesto se tiene

$$AB : A'B' :: BC : B'C'$$

sustituyendo sus iguales, resulta

$$AB : BD :: BC : BE$$

luego la recta D E que corta en partes proporcionales los lados del triángulo, será paralela al lado A C (511) y por tanto los triángulos A B C y B D E serán semejantes por ser equiángulos, pero como B D E es igual á A' B' C', este triángulo tambien será semejante á A B C.

517.—*Dos triángulos serán semejantes cuando tengan sus tres lados respectivamente proporcionales.*

Figura 195.

Sean los triángulos A B C y A' B' C' (fig. 195) en los que se tiene A B : A' B' :: B C : B' C' :: A C : A' C', y vamos á demostrar que son equiángulos. Para esto sobre el lado A' B' construyamos un ángulo B' A' C''=A y A' B' C''=B, con lo que resulrá el triángulo A' B' C'' semejante á A B C (515) por lo que se tendrá:

A B : A' B' :: B C : B' C'' :: A C : A' C''

pero conforme al supuesto

A B : A' B' :: B C : B' C' :: A C : A' C'

por ser en estas dos séries de razones los antecedentes iguales, los consecuentes tambien lo serán; y se tendrá en los triángulos A' B' C' y A' B' C''

A' B' comun, B' C''=B' C' y A' C''=A' C'

por lo que el triángulo A' B' C'' será igual á A' B' C' (386); pero como el primero es semejante á A B C, tambien A' B' C' lo será.

518.—En resúmen, *los triángulos son semejantes:* 1° *cuando tienen dos ángulos iguales:* 2° *cuando tienen un ángulo igual formado por lados proporcionales:* 3° *cuando tienen sus tres lados respectivamente proporcionales:* 4° *cuando tienen sus lados paralelos*, pues estónces serán equiángulos: y 5° *cuando tienen sus tres lados respectivamente perpendiculares*, tambien por ser equiángulos (422).

Repetiremos que *en los triángulos semejantes, los lados homólogos son los opuestos á ángulos iguales; y en el 5° caso los lados perpendiculares son los homólogos.*

519.—*Dos polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes.*

Figura 196.

Sean dos polígonos regulares de 6 lados [fig. 196.]

Por ser regular cada polígono, serán iguales entre sí los lados y los ángulos. La suma de los ángulos interiores del polígono A B C.... F vale 4 veces 2 rectos, y cada ángulo $\frac{4}{3}$ de ángulo recto. Otro tanto sucederá en el polígono A' B' C' D' E' F' en el que cada ángulo tambien valdrá $\frac{4}{3}$ de ángulo recto; luego los dos polígonos tendrán sus ángulos iguales. Para probar que los lados son proporcionales, basta observar que A B=B C=C D, etc., y que

A' B'=B' C'=C' D' etc,

luego dividiendo ordenadamente estas ecuaciones:

A B : A' B' :: B C : B' C' :: C D : C' D'....

520.—*Dos polígonos semejantes A B C D E*, a b c d e *pueden descomponerse en triángulos semejantes* [fig. 197].

Figura 197.

Si desde uno de los vértices, A, por ejemplo, se tiran diagonales, los polígonos quedarán divididos en triángulos que, vamos á demostrar, serán semejantes.

El triángulo A B C es semejante á a b c, porque por ser los polígonos semejantes, el ángulo B=b y los lados que lo forman serán proporcionales, esto es, A B : a b :: B C : b c (516).

Los triángulos A C D y a c d serán semejantes por tener el ángulo A C D=a c d formado por lados proporcionales.

En efecto, B C D=b c d por ángulos del polígono.
B C A=b c a por ángulos de los triángulos semejantes á A B C y a b c.

Restando las ecuaciones A C D=a c d.

En razon de ser los polígonos semejantes
se tiene: B C : b c :: C D : c d
y por serlo los triángulos B C : b c :: A C : a c
luego C D : c d :: A C : a c

Del mismo modo se demostraria que son semejantes los triángulos A D E y a d e.

521.—*Recíprocamente dos polígonos compuestos de triángulos semejantes, dispuestos de la misma manera son semejantes.*

En efecto, (fig. 197), por ser semejantes los triángulos A B C y a b c, el ángulo B=b y A B: a b :: B C : b c.

Además el ángulo B C A=b c a.

Por ser semejantes los triángulos A C D y a c d serán iguales los ángulos A C D=a c d.

sumando estas ecuaciones se tiene:

B C D=b c d.

Por la semejanza de los triángulos se tiene.

B C : b c :: A C : a c
y A C : a c :: C D : c d
luego B C : b c :: C D : c d

De una manera análoga se demostraria que el ángulo C D E=c d e, que E=e y que

C D : c d :: E D : e d :: E A : e a.

Así es que los polígonos tienen sus lados proporcionales y sus ángulos iguales.

522.—*Si desde uno de los vértices de un polígono A se tiran diagonales y por un punto b de uno de los lados se tiran paralelas b c, c d y d e á los otros lados, el polígono A b c d e que resulte, será semejante al primero* (fig. 198).


Figura 198.

La razon de esto es que el nuevo polígono A b c d e resultará formado por triángulos semejantes y dispuestos de la misma manera. (521) Los triángulos son semejantes por ser equiángulos.

523.—*Los perímetros de dos polígonos semejantes, son proporcionales á sus lados, ó á sus líneas homólogas.*

Por ser semejantes los polígonos, se tiene (fig. 197).

A B : a b :: B C : b c :: C D : c d :: D E : d e :: E A : e a

y fundándonos en que la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente tendremos:

A B+B C+C D etc. : a b+b c+c d etc. :: A B : a b

llamando *P* el perímetro de un polígono y *p* el del otro, y sustituyendo:

P : p :: A B : a b.

En virtud de la semejanza de los triángulos se tiene:

A B : a b :: A C : a c

luego P : p :: A C : a c

lo que se ha demostrado respecto á esta diagonal podria demostrarse de cualquiera otra línea que tuviese una posicion semejante ú homóloga en ámbos polígonos.

524.—Problemas de semejanzas de figuras.—I.—*Sobre la recta d construir un triángulo semejante á A B C.*

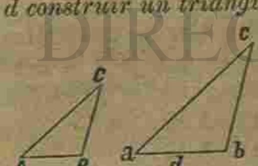
Figura 199.

(Fig. 199). Es preciso saber á qué lado del triángulo conocido debe ser homóloga la recta dada. Suponiendo que lo sea de A B, en sus dos extremos se construirán los ángulos a=A y b=B, y prolongando los lados se tendrá el triángulo pedido a b c (515).

II. *Sobre una recta dada h construir un polígono semejante á otro A B C D E.*

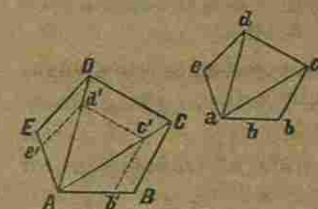
Figura 200.

(Fig. 200). Sabiendo que h debe ser el lado homólogo de A B, se tirarán las diagonales A C, A D, y sobre h se construirá el triángulo a b c semejante á A B C. En seguida sobre a c, como homólogo de A C, se construirá el triángulo a c d semejante á A C D; y por último, sobre a d, como homólogo de A D, se construirá el triángulo a d e semejante á A E D.

Tambien puede resolverse el problema llevando el lado h sobre su homólogo A B de A á b', tirar por este punto la paralela b' c' á B C. en c' tirar c' d' paralela á C D, y por d' tirar d' e' paralela á D E. Así quedaria formado el polígono A b' c' d' e' semejante á A B C D E. En seguida sobre h se construiria el polígono a b c d e igual á A b' c' d' e'.

El arte de levantar planos consiste en construir sobre el papel figuras semejantes á las de un terreno dado, para lo cual comunmente lo que se hace es descomponer en triángulos la figura cuya extension se trata de determinar, y dibujar en el papel, sujetándose á una escala dada, triángulos semejantes á los del terreno.

LINEAS PROPORCIONALES EN LOS TRIANGULOS.

525.—*Varias rectas A B, A C, A D y A E que parten de un mismo punto A son cortadas en partes proporcionales por dos paralelas B E y F G.*


Figura 201.

Comparando los lados homólogos de los triángulos A B C y A F H; A C D y A H L; A D E y A L G que son semejantes por ser equiángulos, se tiene:

A B : A F :: A C : A H

A C : A H :: A D : A L

A D : A L :: A E : A G

De una manera análoga se demostraría que el ángulo C D E=c d e, que E=e y que

C D : c d :: E D : e d :: E A : e a.

Así es que los polígonos tienen sus lados proporcionales y sus ángulos iguales.

522.—*Si desde uno de los vértices de un polígono A se tiran diagonales y por un punto b de uno de los lados se tiran paralelas b c, c d y d e á los otros lados, el polígono A b c d e que resulte, será semejante al primero* (fig. 198).


Figura 198.

La razon de esto es que el nuevo polígono A b c d e resultará formado por triángulos semejantes y dispuestos de la misma manera. (521) Los triángulos son semejantes por ser equiángulos.

523.—*Los perímetros de dos polígonos semejantes, son proporcionales á sus lados, ó á sus líneas homólogas.*

Por ser semejantes los polígonos, se tiene (fig. 197).

A B : a b :: B C : b c :: C D : c d :: D E : d e :: E A : e a

y fundándonos en que la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente tendremos:

A B+B C+C D etc. : a b+b c+c d etc. :: A B : a b

llamando *P* el perímetro de un polígono y *p* el del otro, y sustituyendo:

P : p :: A B : a b.

En virtud de la semejanza de los triángulos se tiene:

A B : a b :: A C : a c

luego P : p :: A C : a c

lo que se ha demostrado respecto á esta diagonal podria demostrarse de cualquiera otra línea que tuviese una posicion semejante ú homóloga en ámbos polígonos.

524.—Problemas de semejanzas de figuras.—I.—*Sobre la recta d construir un triángulo semejante á A B C.*


Figura 199.

(Fig. 199). Es preciso saber á qué lado del triángulo conocido debe ser homóloga la recta dada. Suponiendo que lo sea de A B, en sus dos extremos se construirán los ángulos a=A y b=B, y prolongando los lados se tendrá el triángulo pedido a b c (515).

II. *Sobre una recta dada h construir un polígono semejante á otro A B C D E.*

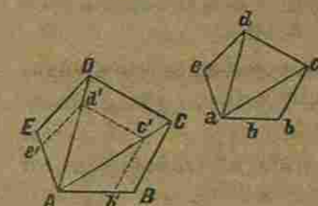
Figura 200.

(Fig. 200). Sabiendo que h debe ser el lado homólogo de A B, se tirarán las diagonales A C, A D, y sobre h se construirá el triángulo a b c semejante á A B C. En seguida sobre a c, como homólogo de A C, se construirá el triángulo a c d semejante á A C D; y por último, sobre a d, como homólogo de A D, se construirá el triángulo a d e semejante á A E D.

Tambien puede resolverse el problema llevando el lado h sobre su homólogo A B de A á b', tirar por este punto la paralela b' c' á B C. en c' tirar c' d' paralela á C D, y por d' tirar d' e' paralela á D E. Así quedaria formado el polígono A b' c' d' e' semejante á A B C D E. En seguida sobre h se construiria el polígono a b c d e igual á A b' c' d' e'.

El arte de levantar planos consiste en construir sobre el papel figuras semejantes á las de un terreno dado, para lo cual comunmente lo que se hace es descomponer en triángulos la figura cuya extension se trata de determinar, y dibujar en el papel, sujetándose á una escala dada, triángulos semejantes á los del terreno.

LINEAS PROPORCIONALES EN LOS TRIANGULOS.

525.—*Varias rectas A B, A C, A D y A E que parten de un mismo punto A son cortadas en partes proporcionales por dos paralelas B E y F G.*


Figura 201.

Comparando los lados homólogos de los triángulos A B C y A F H; A C D y A H L; A D E y A L G que son semejantes por ser equiángulos, se tiene:

A B : A F :: A C : A H

A C : A H :: A D : A L

A D : A L :: A E : A G

y como la última razon de cada proporcion es la primera de la siguiente, se tiene:

A B : A F :: A C : A H :: A D : A L :: A E : A G

que es lo que se tenia que demostrar.

526.—*Dos paralelas F G y B E quedan cortadas en partes proporcionales por varias rectas A B, A C, etc., que concurren en un punto A.* (Fig. 201).

Comparando los lados homólogos de los triángulos semejantes, se tiene:

A C : A H :: B C : F H
A C : A H :: C D : H L
luego B C : F H :: C D : H L (1)
A D : A L :: C D : H L
A D : A L :: D E : L G
luego C D : H L :: D E : L G (2)

comparando las proporciones (1) y (2) se tiene por último:

B C : F H :: C D : H L :: D E : L G

que es lo que se tenia que demostrar.

527.—*Recíprocamente siempre que dos paralelas A E y B F sean cortadas en partes proporcionales por varias rectas A B, C D, E F, prolongadas, estas concurrirán en un mismo punto* (fig. 202).

Figura 202.

Prolongando A B y C D concurrirán en el punto O, y si supusiéramos que E F prolongada no concurriera en el mismo punto O, deberia concurrir otra recta que partiendo de E pasara á la derecha ó á la izquierda de F como E i, y en tal concepto tendriamos:

Conforme á la hipótesis del teorema

A C : B D :: C E : D F

y por concurrir E i prolongada en O (526)

A C : B D :: C E : D i

Siendo los tres primeros términos de estas proporciones iguales, tendrá que serlo el cuarto, esto es, D i = D F lo que es un absurdo y prueba que E i no concurrirá en el punto O á ménos que coincida con E F.

528.—*En todo triángulo A B C* (fig. 203) *la bisectriz B O de un ángulo divide el lado opuesto A C en partes directamente proporcionales á los lados A B y B C del ángulo.*

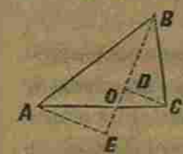

Figura 203.

Desde C y A bájense las perpendiculares C D y A E á la bisectriz B O prolongada, y resultarán los triángulos A B E y B C D semejantes, por ser ambos rectángulos y tener el ángulo A B E=C B D (515). Como en triángulos semejantes los lados homólogos son proporcionales, tendrémos A B opuesto á E, es con su homólogo B C, opuesto al ángulo B D C, como A E opuesto á A B E es con su homólogo C D, opuesto á C B D.

A B : B C :: A E : C D.

Por otra parte, los triángulos A O E y O C D son semejantes por tener el ángulo E=C D O por rectos, y A O E=C O D por opuestos al vértice. Comparando los lados homólogos de estos triángulos, lo que se hace buscando los lados que están opuestos á los ángulos iguales, tendrémos:

A E : C D :: A O : C O

suprimiendo la razon comun entre esta y la anterior proporcion, resultará demostrado el teorema

A B : B C :: A O : C O

529.—*La bisectriz del ángulo exterior C B E* (fig. 204) *de un triángulo corta el lado A C prolongado en un punto F, cuyas distancias á los puntos A y C son proporcionales á los lados del ángulo B, esto es, se tendrá*

F A : F C :: B A : B C

Figura 204.

Demostracion.—Si por C tiramos C D paralela á la bisectriz B F, se tiene (510 2°):

A F : F C :: A B : B D

pero el triángulo B C D es isósceles, por tener el ángulo B D C=E B F por correspondientes, y B C D=F B C por alternos internos, y como E B F=F B C por mitades de E B C; B D C=B C D, de lo que se infiere que B D=B C.

Sustituyendo en la anterior proporcion, resultará demostrado el teorema:

$$AF : FC :: AB : BC$$

530.—*Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular á la hipotenusa, se verificarán tres cosas: 1° los triángulos parciales serán semejantes al triángulo total, y semejantes entre sí: 2° la perpendicular es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa: y 3° cada lado del ángulo recto es medio proporcional entre toda la hipotenusa y el segmento adyacente.*

Figura 205.

1° Para demostrar la primera parte del teorema, tenemos en la fig. 205 que el triángulo parcial A C D es semejante al total A B C porque tienen el ángulo C comun y ambos son rectángulos (515). El otro triángulo parcial A D B es semejante al total porque tienen el ángulo B comun y son ambos rectángulos. Siendo cada uno de los triángulos parciales semejantes al total, serán semejantes entre sí.

2° Para demostrar que la perpendicular A D es media proporcional entre los dos segmentos C D y B D de la hipotenusa, bastará comparar los lados homólogos, buscando como ántes lo hemos explicado (528), los opuestos á ángulos iguales, de los triángulos A C D y A D B y se tiene:

$$CD : AD :: AD : DB$$

3° Para demostrar la tercera parte del teorema basta comparar los lados homólogos de uno de los triángulos parciales con el total:

Comparando	A C D	$CD : AC :: AC : CB$
Idem	A D B	$BD : AB :: AB : CB$

C D es lo que se llama la proyeccion de A C sobre la hipotenusa C B.

531.—*El valor numérico del cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.*

Si en las dos últimas proporciones del teorema anterior formamos el producto de extremos y lo igualamos al de los medios, se tiene:

$$CD \times CB = AC^2$$
$$BD \times CB = AB^2$$

sumando estas ecuaciones y sacando á C B como factor comun, resulta:

$$(CD + BD)\, CB = AC^2 + AB^2$$

pero como en la figura: $CD + BD = CB$, sustituyendo obtendrémos

$$CB^2 = AC^2 + AB^2$$

que es lo que debiamos demostrar.

Debemos repetir que el producto de dos líneas, así como la segunda potencia de una recta, generalmente es el producto de los números que expresan las relaciones de estas líneas á la unidad de longitud.

532.—De aquí se infiere que *el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa ménos el cuadrado del otro cateto;* pues despejando en la última ecuacion á AC^2 ó á AB^2 se tiene:

$$AC^2 = CB^2 - AB^2 \text{ y } AB^2 = CB^2 - AC^2$$

533.—*En un triángulo oblicuángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más el doble producto de uno de estos lados por la proyeccion del otro sobre éste.*

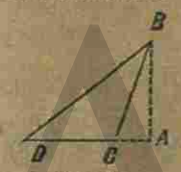

Figura 206.

Esto es, si desde el vértice B (fig. 206) bajamos la perpendicular B A sobre el lado D C prolongado, C A será la proyeccion del lado B C sobre D C, y deberá tenerse

$$DB^2 = BC^2 \times DC^2 + 2\, DC \times CA$$

Demostracion.—Considerando el triángulo rectángulo A B D se tiene:

$$DB^2 = BA^2 + AD^2 \ldots [1]$$

Determinarémos los valores de BA^2 y de AD^2, y en seguida los sustituirémos en esta ecuacion. El triángulo rectángulo B C A nos da

$$BA^2 = BC^2 - CA^2$$

y

$$AD^2 = (AC + CD)^2 = AC^2 + 2\, AC \times CD + CD^2$$

sustituyendo los valores de BA^2 y de AD^2 en la ecuacion [1] se obtiene:

$$DB^2 = BC^2 - CA^2 + AC^2 + 2\, AC \times CD + CD^2$$

reduciendo, resulta demostrado el teorema

$$DB^2 = BC^2 + DC^2 + 2\, AC \times CD$$

534.—*En un triángulo oblicuángulo, el cuadrado de un lado opuesto al ángulo agudo, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, ménos el doble producto de uno de estos lados por la proyeccion del otro sobre éste.*


Figura 207.

Esto es, si desde el vértice B (fig. 207) bajamos la perpendicular B D sobre A C, D C será la proyeccion del lado B C sobre A C, y se tendrá

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2\,AC \times DC$$

DEMOSTRACION.—En el triángulo rectángulo A B D se tiene

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 \ldots . [1]$$

Determinarémos los valores de BD^2 y de AD^2 para sustituirlos en esta expresion. El triángulo rectángulo B D C da

$$BD^2 = BC^2 - DC^2$$

y

$$AD^2 = (AC - DC)^2 = AC^2 - 2\,AC \times DC + DC^2$$

sustituyendo los valores de BD^2 y AD^2 en la ecuacion (1) se obtiene

$$AB^2 = BC^2 - DC^2 + AC^2 - 2\,AC \times DC + DC^2$$

reduciendo

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2\,AC \times DC$$

con lo que queda demostrado el teorema.

535.—Así, pues, conforme á los dos últimos teoremas y al del número 531, el cuadrado de un lado de un triángulo es *mayor, igual ó menor* que la suma de los cuadrados de los otros dos lados, segun que el ángulo opuesto es *obtuso, recto ó agudo.* Si representamos por a, b y c los lados del triángulo, y por p la proyeccion del lado c sobre b tendrémos:

$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b\,p$ cuando A es *obtuso.*
$a^2 = b^2 + c^2$,, A es *recto.*
$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,p$,, A es *agudo.*

Estas fórmulas servirán para calcular el valor de un lado, ó para determinar la especie del ángulo opuesto, cuando se conocen las otras cantidades qué entran en ellas.

536.—PROBLEMAS DE LINEAS PROPORCIONALES.—I. *Dividir una recta A B* (fig. 208) *en partes proporcionales á las de otra dada* m p.

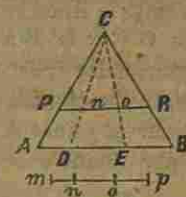
Figura 208.

Constrúyase sobre A B un triángulo equilátero A C B; desde el vértice C llévese una línea C P= m p, y sobre ella constrúyase el triángulo equilátero C P R. Siendo P R=m p sobre ella se llevarán las partes P n, n o, y o R respectivamente iguales á mn, no y o p, y tirando desde C las rectas Cn y Co, prolongadas determinarán sobre A B partes proporcionales á las de la recta dada (526).

II. *Dividir la recta A B en 5 partes iguales* (fig. 209).

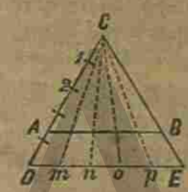
Figura 209.

Sobre A B constrúyase el triángulo equilátero A B C; desde C y sobre C A llévense cinco partes iguales, prolongando este lado si fuere necesario; tómese C E=C D y tirando D E se tendrá el triángulo equilátero C D E; llévense de D á E cinco partes iguales á las tomadas sobre C D y reuniendo los puntos de division m, n, o, p con C, quedará dividida A B en cinco partes iguales (526).

III. *Dividir una recta A B* (fig. 210) *en partes proporcionales á dos rectas dadas* m *y* n.

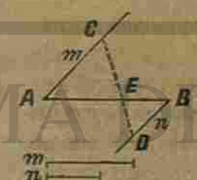
Figura 210.

Por el punto A tírese la recta A C indefinida, y por B la paralela B D; sobre la primera tómese A C=m y sobre la segunda B D=n; reúnase C con D y la recta A B quedará dividida en E en partes A E y B E proporcionales á *m* y *n.*

En efecto, los triángulos A E C y B E D son semejantes por tener iguales los ángulos A y B por alternos internos, y los en E por opuestos al vértice [515]; luego sus lados homólogos serán proporcionales.

$$AC : BD :: AE : EB$$

sustituyendo

$$m : n :: AE : EB$$

IV.—*Tirar una tangente interior comun á dos círculos dados.*

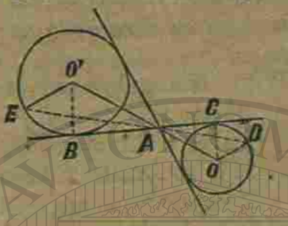

Figura 211.

Si suponemos el problema resuelto por medio de la recta B C [fig. 211], tangente comun á los dos círculos, y tiramos la línea de los centros O O' y los radios O C y O' B á los puntos de contacto, resultarán dos triángulos A O C y A O' B que serán semejantes, y nos servirán para determinar el punto A de la línea de los centros por donde debe pasar la tangente pedida.

Los triángulos A O C y A O' B son semejantes por ser rectángulos y tener iguales los ángulos en A por opuestos al vértice. Siendo semejantes, sus lados homólogos serán proporcionales; luego

O C : O' B :: O A : O' A

Esta proporcion nos indica, que para determinar el punto A por donde debe pasar la tangente interior comun á los dos círculos, basta dividir la línea de los centros O O' en partes proporcionales á los radios, lo cual nos sirve de fundamento á la siguiente

Construccion.—Tírese en uno de los círculos un radio cualquiera O D, y en el otro círculo un radio que le sea paralelo en sentido contrario O' E, y tirando la recta E D ésta dividirá la línea O O' de los centros en partes proporcionales á los radios, supuesto que comparando los triángulos semejantes A O D y A O' E se tiene

O D : O' E :: O A : O' A

Si desde el punto así determinado, se tira una tangente á uno de los círculos, ésta será tambien tangente al otro.

V.—*Tirar una tangente exterior comun á dos círculos dados.*

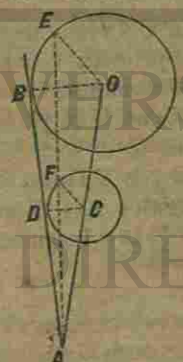

Figura 212.

Si por medio de la B D (fig. 212), tangente exterior comun á los dos círculos, suponemos resuelto el problema, y tiramos la línea de los centros O C y los radios O B y C D, prolongando la tangente y la línea de los centros resultarán los triángulos semejantes O B A y C D A, que nos servirán para determinar el punto A de la línea de los centros por el que debe pasar la tangente pedida.

Los triángulos O B A y C D A son semejantes por ser rectángulos y tener el ángulo en A comun. Siendo semejantes sus lados homólogos, serán proporcionales, luego

O B : C D :: O A : C A

dividiendo

O B—C D : C D :: O C : C A

Esta proporcion nos indica que el punto donde concurren la tangente exterior con la línea de los centros, debe ser tal, que pueda establecerse la siguiente proporcion: la diferencia de los radios es al radio menor, como la línea de los centros es á su prolongacion, en la cual solo el cuarto término es desconocido. Esta propiedad nos servirá de fundamento para la siguiente

Construccion.—Tírese un radio cualquiera O E, y por el punto C otro en el mismo sentido que le sea paralelo C F, reuniendo E con F y prolongando E F hasta su interseccion con la línea de los centros se determinará el punto A, desde el cual, si se tira una tangente exterior á uno de los círculos, lo será tambien al otro.

En efecto, se tiene en los triángulos O B A y C D A

O B : C D :: O A : C A

dividiendo

O B—C D : C D :: O C : C A....[1]

y en los triángulos O E A y C F A

O E : C F :: O A : C A

dividiendo

O E—C F : C F :: O C : C A....[2]

siendo iguales los tres primeros términos de las proporciones [1] y [2] tendrá que serlo el cuarto.

VI.—*Dadas dos rectas A B y C D* (fig. 213) *que no pueden prolongarse, tirar por un punto O una recta que pase por su punto de concurso.*

Figura 213.

Por el punto O tírese una recta cualquiera E F, en seguida trácese la paralela B C, y dividiendo esta recta en partes proporcionales á E O y O F, se determinará el punto G (536 III). La recta O G pasará por el punto desconocido de concurso [527].

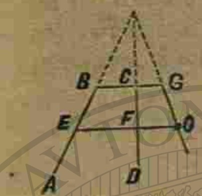

Figura 214.

Si el punto O es exterior (fig. 214), se tirará la recta O E; por B se hará pasar una paralela indefinida, y construyendo una cuarta proporcional á las rectas E F, F O y B C, que llevarémos de C á G, tendrémos resuelto el problema por la recta O G, que será la pedida [527].

VII.—*Construir una tercera proporcional* (fig. 215) *á dos líneas dadas* m *y* n.

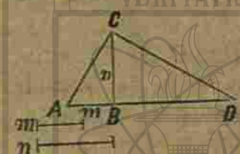

Figura 215.

Sobre A B=m levántese la perpendicular B C =n; tírese A C, y levantando por la extremidad C la perpendicular C D y prolongando A B, se tendrá que B D es la tercera proporcional pedida. En efecto, en el triángulo A C D se tiene [530—2°]

A B : B C :: B C : B D

sustituyendo

m : n :: n : B D

LINEAS PROPORCIONALES EN EL CIRCULO.

537.—*Dos cuerdas que pasan por un punto interior O* (fig. 216) *de un círculo, se cortan en partes recíprocamente proporcionales.*

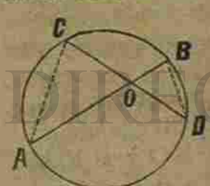

Figura 216.

Se dice que dos rectas se cortan en partes recíprocamente proporcionales, cuando las dos partes de una recta forman los extremos de una proporcion, y las otras dos partes los medios. Así en el presente caso se debe tener

A O : O D :: O C : O B

Tirando las cuerdas C A y B D resultan los triángulos A O C y

B O D, que serán semejantes en virtud de que el ángulo C=B por tener la misma medida, y A=D por igual razon. Siendo semejantes, los lados homólogos serán proporcionales, y comparando los lados opuestos á los ángulos iguales, se tiene:

A O : O D :: O C : O B

que es lo que se debia demostrar.

538.—*La ordenada C D* (fig. 217) *al diámetro en un punto cualquiera C, es media proporcional entre los dos segmentos del diámetro.*

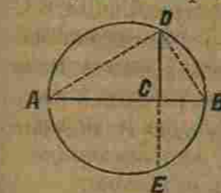

Figura 217.

Esto es, se tiene:

A C : C D :: C D : C B

Como se habrá comprendido, se llama *ordenada* la perpendicular C D levantada en un punto del diámetro y que termina en la circunferencia.

Prolongada esta ordenada, el teorema anterior conduce á la siguiente proporcion:

A C : C D :: C E : C B

pero como C D=C E (477)

resulta A C : C D :: C D : C B

539.—Si se tiran las cuerdas A D y B D, como el ángulo A D B es recto (485); resulta por el teorema anterior en el triángulo rectángulo que la perpendicular C D es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa. Ademas [530—3°] en el mismo triángulo se tiene:

A B : A D :: A D : A C

luego *toda cuerda tirada por el extremo del diámetro es media proporcional entre todo el diámetro, y su proyeccion sobre el mismo diámetro.*

540.—*Dos secantes A B y A C* (fig. 218) *tiradas desde un mismo punto, son recíprocamente proporcionales á sus partes externas A D y A E.*

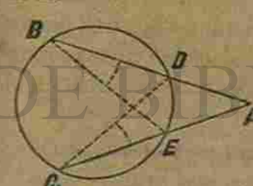

Figura 218.

Esto es, debiendo formar una secante y su parte externa los extremos de una proporcion, y la otra secante y su parte externa los medios, debe demostrarse que

A B : A C :: A E : A D

para esto tiremos las cuerdas B E y D C, y resultarán formados los triángulos A B E y A C D, que serán semejantes [515] por tener el ángulo en A comun y B=C por tener la misma medida, $\frac{ED}{2}$; buscando y comparando los lados homólogos de estos triángulos, llegarémos á la proporcion

$$AB : AC :: AE : AD$$

541.—*Si desde un mismo punto A* (fig. 219) *se tiran una tangente y una secante á un círculo, la tangente A B será media proporcional entre toda la secante y su parte externa.*

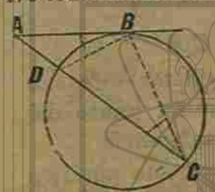

Figura 219.

Tirando las cuerdas B D y B C, resultarán los triángulos A B C y A B D, que serán semejantes [515] por tener el ángulo A comun y C=A B D, supuesto que están medidos ambos por la mitad del mismo arco B D. Buscando y comparando los lados homólogos, obtendrémos esta proporcion:

$$AC : AB :: AB : AD$$

que es lo que se tenia que demostrar.

542.—*Si en un punto B* (fig. 220) *de la circunferencia se tira una tangente igual al diámetro, y por el extremo A se traza una secante que pase por el centro del círculo, la secante quedará dividida en media y extrema razon.*

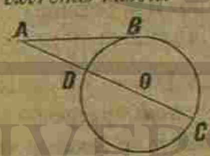

Figura 220.

Se dice que una recta A C queda dividida en media y extrema razon, cuando la parte mayor D C es media proporcional entre toda la recta A C y su parte menor A D.

Conforme á la hipótesis del teorema, tenemos A B igual á D C, y segun el teorema anterior

$$AC : AB :: AB : AD$$

sustituyendo

$$AC : CD :: CD : AD$$

que es lo que se debia demostrar.

543.—*Los perímetros de dos polígonos regulares del mismo número de lados, inscritos ó circunscritos en círculos diferentes, son proporcionales á los radios de los círculos.*

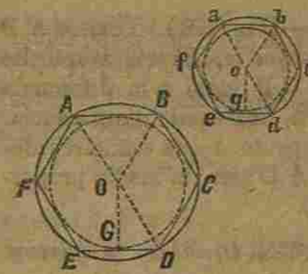

Figura 221.

(Fig. 221). Sean A B C D...... y a b c d.... los polígonos que considerarémos primero inscritos en los círculos.

Por ser polígonos semejantes (519) tendrémos (523):

A B C D.... : a b c d.... :: A B : ab

Tirando los radios A O y O B, o a y o b resultarán los triángulos O A B y o a b que serán semejantes por ser equiángulos, luego

$$AB : ab :: OA : oa$$

suprimiendo la razon comun de estas dos proporciones, se tiene:

A B C D.... : a b c d.... :: O A : o a

Considerémos ahora los polígonos circunscritos. Tracemos los rádios rectos y oblícuos O G y O D, o g y o d, y resultarán los triángulos O G D y o g d, que serán semejantes por equiángulos, por lo que

$$OG : og :: OD : od$$

Antes teniamos

A B C D.... : a b c d.... :: O D : o d

luego A B C D.... : a b c d.... :: O G : o g

544.—PROBLEMAS DE LÍNEAS PROPORCIONALES EN EL CÍRCULO.—I. *Construir una média proporcional entre dos líneas dadas:* m, n.

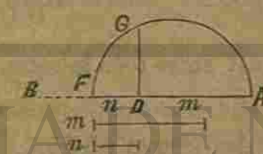

Figura 222.

1ª *Construccion.*—(Fig. 222). Sobre una recta indefinida A B se toman A D=m, y á continuacion D F=n: sobre A F como diámetro se traza una semicircunferencia y se levanta en D la perpendicular D G, la cual será la média porporcional entre A D y D F (538), que hemos tomado respectivamente iguales á m y n.

223.

2ª *Construccion.*—(Fig. 223). Tómese A B igual á la recta mayor m, sobre esta recta como diámetro trácese una semicircunferencia, llévese sobre el diámetro A B la parte A C=n, levántese en el punto C la perpendicular C D, y tirando la cuerda A D, ésta será la média proporcional pedida (539).

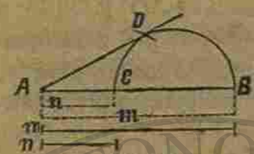

Figura 224.

3ª *Construccion.*—(Fig. 224). Tómese A B igual á la recta mayor m, llévese sobre ella A C = n, y sobre C B igual á la diferencia entre m y n trácese una semicircunferencia. Si tiramos A D tangente á esta semicircunferencia, esta recta A D será la media proporcional pedida (541).

II.—*Dividir una línea dada* A B (fig. 225) *en média y extrema razon.*

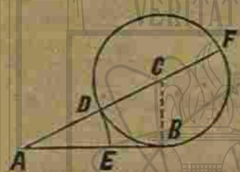

Figura 225.

Construccion.—Por el extremo B de la recta se levantará una perpendicular C B$=\frac{AB}{2}$; haciendo centro en C y con el rádio B C trácese una circunferencia de círculo; tírese la secante A F que pase por el centro del círculo, y si desde A como centro con el rádio A D se describe el arco D E, la recta A B quedará dividida en E en média y extrema razon.

Demostracion.—Habiendo tomado el rádio C B$=\frac{AB}{2}$, la tangente A B será igual al diámetro, y además es média proporcional entre A F y A D (541), por lo cual tendrémos

	A F : A B :: A B : A D
sustituyendo	A F : D F :: A B : A E
Dividiendo	A F–D F : D F :: A B–A E : A E
sustituyendo	A E : A B :: E B : A E
invirtiendo	A B : A E :: A E : E B

luego la parte mayor A E será média proporcional entre toda la recta y su parte menor.

III.—*Estando inscrito al círculo un polígono regular* A B C D, (fig. 226) *inscribir en el mismo círculo otro polígono de un número doble de lados, y encontrar el valor de uno de los lados del segundo polígono.*

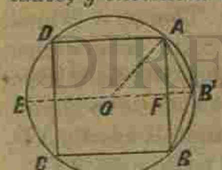

Figura 226.

Dividamos por la mitad el arco A B en B', y tiremos las cuerdas A B' y B B' éstas serán los lados del polígono pedido. La primera parte del problema quedará resuelta, si partiendo de los vértices del polígono llevamos la cuerda A B' por toda la circunferencia. (501—III y IV).

Para determinar el valor del lado A B' en funcion de A B y del rádio del círculo, se tiene (539):

$$AB'^2 = B'E \times B'F \dots\ (1)$$

por otra parte

$$B'F = B'O - OF = B'O - \sqrt{AO^2 - AF^2}\ (532)$$

y como $AF = \frac{AB}{2}$

$$B'F = B'O - \sqrt{AO^2 - \frac{AB^2}{4}}$$

sustituyendo este valor en la ecuacion (1), se tiene:

$$AB'^2 = B'E\left(B'O - \sqrt{AO^2 - \frac{AB^2}{4}}\right)$$

si hacemos A B = a, A O = r, y A B' = x, sustituyendo se obtiene:

$$x^2 = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}\right) = 2r^2 - 2r\sqrt{\frac{4r^2 - a^2}{4}}$$

y extrayendo raíz

$$x = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}} \dots\ (2)$$

cuya fórmula nos dará el valor de x.

En el caso de que el rádio sea igual á la unidad, la fórmula (2) se convertirá en

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}},$$

ó á fin de hacerla más propia para ser calculable por logaritmos (251—III).

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{(2+a)(2-a)}} \dots\ (3)$$

las fórmulas (2) y (3) nos servirán para determinar el valor del lado del polígono regular de un número doble de lados de otro conocido, lo cual equivale á resolver este problema: *dada la cuerda* a *de un arco, determinar la cuerda* x *del arco de su mitad.*

IV.—*Dado el perímetro de un polígono regular inscrito de cierto número de lados, determinar la longitud del perímetro del polígono semejante circunscrito.*

Figura 227.

Conocida la longitud del perímetro A B C D (fig. 227), y el número de lados, podrá fácilmente obtenerse el valor de un lado. Como además se conoce el rádio del círculo en que están inscritos y circunscritos los polígonos, el problema tiene por objeto determinar el perímetro A' B' C' D' en funcion del rádio, del perímetro y del lado del polígono inscrito.

Siendo los polígonos semejantes, si llamamos p el perímetro del polígono inscrito, P el del circunscrito, r el rádio O M = O A del círculo y a el lado A B, tendrémos: (523).

$$P : p :: OM : ON$$

de donde
$$P = \frac{r\,p}{ON}$$

en el triángulo rectángulo O N A se tiene: (532)

$$ON = \sqrt{OA^2 - AN^2} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

sustituyendo en la ecuacion anterior resulta

$$P = \frac{r\,p}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{r\,p}{\sqrt{\frac{4r^2 - a^2}{4}}} = \frac{2\,r\,p}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

esto es (251—III) $P = \dfrac{2\,r\,p}{\sqrt{(2r+a)\,(2r-a)}}$ ......[1]

si se tiene el rádio igual á la unidad esta fórmula se convierte en

$$P = \frac{2\,p}{\sqrt{(2+a)\,(2-a)}} \;\ldots\ldots [2]$$

Las fórmulas [1] y [2] en sus respectivos casos nos servirán para resolver el problema propuesto, sustituyendo por a y por p sus valores que son conocidos.

RAZON DEL DIAMETRO A LA CIRCUNFERENCIA.

545.—*El círculo puede considerarse como un polígono regular de una infinidad de lados, infinitamente pequeños.*

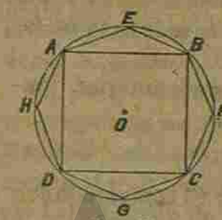

Figura 228.

Si consideramos el cuadrado A B C D inscrito en el círculo [fig. 228], tendrémos que por ser la línea recta la menor distancia entre dos puntos, cada uno de los lados del polígono será menor que el arco respectivo que subtende; luego la suma de los cuatro lados ó el perímetro A B C D será menor que la circunferencia.

Si dividimos en dos partes iguales cada uno de los arcos A B, B C, etc.; y tiramos las cuerdas correspondientes, resultará un octágono A E B F C...... regular inscrito, y tendrémos primero, que siendo $AB < AE + EB$ [425], $BC < BF + FC$, $CD < CG + GD$ etc.; si sumamos ordenadamente estas desigualdades resulta que *el perímetro del cuadrado es menor que el del octágono:* segundo, que siendo cada una de las cuerdas ó lados del octágono menor que el arco que subtenden, la suma de todas las cuerdas ó el *perímetro del octágono es menor que la circunferencia del círculo.*

Si nos imaginamos divididos los arcos A E, E B, etc., en dos partes iguales y tiradas cuerdas por los puntos de division, resultaria un polígono regular de 16 lados inscrito al círculo, y por un raciocinio idéntico al anterior inferiríamos: que el *perímetro del polígono de 16 lados es mayor que el de 8, pero menor que la circunferencia del círculo.*

Luego cuando el número de lados del polígono regular inscrito haya aumentado considerablemente, su perímetro se habrá aproximado tambien considerablemente á la circunferencia, por lo que se considera como el límite hácia el cual se van aproximando más y más los perímetros de los polígonos regulares inscritos, hasta llegar á ser iguales el polígono y el círculo cuando el número de lados es infinito y la magnitud de cada lado infinitamente pequeña.

IV.—*Dado el perímetro de un polígono regular inscrito de cierto número de lados, determinar la longitud del perímetro del polígono semejante circunscrito.*

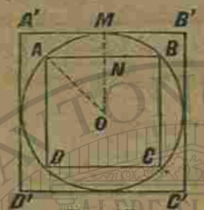

Figura 227.

Conocida la longitud del perímetro A B C D (fig. 227), y el número de lados, podrá fácilmente obtenerse el valor de un lado. Como además se conoce el rádio del círculo en que están inscritos y circunscritos los polígonos, el problema tiene por objeto determinar el perímetro A' B' C' D' en funcion del rádio, del perímetro y del lado del polígono inscrito.

Siendo los polígonos semejantes, si llamamos p el perímetro del polígono inscrito, P el del circunscrito, r el rádio O M=O A del círculo y a el lado A B, tendrémos: (523).

$$P : p :: OM : ON$$

de donde $$P=\frac{r\,p}{ON}$$

en el triángulo rectángulo O N A se tiene: (532)

$$ON=\sqrt{OA^2-AN^2}=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$$

sustituyendo en la ecuacion anterior resulta

$$P=\frac{r\,p}{\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}}=\frac{r\,p}{\sqrt{\frac{4r^2-a^2}{4}}}=\frac{2\,r\,p}{\sqrt{4r^2-a^2}}$$

esto es (251—III) $$P=\frac{2\,r\,p}{\sqrt{(2r+a)\,(2r-a)}}\ldots\ldots[1]$$

si se tiene el rádio igual á la unidad esta fórmula se convierte en

$$P=\frac{2\,p}{\sqrt{(2+a)\,(2-a)}}\ldots\ldots[2]$$

Las fórmulas [1] y [2] en sus respectivos casos nos servirán para resolver el problema propuesto, sustituyendo por a y por p sus valores que son conocidos.

RAZON DEL DIAMETRO A LA CIRCUNFERENCIA.

545.—*El círculo puede considerarse como un polígono regular de una infinidad de lados, infinitamente pequeños.*

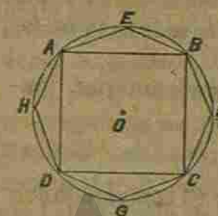

Figura 228.

Si consideramos el cuadrado A B C D inscrito en el círculo [fig. 228], tendrémos que por ser la línea recta la menor distancia entre dos puntos, cada uno de los lados del polígono será menor que el arco respectivo que subtende; luego la suma de los cuatro lados ó el perímetro A B C D será menor que la circunferencia.

Si dividimos en dos partes iguales cada uno de los arcos A B, B C, etc.; y tiramos las cuerdas correspondientes, resultará un octágono A E B F C...... regular inscrito, y tendrémos primero, que siendo $AB < AE + EB$ [425], $BC < BF + FC$, $CD < CG + GD$ etc.; si sumamos ordenadamente estas desigualdades resulta que *el perímetro del cuadrado es menor que el del octágono:* segundo, que siendo cada una de las cuerdas ó lados del octágono menor que el arco que subtenden, la suma de todas las cuerdas ó el *perímetro del octágono es menor que la circunferencia del círculo.*

Si nos imaginamos divididos los arcos A E, E B, etc., en dos partes iguales y tiradas cuerdas por los puntos de division, resultaria un polígono regular de 16 lados inscrito al círculo, y por un raciocinio idéntico al anterior inferiríamos: que el *perímetro del polígono de 16 lados es mayor que el de 8, pero menor que la circunferencia del círculo.*

Luego cuando el número de lados del polígono regular inscrito haya aumentado considerablemente, su perímetro se habrá aproximado tambien considerablemente á la circunferencia, por lo que se considera como el límite hácia el cual se van aproximando más y más los perímetros de los polígonos regulares inscritos, hasta llegar á ser iguales el polígono y el círculo cuando el número de lados es infinito y la magnitud de cada lado infinitamente pequeña.

546.—*Las circunferencias de los círculos son proporcionales á sus rádios y á sus diámetros.*

Como los perímetros de los polígonos semejantes son proporcionales á sus rádios, [543] y los círculos pueden considerarse como polígonos regulares de un número infinito de lados, si llamamos C, y C' dos circunferencias y r y r' sus rádios respectivos tendrémos:

$$C : C' :: r : r'$$

multiplicando por 2 los términos de la segunda razon

$$C : C' :: 2\,r : 2\,r'$$

que es lo que se debia demostrar.

547.—*La razon de la circunferencia al diámetro, es la misma en todos los círculos.*

Alternando medios en la última proporcion del párrafo anterior, tendrémos:

$$C : 2\,r :: C' : 2\,r'$$

en otro círculo cuya circunferencia sea C'' y su radio r'' comparado con el primero se tendria igualmente:

$$C : 2\,r :: C'' : 2\,r''$$

luego $\qquad C : 2\,r :: C' : 2\,r' :: C'' : 2\,r''$

y en general $\qquad \frac{C}{2r} = \frac{C'}{2r'} = \frac{C''}{2r''} = \frac{C'''}{2r'''}$

esta razon constante que existe en cualquier círculo entre la circunferencia y su diámetro se representa comunmente con la letra griega π, cuyo valor numérico vamos á ocuparnos de determinar.

548.—*Determinacion del valor numérico de la razon de la circunferencia al diámetro.*

El procedimiento que hemos emplado para determinar la relacion de magnitud entre dos líneas rectas, ó entre dos arcos de un mismo círculo ó de círculos iguales [482], como se ha visto se funda en la propiedad de poder descomponer las magnitudes que se comparaban en partes que podian sobreponerse; pero cuando comparamos una curva con una recta, ó arcos de círculos de rádios diferentes, como no es dable sobreponer los elementos de que constan estas magnitudes, tenemos que servirnos de un método indirecto para determinar con más ó ménos exactitud la relacion que entre ellas existe.

Acabamos de ver [545] que el perímetro de un polígono regular inscrito al círculo, es menor que la circunferencia, pero que miéntras mayor es el número de lados del polígono tanto mas se acerca al círculo. Por tanto, si en un círculo cuyo rádio sea la unidad, inscribimos un polígono y dividimos la longitud de su perímetro por el diámetro del círculo, obtendrémos un valor tanto más aproximado á $\pi = \frac{c}{2r}$ cuanto mayor sea el número de lados del polígono, pero siempre menor que π porque el perímetro del polígono es menor que el verdadero antecedente de la razon $\frac{c}{2r}$. Por otra parte, como la circunferencia del círculo es menor que el perímetro de un polígono regular circunscrito, si determinamos el valor de este perímetro y lo dividimos por el diámetro del círculo, obtendrémos un cuociente tanto más aproximado al valor de π, cuanto mayor sea el número de lados, pero siempre algo mayor que π, porque el perímetro del polígono circunscrito es mayor que el antecedente de la razon $\frac{c}{2r}$.

Si, pues, inscribimos y circunscribimos al mismo círculo dos polígonos regulares de un gran número de lados y semejantes, y tomamos el término medio entre la razon que existe entre cada uno de estos perímetros y el diámetro, este término medio se aproximará mucho á la verdadera razon de la circunferencia á su diámetro.

Fijadas así en general las bases de este procedimiento, para simplificar el cálculo, haremos las siguientes consideraciones. Supondrémos que el rádio del círculo es igual á la unidad. Además, como la misma razon hay entre todo el perímetro y el diámetro, que entre el semiperímetro y el rádio, siendo el rádio igual á 1 bastará calcular el valor del semiperímetro para tener en cada caso la razon del perímetro al diámetro. Partiendo del cuadrado inscrito calcularémos sucesivamente haciendo uso de la fórmula [3] del problema III del número 541, el valor del semiperímetro del polígono de 8 lados, de 16, 32, etc., lo que nos dará una razon algo aproximada de la circunferencia al diámetro, pero menor que la verdadera. En seguida calcularémos el semiperímetro del polígono circunscrito del mismo número de lados que el inscrito al fin, lo que nos dará un valor de la razon de la circunferencia al diámetro mayor que la verdadera; tomando el término medio entre estos valores se tendrá el que se busca con mucha aproximacion.

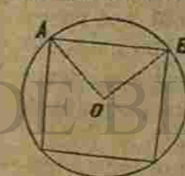

Figura 229.

Conforme á lo expuesto, si tomamos como base del procedimiento el cuadrado inscrito [fig. 229] y suponemos el rádio =1, en el triángulo rectángulo A O B el lado.

$$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{2}$$

y extrayendo esta raíz

$$A\,B = 1'4142135$$

Conocido este lado deberémos multiplicarlo por 2, mitad del número de lados del cuadrado, á fin de obtener el semiperímetro del cuadrado $= 2\sqrt{2} = 2'8284271$.

Este será el primer valor, aunque muy poco aproximado de π.

Para obtener otro, sustituirémos en la fórmula.

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}} \ldots. \; [1]$$

del problema III del número 544 por a su valor $\sqrt{2}$, y tendremos para el lado del octágono regular

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

y multiplicado por 4, mitad del número de lados, se tendrá:

$$\text{semiperímetro del octágono} = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 3'0614674$$

segundo valor aproximado de π.

Continuando el mismo procedimiento y sustituyendo en la fórmula citada, se encontraria sucesivamente el semiperímetro del polígono

$$\text{de 16 lados} = 8\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\text{de 32 lados} = 16\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

$$\text{de 64 lados} = 32\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$$

Es fácil en vista de estos resultados inferir la ley del modo de formacion de los siguientes, sin necesidad de sustituir en la fórmula [1] para obtener el semiperímetro de un polígono que conste de un número conocido de lados. Los resultados son los siguientes:

Núm. de lados.	Semiperímetros.
4	2'828 4271
8	3'061 4674
16	3'121 4451
32	3'136 5485
64	3'140 3311
128	3'141 2772
256	3'141 5138
512	3'141 5729
1024	3'141 5877
2048	3'141 5914
4096	3'141 5925

Conocido el valor del semiperímetro del polígono de 4096 lados inscrito al círculo, calcularémos el del circunscrito haciendo uso de la fórmula [2] del problema IV del párrafo 544.

$$P = \frac{2\,p}{\sqrt{(2+a)(2-a)}}$$

Si en ella sustituimos los valores correspondientes y efectuamos el cálculo, se tiene:

semiperímetro de 4096 lados circunscrito	$=3'1415927$
Idem de 4096 lados inscrito	$=3'1415925$
Suma	$=6'2831852$
El término medio será la mitad	$=3'1415926$

luego el valor numérico de la razon de la circunferencia al diámetro aproximado hasta las diez millonésimas, será:

$$\frac{C}{2\,r} = \pi = 3'1415926$$

En la práctica suele hacerse uso de otros dos valores aproximados de π.

El primero debido á Arquímedes es

$$\pi = \tfrac{22}{7}$$

y el 2º á Pedro Metius, es:

$$\pi = \tfrac{355}{113}$$

que es mucho más aproximado; nosotros, sin embargo, generalmente nos servirémos del de $\pi = 3'141593$.

549.—*Valor de la circunferencia en funcion del rádio ó del diámetro.*

Hemos visto que llamando π el valor numérico 3'141593 se tiene

$$\frac{C}{2r} = \pi$$

de donde $\qquad C = 2\,\pi\,r \ldots. \; [1]$

y como el diámetro $d = 2\,r$ sustituyendo resulta:

$$C = \pi\,d \;\ldots. \; [2]$$

Las fórmulas [1] y [2] nos sirven para calcular la circunferencia de un círculo conocido, su rádio ó su diámetro, y recíprocamente.

550.—Problemas de la circunferencia.—I.—*Determinar la longitud de la circunferencia de un círculo cuyo rádio es 25 metros.*

Sustituyendo en la fórmula

$$C = 2\,\pi\,r$$

se tiene $\qquad C = 2 \times 3'141593 \times 25 = \overset{m}{157}'07965$

II.—*Siendo la circunferencia de un círculo de* $\overset{m}{339}'292044$ *determinar la longitud del diámetro.*

En la fórmula $\qquad C = \pi\,d$

despejaremos á $\qquad d = \dfrac{C}{\pi}$

sustituyendo $\qquad d = \dfrac{339'292044}{3'141593} = 108$ metros.

III.—*Determinar la longitud de un arco de* 48° *en un círculo cuyo rádio es de* 10 *metros.*

La circunferencia de este círculo conforme á la fórmula

$$C = 2\,\pi\,r$$

es $\qquad C = 2 \times 3'141593 \times 10 = \overset{m}{62}'83186$

una simple proporcion nos dará la longitud del arco de 48°

$$360^\circ : 48^\circ :: \overset{m}{62}'83186 : x = \overset{m}{8}'37758$$

IV.—*Se quiere saber cuál será el número de grados de un arco de círculo, cuya longitud es de* 52 *metros y cuyo rádio es igual á* 15.

La circunferencia de este círculo será:

$$C = 2\,\pi\,r$$

sustituyendo $\qquad C = 2 \times 3'141593 \times 15 = \overset{m}{124}'247790$

una proporcion nos dará el número de grados del arco

$$\overset{m}{124}'247790 : \overset{m}{52} :: 360^\circ : x = 150^\circ - 40'$$

con poca diferencia.

V.—*Determinar la magnitud de un arco de* 60° *en partes del rádio.*

En este caso se supone el rádio $=1$. La circunferencia será

$$C = 2\,\pi\,r$$

sustituyendo $\qquad C = 2 \times 3'141593 \times 1 = \overset{m}{6}'283186$

estableciendo la proporcion:

$$360^\circ : 60^\circ :: 6'283186 : x = 1'047198$$

Esto es, siendo 1 el rádio, la longitud del arco de 60° será 1'047198 millonésimas.

SEGUNDA PARTE.

SUPERFICIES.

Preliminares.

551.—*Superficie es la extension en longitud y latitud prescindiendo del espesor ó grueso.*

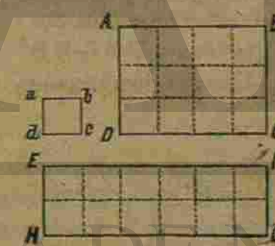

Figura 230.

La superficie de una figura es la extension comprendida entre las líneas que la limitan. Del mismo modo que la medida de una línea se obtiene refiriendo su longitud al número de veces que contiene otra línea escogida por unidad, para valuar una superficie es necesario determinar cuántas veces contiene la unidad de superficie. Al tratar del sistema de pesos y medidas (182 y 185) hemos visto que la unidad superficial es un cuadrado, y si representando esta unidad por a b c d (fig. 230) quisiéramos estimar la área ó fuperficie del rectángulo A B C D, bastaria averiguar cuántas veces el cuadrado está contenido en el rectángulo. En la figura que hemos tomado por ejemplo, diriamos que la área del rectángulo es de 12 medios centímetros cuadrados, porque 12 veces cabe la unidad superficial escogida, que es el medio centímetro cuadrado, en dicho rectángulo.

Se llaman figuras equivalentes las que tienen superficies iguales, y como se ha visto, figuras iguales son aquellas que sobreponiéndolas

$$C = 2\pi r$$

se tiene $C = 2 \times 3'141593 \times 25 = \overset{m}{157}'07965$

II.—*Siendo la circunferencia de un círculo de* $\overset{m}{339}'292044$ *determinar la longitud del diámetro.*

En la fórmula $C = \pi d$

despejaremos á $d = \dfrac{C}{\pi}$

sustituyendo $d = \dfrac{339'292044}{3'141593} = 108$ metros.

III.—*Determinar la longitud de un arco de* 48° *en un círculo cuyo rádio es de* 10 *metros.*

La circunferencia de este círculo conforme á la fórmula

$$C = 2\pi r$$

es $C = 2 \times 3'141593 \times 10 = \overset{m}{62}'83186$

una simple proporcion nos dará la longitud del arco de 48°

$$360^\circ : 48^\circ :: \overset{m}{62}'83186 : x = \overset{m}{8}'37758$$

IV.—*Se quiere saber cuál será el número de grados de un arco de círculo, cuya longitud es de* 52 *metros y cuyo rádio es igual á* 15.

La circunferencia de este círculo será:

$$C = 2\pi r$$

sustituyendo $C = 2 \times 3'141593 \times 15 = \overset{m}{124}'247790$

una proporcion nos dará el número de grados del arco

$$\overset{m}{124}'247790 : \overset{m}{52} :: 360^\circ : x = 150^\circ - 40'$$

con poca diferencia.

V.—*Determinar la magnitud de un arco de* 60° *en partes del rádio.*

En este caso se supone el rádio $=1$. La circunferencia será

$$C = 2\pi r$$

sustituyendo $C = 2 \times 3'141593 \times 1 = \overset{m}{6}'283186$

estableciendo la proporcion:

$$360^\circ : 60^\circ :: 6'283186 : x = 1'047198$$

Esto es, siendo 1 el rádio, la longitud del arco de 60° será 1'047198 millonésimas.

SEGUNDA PARTE.

SUPERFICIES.

Preliminares.

551.—*Superficie es la extension en longitud y latitud prescindiendo del espesor ó grueso.*

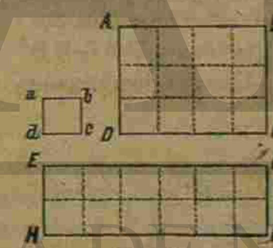

Figura 230.

La superficie de una figura es la extension comprendida entre las líneas que la limitan. Del mismo modo que la medida de una línea se obtiene refiriendo su longitud al número de veces que contiene otra línea escogida por unidad, para valuar una superficie es necesario determinar cuántas veces contiene la unidad de superficie. Al tratar del sistema de pesos y medidas (182 y 185) hemos visto que la unidad superficial es un cuadrado, y si representando esta unidad por a b c d (fig. 230) quisiéramos estimar la área ó superficie del rectángulo A B C D, bastaria averiguar cuántas veces el cuadrado está contenido en el rectángulo. En la figura que hemos tomado por ejemplo, diriamos que la área del rectángulo es de 12 medios centímetros cuadrados, porque 12 veces cabe la unidad superficial escogida, que es el medio centímetro cuadrado, en dicho rectángulo.

Se llaman figuras equivalentes las que tienen superficies iguales, y como se ha visto, figuras iguales son aquellas que sobreponiéndolas coinciden en todos sus puntos. Los rectángulos A B C D y E F G H son equivalentes porque tienen la misma superficie; pero, como se ve, no son iguales.

552.—Para determinar las áreas es de un uso frecuente escoger en los triángulos, y en los paralelógramos uno de sus lados como *base* de la figura, y se llama altura la perpendicular bajada sobre este lado del vértice ó del lado opuesto.

Figura 231.

Así (fig. 231) tomando A B por *base la altura* del triángulo es C D. En el triángulo E F G, considerando E F como base, la altura es G H, la cual, como se ve, cae sobre la prolongacion de la base. Por último, en el paralelógramo J O, la base es J K y la altura M L, la cual puede bajarse desde cualquier punto del lado opuesto á la base.

553.—*Un paralelógramo A B C D* [fig. 232] *y un rectángulo A B E F que tienen la misma base A B é igual altura, son equivalentes.*

Figura 232.

Siendo la altura del paralelógramo igual á la perpendicular E B, si prolongamos F E pasará por D C, y ejecutándolo resultarán dos triángulos A F D y B E C que serán iguales, [385] por tener el ángulo F A D = E B C, por estar formados por lados paralelos, y tener sus vértices en la misma direccion y F A=E B y A D=B C por lados opuestos de paralelógramo. Una vez demostrado

que el triángulo A F D=B E C

si sucesivamente restamos del trapecio A B C F cada uno de estos triángulos tendremos:

A B C F—A F D=A B C E—B E C

luego A B C D=A B E F en superficie, que es lo que se queria demostrar.

554.—*Dos paralelógramos de igual base é igual altura son equivalentes*, por ser cada uno de ellos equivalente á un rectángulo de la misma base y altura.

555.—*Un triángulo cualquiera A B C* [fig. 233] *es equivalente á la mitad de un paralelógramo de la misma base y altura.*

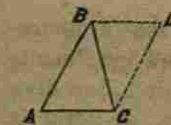

Figura 233.

Considerando A C como la base del triángulo, por el vértice B del ángulo opuesto tírese una paralela B D á A C, y por C una paralela C D á A B, resultará el paralelógramo A B D C de la misma base y altura que el triángulo; pero como los triángulos A B C y B C D son iguales (386), por tener B C comun, B D=A C y A B=C D por lados opuestos de paralelógramo, se infiere que el triángulo A B C será la mitad del paralelógramo que tiene la misma báse y altura que él.

556.—*Dos triángulos que tienen sus bases y alturas respectivamente iguales, son equivalentes;* porque cada uno de los triángulos es la mitad de paralelógramos equivalentes entre sí.

557.—*Dos rectángulos de la misma base son proporcionales á sus alturas.*

Puede suceder que las alturas sean *conmensurables* ó *inconmensurables* entre sí.

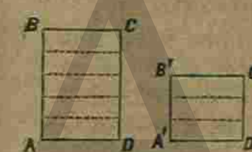

Figura 234

1° Si (fig. 234) se tienen los rectángulos A B C D y A' B' C' D' de bases iguales, A D =A' D' y cuyas alturas A B y A' B' sean *conmensurables*, de modo que, por ejemplo, dividiendo A' B' en tres partes iguales, cada una de éstas puede llevarse sobre A B cinco veces, en este supuesto resultará

A' B' : A B :: 3 : 5

Si por los puntos de division tiramos paralelas respectivamente á las bases A' D' y á A D quedará dividido el rectángulo A' C' en tres rectángulos, y el rectángulo A C en cinco rectángulos iguales todos entre sí por tener la misma base y altura, luego

rectángulo A' C' : rectángulo A C :: 3 : 5

suprimiendo la razon comun de estas dos proporciones, se tiene por último:

rectángulo A' C' : rectángulo A C :: A' B' : A B

que es lo que se tenia que demostrar.

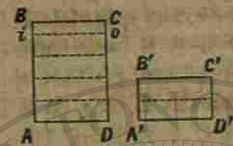

Figura 235.

2° Si las alturas A B y A' B' son *inconmensurables* (fig. 235) el teorema será igualmente cierto. Supongamos que despues de haber dividido A' B' en dos partes iguales, al llevar la magnitud de estas partes sobre A B resulte esta altura dividida en cuatro partes de A á i, quedando una resta i B, la que forzosamente será menor que una de las divisiones. Tirando por los puntos de division paralelas, quedarán divididos el rectángulo A' C' en dos rectángulos, y el rectángulo A C en cuatro rectángulos iguales entre sí, mas otro i C menor que los demas.

Considerando las porciones conmensurables, tendrémos conforme á lo que acabamos de demostrar:

$$\text{rectángulo } A'\,C' : \text{rectángulo } A\,o :: A'\,B' : A\,i$$

Como rect. A o=rect. A C—rect. i C, y A i=A B—B i sustituyendo se tiene:

$$\text{rect. } A'\,C' : \text{rect. } A\,C - \text{rect } i\,C :: A'\,B' : A\,B - B\,i$$

multiplicando entre sí los medios y los extremos

$$A\,B \times \text{rect. } A'\,C' - B\,i \times \text{rect. } A'\,C' = A'\,B' \times \text{rect. } A\,C - A'\,B' \times \text{rect. } i\,C$$

trasladando:

$$A\,B \times \text{rect. } A'\,C' - A'\,B' \times \text{rect. } A\,C = B\,i \times \text{rect. } A'\,C' - A'\,B' \times \text{rect. } i\,C$$

Una vez establecida esta ecuacion, vamos á demostrar que A B × rectángulo A' C' no puede ser desigual á A' B' × rectángulo A C. Si lo fueran, habria entre estos dos productos, cuyos factores todos son constantes, una diferencia d fija é independiente de la magnitud arbitraria de las partes en que se divida A' B' y se tendria:

$$A\,B \times \text{rect. } A'\,C' - A'\,B' \times \text{rect. } A\,C = d.$$

y por lo mismo $B\,i \times \text{rect. } A'\,C' - A'\,B' \times \text{rect. } i\,C = d.$

Si en vez de dividir A' B' en *dos* partes iguales, la dividiéramos en 20 ó en 2,000, y llevando la magnitud de estas partes sobre A B, por los puntos de division tiráramos paralelas, resultaria que la recta B i y el rectángulo i C podrian hacerse sucesivamente más y más pequeños,

y los productos de que son factores podrian ir disminuyendo tanto como se quisiera. Así es, que siendo d constante por expresar la diferencia entre cantidades fijas: A B × rect. A' C' y A' B' × rect. A C, llegaria á tenerse, aumentando el número de divisiones de A' B', en la ecuacion:

$$B\,i \times \text{rect. } A'\,C' - A'\,B' \times \text{rect. } i\,C = d$$

pudiendo ser $B\,i < \frac{A'\,B'}{2}$, $B\,i < \frac{A'\,B'}{2{,}000}$ ó una fraccion tan pequeña como se quiera, llegaria á tenerse $B\,i \times \text{rect. } A'\,C' < d$; pero como no puede ser el minuendo menor que la resta, tampoco podrémos suponer desiguales los productos A B × rect. A' C' y A' B' × rect. A C, y siendo iguales se tendrá la proporcion

$$\text{rect. } A'\,C' : \text{rect. } A\,C :: A'\,B' : A\,B$$

que es lo que se debia demostrar.

558.—Como en un rectángulo puede tomarse la altura como base y ésta por altura, se infiere que *las áreas de los rectángulos que tienen sus alturas iguales, son proporcionales á sus bases.*

559.—*Dos rectángulos cualesquiera son entre sí como los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

Figura 236.

Sean A B C D y E F G H (fig. 236) dos rectángulos cualesquiera. Si suponemos sobrepuesto el rectángulo E G de manera que coincida el ángulo recto F con el D, tomará la posicion E' D G' H'. Si prolongamos el lado G' H' hasta M, se formará el paralelógramo A D G' M de la misma base que A C y de igual altura que D H'. Como el rectángulo D M y el A C tienen la misma base A D, serán proporcionales á sus alturas, y por tanto

$$\text{rect. } A\,C : \text{rect. } D\,M :: A\,B : D\,G' \ldots . [m]$$

Los rectángulos D M y D H' tienen la misma altura D G', luego serán proporcionales á sus bases, como lo expresa la siguiente proporcion:

$$\text{rect. } D\,M : \text{rect. } D\,H' :: A\,D : D\,E' \ldots [n]$$

multiplicando ordenadamente las proporciones [m] y [n], y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$\text{rect. } A\,C : \text{rect. } D\,H' :: A\,D \times A\,B : D\,E' \times D\,G'$$

sustituyendo

rect. A C : rect. F H :: A D × A B : F E × F G

que es lo que se tenia que demostrar.

560.—Problemas de figuras equivalentes.—I.—*Trasformar el polígono A B C D E* (fig. 237) *en otro equivalente que tenga un lado ménos.*

Figura 237.

Construccion.—Tírese la diagonal A C: por el vértice B del triángulo A B C que tiene esta diagonal por base, tírese B B' paralela á A C; si despues prolongamos el lado D C hasta su interseccion en B', con la paralela B B' y trazamos la recta A B', se tendrá el polígono A B' D E de un lado menos y equivalente á A B C D E.

Demostracion.—Tomando A C como base de los triángulos A C B y A C B', por estar los vértices opuestos B y B' sobre la misma paralela, tendrán sus alturas iguales; luego (556) los triángulos A C B y A C B' serán equivalentes. Si á cada uno de ellos se agrega el área de la figura A C D E, resultará A B C D E equivalente á A B' D E.

II.—*Trasformar un polígono A B C D E* (fig. 238) *en un triángulo equivalente.*

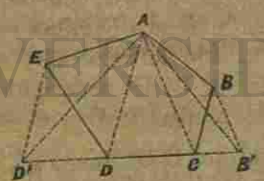

Figura 238.

Ejecutando la construccion del problema anterior, trasformarémos el pentágono A B C D E en el cuadrilátero equivalente A B' D E. En seguida, tirando la diagonal A D, la paralela E D' y la recta A D', trasformarémos el cuadrilátero A B' D E en el triángulo A B' D', el cual resolverá el problema, supuesto que es equivalente al cuadrilátero y éste al pentágono. Del mismo modo podrá reducirse á triángulo un polígono de mayor número de lados.

III.—*Trasformar un polígono A B C D* (fig. 239) *en otro equivalente que tenga un lado más.*

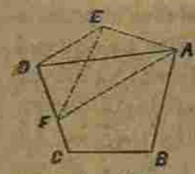

Figura 239.

Construccion.—Desde el vértice A tírese una recta indefinida A E que quede fuera del polígono y otra A F que toque el lado opuesto D C en un punto cualquiera F: por el vértice D del triángulo A F D tírese D E paralela á A F, y reuniendo los puntos E y F se tendrá el polígono A B C F E pedido.

Demostracion.—Los triángulos A F D y A F E tienen la misma base A F, y estando los vértices opuestos D y E sobre una paralela, tendrán alturas iguales, y por lo mismo serán equivalentes (556). Si á cada uno de los triángulos equivalentes A F D y A F E se agrega la parte comun A F C B resultará el polígono A B C D equivalente á A B C F E que tiene un lado más.

VALUACION DE LAS SUPERFICIES.

561.—Hemos dicho que para medir ó valuar la área de una figura, es necesario determinar el número de veces que contiene la área de otra figura escogida como término de comparacion, y que la unidad de superficie es un cuadrado cuyo lado es la unidad lineal.

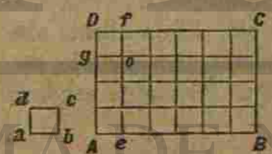

Figura 240.

Así, por ejemplo, si queremos medir la área del rectángulo A B C D (fig. 240), la compararémos á la del cuadrado a b c d, tomado como unidad, y determinarémos cuántas veces la unidad lineal a b, lado del cuadrado, está contenida en la base A B del rectángulo (6 veces en el caso que consideramos). Si por los puntos de division tiramos rectas perpendiculares á la base, resultarán 6 bandas ó rectángulos cuya base es la unidad y cuya altura es la del rectángulo A B C D. En seguida llevarémos la unidad lineal a d, lado del cuadrado, cuantas veces se pueda sobre la altura A D del rectángulo (4 en nuestro ejemplo), y tirando por los puntos de division paralelas á la base, resultará el rectángulo A B C D dividido en 6 bandas, cada una de las cuales contiene 4 cuadrados, ó en junto $6 \times 4 = 24$ unidades superficiales. Se vé, pues, que para valuar la área del rectángulo, se ha determinado el número de unidades lineales de que constan su base y su altura, y el producto de estos dos números expresa cuántas veces la unidad superficial a b c d está contenida en el repetido rectángulo.

Como puede suceder que la unidad lineal no esté contenida un número cabal de veces en la base y altura del rectángulo, valuarémos su área, fundándonos (559) en que dos rectángulos cualesquiera, son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas. Así, en la misma figura 240, se tiene:

$$\mathrm{A\,B\,C\,D} : \mathrm{a\,b\,c\,d} :: \mathrm{A\,B} \times \mathrm{A\,D} : \mathrm{a\,b} \times \mathrm{ad}$$

y como a b c d es la unidad superficial, y sus dos lados son iguales entre sí é iguales á la unidad, sustituyendo resulta:

$$\mathrm{A\,B\,C\,D} : 1 :: \mathrm{A\,B} \times \mathrm{A\,D} : 1 \times 1$$

luego despejando, resulta la área de

$$\mathrm{A\,B\,C\,D} = \mathrm{A\,B} \times \mathrm{A\,D}$$

por lo que en general se dice que *la área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura;* pero es preciso tener presente que en este modo abreviado, y tal vez impropio de expresar la superficie de un rectángulo, los lados A B y A D son los números que indican las veces que cada lado contiene á la unidad lineal, y que la área A B C D debe estar expresada en unidades superficiales, como centímetros cuadrados, metros cuadrados, pulgadas cuadradas, etc. En la última proporcion los términos de la primera razon expresarán, por ejemplo, metros cuadrados, y los factores de los términos que forman la segunda razon, indicarán metros lineales.

562.—En el caso de que los dos lados del rectángulo sean iguales, la figura será *un cuadrado* y *su área* estará *medida por la 2ª potencia ó el cuadrado de uno de sus lados.* De esto proviene que se llame *cuadrado* á la segunda potencia de un número.

563.—*La área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura,* supuesto que (553) el paralelógramo es equivalente á un rectángulo de su misma base y altura.

564.—*La área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura,* en razon de que (555) es equivalente á la mitad de un paralelógramo de igual base y altura.

565.—*La área de un trapecio es igual al producto de la semisuma de las bases paralelas por la altura.*

Figura 241.

Sea el trapecio A B C D (fig. 241). Tirando la diagonal A C, quedará descompuesto en dos triángulos A B C y A D C, que tendrán la misma altura E F, y si tomamos por bases respectivamente los lados paralelos del trapecio, se tiene:

área del triángulo $\mathrm{A\,B\,C} = \frac{1}{2}\,\mathrm{A\,B} \times \mathrm{E\,F}$

área del triángulo $\mathrm{A\,D\,C} = \frac{1}{2}\,\mathrm{D\,C} \times \mathrm{E\,F}$

sumando, el trapecio $\mathrm{A\,B\,C\,D} = \dfrac{\mathrm{A\,B} + \mathrm{D\,C}}{2} \times \mathrm{E\,F}$

que es lo que se tenia que demostrar.

Como $\dfrac{\mathrm{A\,B} + \mathrm{D\,C}}{2} = \mathrm{G\,H}$ (459) recta tirada á distancias iguales de las bases, puede decirse que *la área de un trapecio es igual al producto de su altura por la recta que une los medios de los lados no paralelos.*

566.—*La área de un polígono regular es igual á la mitad del producto de su perímetro por el rádio recto.*

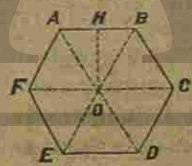

Figura 242.

Sea el polígono A B C D E F (fig. 242); si desde el centro O se tiran los rádios oblícuos O A, O B, O C.... resultarán tantos triángulos iguales como lados tenga el polígono regular.

La área de uno de estos triángulos

$$\mathrm{A\,O\,B} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{A\,B} \times \mathrm{H\,O}$$

luego si multiplicamos los dos miembros de esta ecuacion por 6, número de los lados del polígono, se tendrá:

área del polígono, $\mathrm{A\,B\,C\,D} \ldots = \frac{1}{2} \times 6\,\mathrm{A\,B} \times \mathrm{H\,O}$

pero 6 veces un lado A B es el perímetro, y H O es el rádio recto, si llamamos A la área del polígono, p su perímetro y r el rádio recto, en general se tendrá:

$$A = \tfrac{1}{2}\,p\,r$$

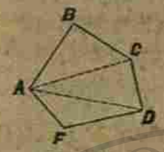

Figura 243.

567.—*La área de un polígono irregular* A B C D E (fig. 243) *es igual á la suma de las áreas de los triángulos que lo forman.* Comunmente se descompone en triángulos el polígono tirando diagonales desde uno de los vértices, y en seguida se determina el valor de la base y altura de cada uno de ellos.

568.—Expresiones del área del círculo.—Supuesto que el círculo puede considerarse como un polígono regular de una infinidad de lados extremadamente pequeños, *la área del círculo será igual á la mitad del producto de su circunferencia por el radio.* Así es que, si representamos por s la superficie de un círculo, por c su circunferencia y por r el rádio, se tiene:

$$s = \tfrac{1}{2}\, c \times r \ldots\ldots [1]$$

sustituyendo por c su valor [549] en funcion de π

$$c = 2\,\pi\, r$$

resulta $$s = \pi\, r^2 \ldots\ldots [2]$$

de cuya fórmula se hace un uso muy frecuente.

Si llamamos d el diámetro del círculo y sustituimos por r su valor: $\frac{d}{2}$ en la ecuacion [2] se tiene:

$$s = \pi \frac{d^2}{4} \ldots\ldots [3]$$

de cuya fórmula nos podrémos servir cuando se conozca el diámetro de un círculo, para determinar su área. Ya hemos visto que el valor numérico de π es de 3'141593 aproximadamente.

569.—Se llama *corona* la porcion de superficie comprendida entre dos círculos concéntricos.

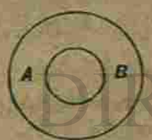

Figura 244.

La área de la corona A B [fig. 244] es igual á la del círculo mayor, ménos la del círculo menor. Si llamamos S la área del primero y R su rádio, s la área del círculo menor y r su rádio, tendrémos [568]:

$$S = \pi\, R^2$$
$$s = \pi\, r^2$$

luego la corona $= \pi\,[R^2 - r^2] = \pi\,[R + r]\,[R - r]$

de esta expresion resulta que *la área de una corona es igual al producto de la razon de la circunferencia al diámetro por la suma y por la diferencia de los rádios de los círculos que la forman.*

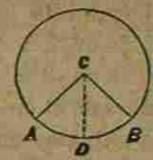

Figura 245.

570.—Se llama sector circular la porcion A D B C de un círculo comprendida entre dos rádios y el arco. Si el arco A B [fig. 245] se divide en dos partes iguales, A D y D B, y tiramos el rádio C D, resultarán dos sectores A D C y D B C iguales entre sí, porque si dobláramos la figura por C D, los arcos A D y D B coincidirian por ser iguales, C B se sobrepondria á C A por ser iguales tanto los ángulos B C D y D C A, como los rádios C B y C A. Si en vez de dividir el arco A B en dos partes iguales, lo dividiéramos en tres, cuatro, etc., partes iguales, resultarian tres, cuatro, etc., sectores iguales entre sí, por serlo las partes de que constan; luego *los sectores de un mismo círculo son proporcionales á los arcos.*

Por tanto, si comparamos la área del sector C A D B con la de todo el círculo, tendrémos:

sector C A D B : área del círculo :: arco A B : circunferencia del círculo:

sustituyendo: sector C A D B : $\pi\, r^2$ :: arco A B : $2\,\pi\, r$

de donde $$\text{sector C A D B} = \frac{\text{arco A B} \times \pi\, r^2}{2\,\pi\, r}$$

y reduciendo $$\text{sector C A D B} = \frac{\text{arco A B} \times r}{2}$$

luego *la área del sector circular es igual á la mitad del producto del arco rectificado por el rádio.*

571.—*La área de un trapecio circular* A B D E [fig. 246] *es igual á la semisuma de los arcos* A B *y* D E, *por la diferencia* A E *de los rádios.*

Figura 246.

Se llama trapecio circular la figura formada por dos arcos A B y D E de círculos concéntricos, y las porciones A E y B D de los rádios.

La área del trapecio circular, como puede verse en la figura, es igual á la del sector A B C ménos la del sector E D C.

Si hacemos el arco A B = A, el E D = a, A C = R y E C = r, tendrémos [570]:

$$\text{trapecio } A\,B\,D\,E = \frac{A.\,R}{2} - \frac{a\,r}{2} = \frac{A\,R - a\,r}{2} \;\ldots .\; [1]$$

por otra parte, como el ángulo A C B está medido en los dos círculos respectivamente por los arcos A B y E D, tendrán el mismo número de grados, y por tanto serán proporcionales á sus rádios; luego

$$A : a :: R : r$$

de donde $a\,R = A\,r \ldots .\; [2]$

Así es que la ecuacion [1] no se alterará si al numerador del 2° miembro le agregamos a R y le quitamos A r. Así pues,

$$\text{trapecio } A\,B\,D\,E = \frac{A\,R - a\,r + a\,R - A\,r}{2}$$

$$= \frac{A\,[R - r] + a\,[R - r]}{2} = \frac{[A + a]\,[R - r]}{2}$$

$$\text{luego, trapecio } A\,B\,D\,E = \frac{A + a}{2}\,[R - r]$$

que es lo que expresa el teorema.

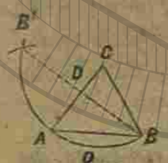

Figura 247.

572.—*La área del segmento* A O B A [fig. 247] *es igual á la área del sector* A O B C *ménos la del triángulo* A B C.

Si consideramos A C como la base del triángulo A B C, y bajamos la perpendicular B D á este lado, B D será la altura del triángulo, y esta recta B D, será la mitad de B B' cuerda del arco doble de A O B.

La área del sector $A\,O\,B\,C = \frac{1}{2}\,A\,C \times A\,O\,B$
la del triángulo $A\,B\,C = \frac{1}{2}\,A\,C \times B\,D$
restando: área del segmento $A\,O\,B\,A = \frac{1}{2}\,A\,C\,[A\,O\,B - B\,D]$

por esto se dice que *al área del segmento es igual á la mitad del producto del rádio por la diferencia entre el arco del segmento y la mitad de la cuerda del arco doble.*

Conociendo A B, se determina la cuerda B B' del arco doble despejando á *a* en la fórmula $x = \sqrt{2\,r^2 - r\sqrt{4\,r^2 - a^2}}$ del problema III

del núm. 544, en la que x representa á A B, y B B' está representada por *a*.

Así pues $\quad B\,B' = a = \sqrt{4\,r^2 - \left(\frac{2\,r^2 - x^2}{r}\right)^2}$

573.—PROBLEMAS DE VALUACIÓN DE ÁREAS.—I.—*Determinar el lado de un cuadrado equivalente á un triángulo conocido.*

Si llamamos *a* la altura y *b* la base del triángulo, su área será $\frac{a\,b}{2}$, y si representamos por *x* el lado del cuadrado buscado, su área será x^2; pero como debe ser

$$x^2 = \frac{a\,b}{2}$$

el valor de x puede determinarse sustituyendo los valores de a y de b en esta ecuacion, ó bien buscando gráficamente (544 — I) una média proporcional entre las líneas que representen la altura y la mitad de la base del triángulo, supuesto que de la ecuacion resulta:

$$a : x :: x : \frac{b}{2}$$

II.—*Determinar un triángulo equivalente á un polígono regular dado.*

Como la área del polígono es igual á la mitad del producto de su perímetro por el rádio recto, y la del triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura, bastará construir un triángulo que tenga por base el perímetro del polígono, y por altura el rádio recto, para resolver el problema.

III.—*Determinar un cuadrado equivalente á un círculo.*

Dado un círculo, conocerémos su rádio, y para resolver el problema hay que buscar la magnitud del lado del cuadrado. La área del círculo es igual á la mitad del producto de su circunferencia por el rádio, y como la del cuadrado es igual á la 2ª potencia de su lado, para determinar su magnitud bastará encontrar una média proporcional entre la mitad de la circunferencia y el rádio, bien sea calculándola ó construyéndola gráficamente, supuesto que si llamamos c la circunferencia del círculo, r su rádio y x el lado del cuadrado, debe tenerse:

$$\frac{c \times r}{2} = x^2$$

de donde

$$\frac{c}{2} : x :: x : r$$

Podemos resolver este problema de otro modo.

La área del círculo es: $S = \pi r^2$

La del cuadrado es $S = x^2$

supuesto que deben ser equivalentes, se tiene: $\pi r^2 = x^2$

Despejando á x resulta: $x = \sqrt{\pi r^2}$

Como la razon de la circunferencia al diámetro no ha podido expresarse exactamente por ningun valor numérico, tampoco se puede determinar con entera precision, ni la circunferencia ni la superficie del círculo; así es que solo puede resolverse aproximadamente este problema, que se llama de la cuadratura del círculo.

IV. *Determinar la área de un triángulo cuya base es de* 2025'56 *métros, y cuya altura es de* 108'25 *metros.*

La área del triángulo es igual á la mitad del producto de la base por la altura, así es que en el caso que consideramos, se tiene:

$$\text{Area} = \frac{b \times a}{2} = \frac{\overset{\text{m.}}{2025'56} \times 108'25}{2} = \overset{\text{m. cd.}}{109633'4350}$$

Así, pues, la área del triángulo es de 109633 metros cuadrados, y 4350 diezmilésimos de metro cuadrado.

Como en este caso las dimensiones de la figura estaban expresadas en metros lineales, la superficie resultó en metros cuadrados y fracciones decimales de metro cuadrado.

Si el valor obtenido en metros cuadrados lo quisiéramos trasformar en *aras* conforme á lo explicado en aritmética (183), bastaria dividir el número obtenido por 100. Así

$$\overset{\text{m. cd.}}{109633'4350} = \overset{\text{aras.}}{1096'334350}$$

Si las aras se quieren reducir á hectáras, se dividirán igualmente por 100, de modo que

$$\overset{\text{m. cd.}}{109633'4350} = \overset{\text{aras.}}{1096'33435} = \overset{\text{hectaras.}}{10'9633435}$$

Por el contrario, si los metros cuadrados se quieren reducir sucesivamente á decímetros cuadrados y estos á centímetros cuadrados, se tiene:

$$\overset{\text{m. cd.}}{109633'4350} = \overset{\text{decim. cd.}}{10963343'50} = \overset{\text{centim. cd.}}{1096334350}$$

V.—*Los lados contiguos de un rectángulo son de* 8500 *metros y de* 2556 *metros. Se quiere saber cuál es la área de este rectángulo expresada en miriaras.*

Siendo la área de un rectángulo igual al producto de su base por su altura se tiene:

$$\text{Area del rect.} = \overset{\text{m}}{8500} \times \overset{\text{m}}{2556} = \overset{\text{m cd.}}{21726000} = \overset{\text{miriaras.}}{21'726}$$

VI.—*¿Cuál seria el lado de un cuadrado equivalente á una caballería de tierra que contiene* 609408 *varas cuadradas?*

Llamando x el lado del cuadrado buscado debe tenerse

$$x^2 = 609408 \text{ varas cuadradas}$$

luego $x = \sqrt{609408} = 780$ varas 64 centésimas.

VII.—*Se quiere saber cuál es la área expresada en centímetros cuadrados, de un paralelógramo que tiene* $\overset{\text{m}}{3'2}$ *de base y* $\overset{\text{m}}{0'85}$ *de altura.*

Como la área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura, se tiene:

$$\text{Area del paralelógramo} = \overset{\text{m}}{3'2} \times \overset{\text{m}}{0'85} = \overset{\text{m. cd.}}{2'72} = \overset{\text{cent. cd.}}{27200}$$

VIII.—*¿Cuál es el número de aras que tiene un trapecio, cuyas bases son de* $\overset{\text{m}}{16'5}$ *y* $\overset{\text{m}}{28'22}$, *y cuya altura es de* 9 *metros?*

Como la área de un trapecio es igual al producto de la semisuma de sus bases por su altura, tendrémos:

$$\text{Area del trapecio} = \frac{\overset{\text{m}}{16'5} \times \overset{\text{m}}{28'22}}{2} \times 9 = \overset{\text{m. cd.}}{201'24} = \overset{\text{aras.}}{2'0124}$$

IX.—*Calcular la área de un exágono regular cuyo lado es de* $\overset{\text{m}}{32'2}$.

Como la área de un polígono regular es igual á la mitad del producto de su perímetro por el radio recto, es preciso averiguar la longitud de estas dos líneas.

El perímetro del exágono regular será igual á $\overset{\text{m}}{32'2} \times 6 = \overset{\text{m}}{193'20}$.

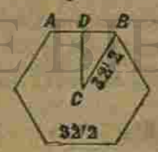

Figura 248.

En cuanto al radio recto, bastará observar en la (fig. 248) que si desde el centro del polígono se baja la perpendicular C D y el radio oblícuo C B, resultará el triángulo C B D cuya hipotenusa C B = A B = 32'2 [497], y cuyo cateto B D $= \frac{32'2}{2}$, luego (532)

$$C\,D^2 = 32'2^2 - \frac{32'2^2}{4} = 777'63$$

y $$C\,D = \sqrt{777'63} = 27'88$$

La área del exágono será $= \frac{1}{2}\,(193'20 \times 27'88) = \overset{m.\ cd.}{2693'208}$.

X.—Calcular la área de un círculo cuyo radio es de $\overset{m}{6325'28}$.

Sustituyendo en la fórmula [568] $s = \pi r^2$
se tiene: $s = 3'141593 \times (6325'28)^2$
haciendo el cálculo por logaritmos:

logarit.	3'141593..............	0'497 1499
logarit.	6325'28	3'801 0798
repitiéndolo		3'801 0798
		8'099 3095=log. 125 692 551

Así pues, la área del círculo es de 125 692 551 metros cuadrados.

XI.—Determinar el diámetro de un círculo cuya área es de 45238'9342 *varas cuadradas.*

La fórmula (3) del número 568 da

$$s = \frac{\pi\, d^2}{4}$$

despejando á $$d = \sqrt{\frac{4s}{\pi}}$$

sustituyendo $$d = \sqrt{\frac{4 \times 45238'9342}{3'141593}}$$

tomando los logaritmos.

Logaritmo 4........	0'602 0600
logaritmo 45238'9342.......	4'655 5123
	5'257 5723
menos log. 3'141593...	0'497 1499
	4'760 4224
$\frac{1}{2}$	2'380 2112 = log. 240

luego el diámetro será de 240 varas.

XII.—Se quiere determinar en piés cuadrados, la área de una corona formada por dos círculos cuyos radios son de 56 y de 42 varas.

La fórmula correspondiente [569] es:

$$s = \pi\,(R + r)\ (R - r)$$

sustituyendo $$s = \pi \times 98 \times 14$$

calculando por medio de logaritmos,

logaritmo 3'141593................	0'497 1499
logaritmo 98......................	1'991 2261
logaritmo 14......................	1'146 1280
	3'634 5040 = log. $\overset{varas\ cuad.}{4310'265}$

Como una vara cuadrada tiene 9 piés, la área de la corona expresada en piés cuadrados será de 38792'385.

XIII.—Determinar la área de un sector de círculo, cuyo radio es de $\overset{m}{14'5}$ *y el arco de 42°.*

La área del sector circular es igual (570) á la mitad del producto del arco rectificado por el radio.

Para determinar el valor del arco rectificado de 42° calcularémos primero la circunferencia del círculo cuyo radio es de $\overset{m}{14'5}$ por la fórmula (549):

$$\text{circunferencia} = 2\,\pi\,r$$

sustituyendo $$C = 2 \times 3'141593 \times \overset{m}{14'5} = \overset{m}{91'1062}.$$

En seguida se calculará la longitud del arco de 42° por medio de la proporcion:

$$360° : 42° :: 91'1062 : x = 10'629$$

La área del sector será $= \dfrac{10'629 \times 14'5}{2} = 77'06025$

XIV.—Determinar la área de un trapecio circular cuyos arcos son de 60° y cuyos radios son respectivamente de 41 y de 30 piés.

La fórmula correspondiente (571) es:

$$\text{trapecio circular} = \frac{A + a}{2}\,(R - r)\ldots.[1]$$

Así, pues, para poder sustituir en ella los valores numéricos, comenzarémos por determinar los arcos A y a de 60°.

$$C = 2\pi R = 2\pi 41 = 257'611$$

$$360° : 60° :: 257'611 : A = \overset{\text{piés.}}{42'935}$$

$$c = 2\pi r = 2\pi 30 = 188'496$$

$$360° : 60° :: 188'496 : a = 31'416$$

Sustituyendo en la fórmula (1),

$$\text{Area del trapecio} = \frac{42'935 + 31'416}{2}(41-30) = \overset{\text{piés cuad.}}{408'925}$$

XV.—*Determinar la área de un segmento de círculo cuyo radio es de 10 metros y cuyo arco es de 30°.*

La área del segmento circular es igual á la mitad del producto del radio por la diferencia entre el arco del segmento y la mitad de la cuerda del arco doble [572].

Así, pues, tendremos que determinar el arco rectificado de 30° en el círculo cuyo radio es de 10 metros, y la cuerda del arco de 60°.

La circunferencia del círculo es $2\pi r = 2\pi 10 = 62'832$.

$$360° : 30° :: 62'832 : \text{arco de } 30° = 5'236$$

En cuanto á la cuerda del arco de 60° hay fórmulas y tablas que dan el valor de la cuerda en funcion del número de grados del arco; pero, en nuestro caso, por ser el arco de 60° [497] la cuerda será igual al radio del círculo = 10 metros. Por tanto, la área del segmento

$$= \frac{10\,[5'236-5]}{2} = \overset{\text{m. cuad.}}{1'180}$$

COMPARACION DE LAS AREAS.

574.—*Las áreas de dos paralelógramos cualesquiera, son proporcionales á los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

Como la área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura, si representamos por P y p las áreas de los peralelógramos, por B y b sus bases y por A y a las alturas, se tiene:

$$P = B \times A$$

$$p = b \times a$$

Dividiendo una por otra estas ecuaciones, resulta:

$$\frac{P}{p} = \frac{B \times A}{b \times a}$$

ó

$$P : p :: B \times A : b \times a$$

que es lo que se debia demostrar.

575.—*Las áreas de dos triángulos cualesquiera son proporcionales á los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

Como la área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura, si llamamos T y t las áreas de los triángulss B y b sus bases, y A y a sus alturas, se tiene:

$$T = \frac{B \times A}{2}$$

$$t = \frac{b \times a}{2}$$

Dividiendo una por otra estas ecuaciones, y suprimiendo el denominador comun 2, resulta:

$$\frac{T}{t} = \frac{B \times A}{b \times a}$$

ó

$$T : t :: B \times A : b \times a$$

que es lo que expresa el teorema.

De aquí se infiere: 1° *que las áreas de los triángulos que tienen bases*

Así, pues, para poder sustituir en ella los valores numéricos, comenzarémos por determinar los arcos A y a de 60°.

$$C = 2\pi R = 2\pi\, 41 = 257'611$$
$$360° : 60° :: 257'611 : A = \overset{\text{piés.}}{42'935}$$
$$c = 2\pi r = 2\pi\, 30 = 188'496$$
$$360° : 60° :: 188'496 : a = 31'416$$

Sustituyendo en la fórmula (1),

$$\text{Area del trapecio} = \frac{42'935 + 31'416}{2}(41-30) = \overset{\text{piés cuad.}}{408'925}$$

XV.—*Determinar la área de un segmento de círculo cuyo radio es de 10 metros y cuyo arco es de 30°.*

La área del segmento circular es igual á la mitad del producto del radio por la diferencia entre el arco del segmento y la mitad de la cuerda del arco doble [572].

Así, pues, tendremos que determinar el arco rectificado de 30° en el círculo cuyo radio es de 10 metros, y la cuerda del arco de 60°.

La circunferencia del círculo es $2\pi r = 2\pi\, 10 = 62'832$.

$$360° : 30° :: 62'832 : \text{arco de } 30° = 5'236$$

En cuanto á la cuerda del arco de 60° hay fórmulas y tablas que dan el valor de la cuerda en funcion del número de grados del arco; pero, en nuestro caso, por ser el arco de 60° [497] la cuerda será igual al radio del círculo = 10 metros. Por tanto, la área del segmento

$$= \frac{10\,[5'236-5]}{2} = \overset{\text{m. cuad.}}{1'180}$$

COMPARACION DE LAS AREAS.

574.—*Las áreas de dos paralelógramos cualesquiera, son proporcionales á los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

Como la área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura, si representamos por P y p las áreas de los peralelógramos, por B y b sus bases y por A y a las alturas, se tiene:

$$P = B \times A$$
$$p = b \times a$$

Dividiendo una por otra estas ecuaciones, resulta:

$$\frac{P}{p} = \frac{B \times A}{b \times a}$$

ó

$$P : p :: B \times A : b \times a$$

que es lo que se debia demostrar.

575.—*Las áreas de dos triángulos cualesquiera son proporcionales á los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

Como la área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura, si llamamos T y t las áreas de los triángulss B y b sus bases, y A y a sus alturas, se tiene:

$$T = \frac{B \times A}{2}$$
$$t = \frac{b \times a}{2}$$

Dividiendo una por otra estas ecuaciones, y suprimiendo el denominador comun 2, resulta:

$$\frac{T}{t} = \frac{B \times A}{b \times a}$$

ó

$$T : t :: B \times A : b \times a$$

que es lo que expresa el teorema.

De aquí se infiere: 1° *que las áreas de los triángulos que tienen bases* *iguales serán proporcionales á sus alturas; y 2°, que las áreas de los triángulos que tienen alturas iguales son proporcionales á sus bases;* pues para demostrarlo basta suprimir el factor igual en la segunda razon de la anterior proporcion.

576.—*Las áreas de dos triángulos A B C y D E F* (fig. 249) *que tienen un ángulo igual, son proporcionales á los productos respectivos de los lados que forman el ángulo igual.*

Figura 249.

Si el ángulo B=E sobreponiendo los triángulos, el lado E D tomaria la posicion B D' y el lado E F la de B F', y reuniendo D' y F' se tendria el triángulo B D' F' igual á E D F, por tener un ángulo igual formado por dos lados respectivamente iguales. Ahora bien; tirando la recta A F' resultará el triángulo A F' B, en el que tomando B F' como base, tendrá la misma altura a que A B C; y si se toma B A como base tendrá la misma altura a' que B D' F'. Supuesto que estos triángulos tienen la misma altura serán proporcionales á sus bases (575—2°) y tendrémos:

$$A B C : A F' B :: B C : B F'$$

y

$$A F' B : B D' F' :: A B : B D'$$

multiplicando ordenadamente estas proporciones y suprimiendo el factor A F' B comun á los dos términos de la primera razon, resulta:

$$A B C : B D' F' :: B C \times A B : B F' \times B D'$$

y sustituyendo sus iguales

$$A B C : E D F :: B C \times A B : E F \times E D$$

que es lo que se queria demostrar.

577.—*Las áreas de los triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

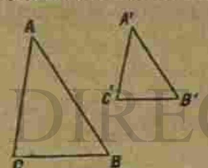

Figura 250.

Sean los triángulos A B C y A' B' C' (fig. 250) por ser semejantes tendrán sus ángulos iguales y sus lados homólogos proporcionales. Por ser el ángulo A=A' se tiene (576)

$$A B C : A' B' C' :: A C \times A B : A' C' \times A' B'$$

por lados homólogos $A C : A' C' :: A B : A' B'$

multiplicando estas proporciones ordenadamente y suprimiendo los factores iguales, resulta:

$$A B C : A' B' C' :: A B^2 : A' B'^2 \ldots. [1]$$

Como los triángulos son semejantes, se tiene:

$$A B : A' B' :: A C : A' C' :: B C : B' C'$$

elevando al cuadrado

$$A B^2 : A' B'^2 :: A C^2 : A' C'^2 :: B C^2 : B' C'^2$$

comparando esta série de razones con la proporcion [1] resulta:

$$A B C : A' B' C' :: A B^2 : A' B'^2 :: A C^2 : A' C'^2 :: B C^2 : B' C'^2$$

que es lo que se debia demostrar.

578.—*Las áreas de dos triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus bases ó de sus alturas.*

En el hecho de ser los triángulos semejantes, conforme al teorema del número anterior, sus áreas serán proporcionales al cuadrado de los *lados* que se tomen por base.

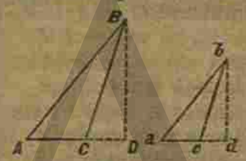

Figura 251.

Para demostrar que lo son al cuadrado de sus alturas, en los triángulos semejantes A B C, a b c (fig. 251) tomemos A C y a c por bases, tiremos las alturas B D y b d, y resultarán los triángulos B C D y b c d, que serán semejantes por ser rectángulos, y tener el ángulo B C D = b c d por ser suplementos respectivamente del ángulo B C A = b c a como ángulos de los triángulos semejantes.

Comparando los lados homólogos de los triángulos B C D y b c d,

se tiene $B C : b c :: B D : b d$

elevando al cuadrado $B C^2 : b c^2 :: B D^2 : b d^2$

Por otra parte, las áreas de los triángulos, por ser semejantes, estarán en la relacion de

$$A B C : a b c :: B C^2 : b c^2$$

luego $A B C : a b c :: B D^2 : b d^2$

que es lo que se debia demostrar.

579.—*Las áreas de dos polígonos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados ó de sus líneas homólogas.*

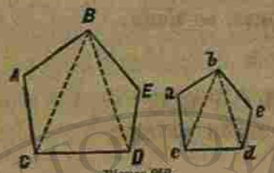

Figura 252.

Sean A B E D C y a b e d c (fig. 252) dos polígonos semejantes; si desde los vértices B y b se tiran diagonales, quedarán divididos en triángulos que serán respectivamente semejantes (520) y se tendrá:

$$ABC : abc :: AC^2 : ac^2 \ldots . [1]$$

$$BCD : bcd :: CD^2 : cd^2$$
$$BDE : bde :: DE^2 : de^2$$

Siendo semejantes los polígonos, sus lados y líneas homólogas serán proporcionales, y tendrémos:

$$AC : ac :: CD : cd :: DE : de$$

elevando al cuadrado esta serie de razones

$$AC^2 : ac^2 :: CD^2 : cd^2 :: DE^2 : de^2$$

por ser iguales las segundas razones de las tres primeras proporciones, se tiene:

$$ABC : abc :: BCD : bcd :: BDE : bde$$

Fundándonos en que la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente, tendrémos:

$$ABEDC : abedc :: ABC : abc \ldots . [2]$$

Suprimiendo la razon comun entre las proporciones [1] y [2], resulta:

$$ABEDC : abedc :: AC^2 : ac^2$$

Esta proporcion demuestra la primera parte del teorema, y como en vez de la razon $AC^2 : ac^2$ por la semejanza de los triángulos, puede ponerse la de otras líneas homólogas elevadas al cuadrado, quedará demostrado el teorema en todas sus partes.

580.—*Las áreas de los círculos son proporcionales á los cuadrados de sus radios ó de sus diámetros.*

Hemos visto que la área de un círculo (568) está expresada por la fórmula:

$$S = \pi R^2$$

la de otro círculo seria $\qquad s = \pi r^2$

Formando una proporcion con estas ecuaciones, se tiene:

$$S : s :: \pi R^2 : \pi r^2$$

suprimiendo el factor comun π de la segunda razon, resulta:

$$S : s :: R^2 : r^2 \ldots . (1)$$

Si en esta proporcion sustituimos por R y r sus valores en funcion del diámetro que expresarémos, por D y d, se tiene:

$$S : s :: \frac{D^2}{4} : \frac{d^2}{4}$$

multiplicando por 4 la segunda razon, resulta:

$$S : s :: D^2 : d^2 \ldots . (2)$$

quedando demostrado el teorema por medio de las proporciones (1) y (2)

581.—*Las áreas de dos sectores semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus radios, ó al cuadrado de sus arcos.*

Se dice que dos sectores son semejantes, cuando los arcos que los forman tienen el mismo número de grados.

Si representamos por S y s las áreas de los sectores, por A y a los arcos, y por R y r los radios, tendrémos (570):

$$S = \frac{AR}{2}$$

$$s = \frac{ar}{2}$$

de donde $\qquad S : s :: \frac{AR}{2} : \frac{ar}{2} \ldots . (1)$

Como los arcos de igual número de grados son proporcionales á los radios, se tiene:

$$A : a :: R : r \ldots . [2]$$

multiplicando estas proporciones y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$S : s :: R^2 : r^2$$

que es lo que expresa la primera parte del teorema. Para demostrar la segunda establecerémos la proporcion

$$R : r :: A : a \dots (3)$$

multiplicando ordenadamente los términos de esta proporcion por los de la (1) y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$S : s :: A^2 : a^2$$

que es lo que se debia demostrar.

582.—Es de mucho interés fijar la atencion en la correspondencia íntima que existe siempre entre las relaciones geométricas de una figura y las relaciones numéricas de sus líneas ó de sus áreas, que no vienen á ser sino la traduccion de las mismas propiedades en otro lenguaje. Así, pues, valiéndonos de esta correspondencia, hemos demostrado en muchos casos por medio del álgebra, teoremas de geometría, y otras veces por medio de la geometría podrán establecerse ó demostrarse fórmulas algebráicas.

Por vía de ejemplo, demostrarémos geométricamente una fórmula establecida en álgebra, y un teorema deducido de las propiedades de las líneas proporcionales.

583.—*Dadas las líneas* a *y* b (fig. 253), *determinar la relacion que existe entre estas rectas y el cuadrado de su suma.*

Figura 253.

Tómese A B=a, en seguida colóquese B C=b, y construirémos luego el cuadrado A C D E sobre el lado A C = a + b; tomando A F = a, y tirando por los puntos B y F las rectas B H y F Y paralelas, á los lados del cuadrado, se tendrá:

$$\text{sup. } A\,C\,D\,E = \text{sup. } (A\,G + C\,G + E\,G + G\,D)$$

El rectángulo C G, como fácilmente puede demostrarse, es igual á E G; así es que, sustituyendo:

$$A\,C\,D\,E = A\,G + 2\,C\,G + G\,D$$

y reemplazando estos valores geométricos por sus expresiones algebráicas, resulta:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

cuya fórmula hemos demostrado en aritmética al tratar de las partidas del cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades, y en álgebra al ocuparnos de la multiplicacion de los polinomios.

584.—*El cuadrado C H* (fig. 254) *formado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es equivalente á la suma de los cuadrados A D y A G formados sobre los catetos.*

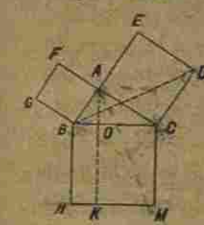

Figura 254.

Desde el vértice A del ángulo recto, bájese la perpendicular A O, prolónguese hasta K y tírense las rectas B D y A M.

El triángulo B C D es igual á A M C por tener el ángulo B C D = A C M formado por lados respectivamente iguales, B C = C M y C D = A C por lados de cuadrados. El ángulo B C D es igual á A C M porque cada uno de ellos está formado de un ángulo recto, más la parte comun A C B. Así, pues, se tiene:

$$\text{triángulo } B\,D\,C = A\,M\,C \dots (1)$$

El triángulo B D C tiene la misma base D C que el cuadrado A D, é igual altura, por estar comprendidos entre las paralelas C D y B E, luego

$$\text{sup. triángulo } B\,D\,C = \frac{\text{cuad. } A\,D}{2} \dots (2)$$

El triángulo A M C tiene la misma base C M que el rectángulo O C M K, é igual altura, por estar comprendidos entre las paralelas C M y A K, luego

$$\text{sup. triángulo } A\,M\,C = \frac{\text{rect. } C\,K}{2} \dots (3)$$

Siendo los primeros miembros de las ecuaciones (2) y (3) iguales entre sí (1) resulta que

$$\frac{\text{cuad. } A\,D}{2} = \frac{\text{rect. } C\,K}{2}$$

ó

$$\text{cuad. } A\,D = \text{rect. } C\,K \dots (4)$$

de una manera análoga puede demostrarse que

$$\text{cuad. } A\,G = \text{rect. } B\,K \dots (5)$$

sumando las ecuaciones (4) y (5), tenemos por último:

$$\text{cuad. } A\,D + \text{cuad. } A\,G = \text{cuad. } C\,H$$

que es lo que expresa el teorema, y lo mismo que habiamos demostrado en el núm. 531, de otro modo.

585.—Observacion.—Esta propiedad nos sirve para formar un cuadrado equivalente á la suma ó á la diferencia de dos cuadrados conocidos; pues si se construye un triángulo rectángulo A B C (fig. 254) en el que los catetos A B y A C sean los lados de los cuadrados conocidos, el cuadrado formado sobre la hipotenusa será equivalente á la suma de los cuadrados A G y A D; y el cuadrado construido sobre uno de los catetos será equivalente á la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el del otro cateto.

586.—Si observamos en la figura 254 que el cuadrado B C M H y los rectángulos B K y C K tienen la misma base B H = O K, sus áreas serán proporcionales á sus alturas B C, B O y O C; esto es,

$$BM : BK : CK :: BC : BO : OC$$

sustituyendo por B K su equivalente A G, y por C K el suyo A D, se tiene que

$$BM : AG : AD :: BC : BO : OC$$

esto es, que *la relacion entre el cuadrado formado sobre la hipotenusa y los cuadrados construidos sobre los catetos, es la misma que la que hay entre la hipotenusa y los segmentos B O y O C adyacentes.*

587.—*La área de un polígono, construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente á la suma de las áreas de los polígonos semejantes al primero, construidos sobre los catetos del mismo triángulo.*

Figura 255.

Si en la figura 255 llamamos A la área del polígono construido sobre la hipotenusa, a la del construido sobre el cateto c, y a' la del construido sobre el cateto c', tendrémos que por ser los polígonos semejantes, sus áreas serán proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos (579). Esto es:

$$a : c^2 :: a' : c'^2 :: A : h^2$$

Fundándonos en que la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente, se tiene:

$$a + a' : c^2 + c'^2 :: A : h^2$$

pero como (584) $\qquad h^2 = c^2 + c'^2$

endo iguales los consecuentes, lo serán los antecedentes,

luego $\qquad A = a + a'$

que es lo que se debia demostrar.

588.—*La área de un círculo construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo como diámetro, es equivalente á la suma de los círculos construidos sobre los catetos como diámetros.*

Figura 256.

Siendo el círculo un polígono regular de una infinidad de lados infinitamente pequeños, este teorema es un corolario del anterior; pero lo demostrarémos fundándonos en la expresion de la área del círculo en funcion del diámetro (568). Sea (fig. 256) D la hipotenusa, diámetro del círculo construido sobre ella y S su área, d uno de los catetos, diámetro del círculo cuya área representarémos por s; y d' el otro cateto diámetro del círculo cuya área es s'. En tal virtud,

$$S = \frac{\pi D^2}{4} \ldots . [1]$$

$$s = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$s' = \frac{\pi d'^2}{4}$$

sumando las dos últimas ecuaciones, y sacando $\frac{\pi}{4}$ como factor comun, resulta:

$$s + s' = \frac{\pi}{4}[d^2 + d'^2] \ldots . [1]$$

pero como [584] $\qquad d^2 + d'^2 = D^2$

sustituyendo en dos se tendrá:

$$s + s' = \frac{\pi D^2}{4}$$

y conforme á la ecuacion (1), obtendrémos $s + s' = S$ que es lo que se queria demostrar.

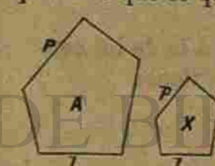

Figura 257.

589.—Problemas de comparacion de áreas. —I.—*Dada la área A de un polígono P* (fig. 257) *y uno de sus lados* l, *determinar la área de un segundo polígono* p *semejante al primero, y en el cual se conoce el lado homólogo* l'.

Como las áreas de las figuras semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos, se tiene:

$$A : x :: l^2 : l'^2$$

de donde $$x = \frac{A\ l'^2}{l^2}$$

II.—*Dados dos polígonos semejantes* (fig. 257), *construir otro semejante á ellos y equivalente á su suma.*

Figura 258.

Para resolver este problema, lo esencial es determinar la magnitud del lado del polígono buscado, homólogo á uno de los lados de los polígonos propuestos.

Constrúyase el ángulo recto A (fig. 258) y llévense sobre sus lados longitudes respectivamente iguales á los lados homólogos l y l' de los polígonos conocidos; tírese la hipotenusa B C, y si sobre ella se construye un polígono semejante á uno de los lados, quedará resuelto el problema (587).

III.—*Dados dos círculos A y B* (fig. 259) *construir otro equivalente á su diferencia.*

Figura 259.

Tírese el diámetro D E, desde su extremo D llévese la cuerda D F igual al diámetro d del círculo menor B, y tirando la cuerda F E ésta será el diámetro del círculo pedido.

Demostracion.—Por ser rectángulo el triángulo D F E, se tendrá:

$$E\ F^2 = D\ E^2 - D\ F^2$$

Si representamos por R el rádio del círculo A, por r el del círculo B, y por r' el del círculo buscado, cuyo diámetro vamos á demostrar que debe ser F E; sustituyendo en la anterior ecuacion, se tiene:

$$4\ r'^2 = 4\ R^2 - 4\ r^2$$

dividiendo todos los términos por 4, y multiplicándolos por π, nos dá:

$$\pi\ r'^2 = \pi\ R^2 - \pi\ r^2$$

que es lo que debiamos demostrar.

IV.—*Construir un polígono semejante á otro P* (fig. 260), *y cuya área esté con la del primero en la relacion de* m *á* n.

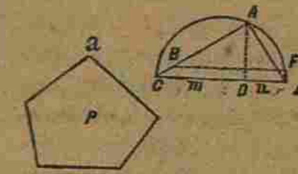

Figura 260.

Sea a b uno de los lados del polígono dado, y vamos á determinar el lado homólogo del polígono cuya área ha de estar con la de éste en la razon de m : n.

Sobre una recta indefinida llévense dos rectas, C D y D E, cuyas magnitudes estén en la relacion de m : n. Sobre C E como diámetro, trácese una semicircunferencia; levántese en D la perpendicular D A, y tirando las cuerdas A C y A E, llévese sobre la primera de A á B el lado a b, por B trácese B F paralela á C E, y la recta A F será el lado homólogo á a b del polígono buscado.

Demostracion.—Por ser semejantes los triángulos A C E y A B F, se tiene:

$$A\ C : A\ E :: A\ B : A\ F$$
$$A\ C^2 : A\ E^2 :: A\ B^2 : A\ F^2$$

como $A\ C^2 = m.\ C\ E$ y $A\ E^2 = n.\ C\ E$ (530—3°)

sustituyendo estos valores en la proporcion anterior y simplificando

tendrémos: $m : n :: A\ B^2 : A\ F^2$

ó sustituyendo $m : n :: a\ b^2 : A\ F^2$

y como las áreas de los polígonos son proporcionales á los cuadrados de los lados, se infiere que la área del polígono construido sobre la recta A F, es á la área del polígono P como m es á n; que es lo pedido en el problema.

TERCERA PARTE.

VOLUMENES.

Planos y rectas.

39

590.—Hasta aquí nos hemos ocupado del estudio de las propiedades de las figuras que pueden estar contenidas en un plano, considerando las relaciones que existen entre las partes que las forman, con el fin de deducir de los elementos conocidos los desconocidos. Esta parte de la geometría elemental se denomina por esta razon *geometría plana*. Vamos ahora á tratar de las figuras considerándolas en el espacio y de los cuerpos con sus tres dimensiones, cuyo estudio constituye lo que comunmente se llama *geometría en el espacio*.

Nos ocuparémos primero de las relaciones de las líneas rectas con los planos; en seguida de las que dan lugar los planos entre sí, y por último, de los cuerpos formados de planos ú originados por el círculo, valuando sus áreas y sus volúmenes.

591.—Hemos dicho (370) que *plano ó superficie plana es aquella que si se le aplica en una direccion cualquiera una línea recta, de modo que esté totalmente contenida en dicha superficie, ésta tocará todos los puntos de la recta.*

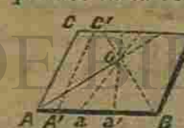

Figura 261.

Todo plano debe considerarse como una superficie indefinida en longitud y latitud, á menos que no se fijen los puntos que lo limitan. Puede concebirse el plano engendrado por el movimiento de una recta o A (fig. 261) que al girar al rededor del punto o otro de sus puntos toca la recta A B. Igualmente puede considerarse un plano engendrado por el movimiento de una recta A C que resbala sobre otra A B, y que en sus diversas posiciones permanece paralela á su primera situacion A' C.

La interseccion de dos planos es una línea recta (370).

Dos planos que tienen tres puntos comunes que no están en línea recta coinciden en toda su extension (370)

Un plano queda determinado en general por la posicion de tres puntos que no están en línea recta; por dos rectas que se cortan en un punto, ó por dos paralelas. Tambien puede fijarse la posicion de un plano que pasa por un punto, agregando la condicion de que sea perpendicular á una recta ó paralelo á otro plano.

592.—*Siempre que una recta P A sea perpendicular á la vez á otras dos A B y A C* (fig. 262) *colocadas en dos planos diferentes P A B y P A C que pasan por P A, esta recta será igualmente perpendicular á cualquiera otra A E que pase por el punto comun A de interseccion y que esté contenida en el plano C A B determinado por las rectas A B y A C.*

Por la hipótesis del teorema son rectos los ángulos P A B y P A C, y para demostrar que P A es perpendicular á A E, tendrémos que probar que el triángulo P A E es rectángulo en A, esto es, que el cuadrado de P E es igual á la suma de los cuadrados de los catetos P A y A E.

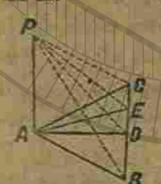

Figura 262.

Tomemos A B=A C, tiremos las rectas B C, B P y P C, con lo que resultarán los triángulos A B C y P B C que serán isósceles, el primero por construccion y el segundo porque siendo iguales los triángulos rectángulos P A B y P A C (385) se tiene P B=P C. Tomando el punto D en el medio de B C, base de los triángulos isósceles, y tirando las rectas A D y P D, éstas serán perpendiculares á B C en el punto D (428).

Considerando el triángulo rectángulo P E D, se tiene:

$$P\,E^2 = P\,D^2 + E\,D^2 \ldots [1]$$

Ahora determinarémos los valores de $P\,D^2$ y $E\,D^2$ considerando sucesivamente los triángulos rectángulos P D C, P A C y A D C.

$$P\,D^2 = P\,C^2 - C\,D^2 = P\,A^2 + A\,C^2 - C\,D^2 = P\,A^2 + A\,D^2 + C\,D^2 - C\,D^2$$

ó reduciendo: $\quad P\,D^2 = P\,A^2 + A\,D^2 \ldots (2)$

en el triángulo A D E: $\quad E\,D^2 = A\,E^2 - A\,D^2 \ldots (3)$

sustituyendo los valores de las ecuaciones (2) y (3) en la (1) finalmente resulta:

$$P\,E^2 = P\,A^2 + A\,E^2$$

que es lo que teniamos que demostrar.

Siendo P A perpendicular á todas las rectas que, como A E pasan por A, se infiere que: *cuando una recta P A es perpendicular á la vez á dos rectas A B y A C, lo será al plano que pasa por éstas,* y recíprocamente, siempre que una recta sea perpendicular á un plano, lo será tambien á toda recta que esté situada en él y pase por el pié A de la perpendicular P A.

593.—*Si desde un punto P* (fig. 263) *se baja una perpendicular P O al plano D E y varias oblícuas P A, P F, P C; 1° la perpendicular P O es la menor; 2° las oblícuas P A, P F, que se separan igualmente del pié de la perpendicular, son iguales; y 3° la P C que se separa más es la mayor.*

1° En cualquiera de los triángulos rectángulos P O A, P O F P O C, el cateto P O, que es la perpendicular al plano, es menor que cualquiera de las oblícuas P A, P F y P C, que son las hipotenusas de los triángulos.

Por esta razon, la distancia de un punto á un plano se mide por la perpendicular bajada al plano.

2° Siendo A O = F O = O B, las oblícuas A P, F P y B P serán iguales por ser hipotenusas de los triángulos iguales (385) A O P, F O P y B O P.

3° Si O C > O A podemos trasportar el triángulo P O A sobre su igual P O B, que está en el mismo plano que la oblícua P C, y como P C > P B (401) y P B = P A se infiere que P C > P A.

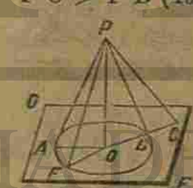

Figura 263.

594.—De lo que antecede resulta: 1° *que si se hace girar un ángulo recto P O A al rededor de uno de sus lados P O, el otro O A describirá un plano A O B perpendicular al primer lado; y 2° todas las perpendiculares O A, O F, O B á una recta O P levantadas en uno de sus puntos O, están en un mismo plano D E perpendicular á dicha recta.*

595.—*Por un punto O tomado en una recta O P* (fig. 263) *ó por otro fuera de ella A, siempre se le puede tirar un plano perpendicular, pero no se puede tirar mas que uno solo.*

Si hacemos pasar un plano por la recta P O observarémos que del punto O y desde el A siempre se puede tirar una perpendicular á O P, y al girar al rededor de ésta engendrará el plano A O F B que le es perpendicular, y como no se puede tirar desde un punto mas que una sola perpendicular á O P, resulta que no habrá tampoco mas de un plano perpendicular que pase por el punto dado.

596.—*Desde un punto O tomado en un plano* (fig. 263) *ó por otro fuera de él P, no se puede tirar más que una perpendicular al plano.*

Suponiendo engendrado el plano D E por el movimiento de O A al rededor de O P, se comprende que en el punto O no se puede levantar á la recta O A más perpendicular que O P, así como que desde el punto P no se le puede bajar tampoco ninguna otra perpendicular.

597.—La proyeccion de un punto P sobre un plano (fig. 264) es el pié B de la perpendicular P B bajada de ese punto sobre dicho plano.

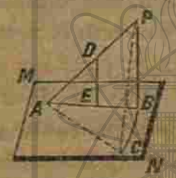

Figura 264.

La proyeccion de una recta D P es la série de todos los piés de las perpendiculares bajadas de los puntos de la recta sobre el plano. Como todas las perpendiculares son paralelas entre sí, quedarán en un mismo plano P A B, cuya interseccion con el M N será una recta A B. En consecuencia, siendo la proyeccion de una recta otra línea recta, bastará determinar la proyeccion de dos de sus puntos para tener la de toda la recta.

598.—*El ángulo de una recta con un plano, cuando no es perpendicular á éste, es el que forma con su proyeccion. Este ángulo es el menor de todos los que forma la recta con las líneas que pasan por su pié A.*

En efecto, si por el pié A [fig. 264] tiramos otra recta cualquiera, tomamos A C = A B y reunimos los puntos P y C, resultarán dos triángulos P B A y P C A, en los que los ángulos P A B y P A C están formados por lados iguales; pero siendo la perpendicular P B menor que la oblícua P C, el ángulo opuesto á la primera recta, P A B será menor que cualquiera otro P A C [432].

599.—*Dos planos M, N, perpendiculares á una misma recta P A no pueden encontrarse, y por lo mismo serán paralelos* [fig. 265].

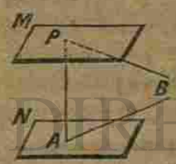

Figura 265.

Si los planos pudieran encontrarse, desde el punto B de su interseccion comun podrian tirarse las rectas B P y B A, que por estar contenidas en planos perpendiculares á la misma recta, serán ambas perpendiculares á P A, lo cual es un absurdo [396].

600.—*Cuando dos rectas son paralelas, el plano perpendicular á una de ellas lo será tambien á la otra* [fig. 266].

Si el plano M N es perpendicular á P A, demostrarémos que tambien lo es á su paralela Q B. Tiremos la recta A B y su perpendicular C D. La línea Q B por ser paralela á P A, estará en el mismo plano P A B Q que ella, y el ángulo Q B A será recto. Tomemos B C = B D y tiremos las rectas A C, A D, P C y P D.

Los triángulos rectángulos P A C y P A D son iguales (385), luego P C = P D.

Siendo isósceles el triángulo P C D, la recta P B tirada á la mitad de su base será perpendicular á C D. En consecuencia, siendo C D perpendicular á A B y á B P, lo será igualmente á B Q contenida en el mismo plano (592). Por último, si Q B es perpendicular á la vez á B A y á C D, lo será al plano M N de estas rectas.

601.—*Dos rectas P A y Q B* (fig. 266) *perpendiculares á un mismo plano M N, son paralelas entre sí.*

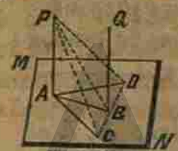

Figura 266.

Si Q B no fuera paralela á P A por el punto B, se le podria tirar una paralela diferente de Q B, la cual (600) seria perpendicular al plano M N, resultando que desde el mismo punto B podrian levantarse dos perpendiculares al mismo plano, lo que no es admisible.

602.—*Dos rectas A a, B b, paralelas á una tercera C c, son paralelas entre sí* (fig. 267).

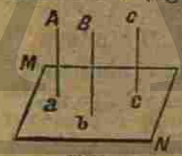

Figura 267.

Si tiramos un plano M N perpendicular á C c, éste lo será á las rectas A a y B b (600), y siendo estas perpendiculares al mismo plano serán paralelas entre sí (601).

603.—*En el espacio dos rectas A B y C' D'* (fig. 268) *pueden ser perpendiculares á una misma recta x y sin ser paralelas entre sí.* 41

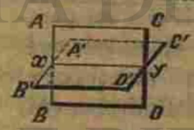

Figura 268.

Si suponemos que el rectángulo A D gire al rededor de una recta x y, paralela á sus bases en cualquiera posicion A' D' el lado D' C' será perpendicular á x y sin ser paralelo á A B, porque se encuentra en un plano diferente.

Debemos hacer notar que prolongadas indefinidamente estas rectas, no se encuentran. Igualmente observarémos, que en el espacio, á una recta x y se le pueden levantar una infinidad de perpendiculares desde el mismo punto x.

604.—*Las intersecciones A B y C D* (fig. 269) *de dos planos paralelos M y N con otro plano B C, son dos rectas paralelas.*

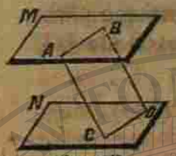

Figura 269.

Por una parte las rectas A B y C D están en el mismo plano A D, y por otra estando colocadas sobre los planos paralelos M y N no podrán encontrarse prolongadas, luego son paralelas.

605.—*Las partes A C y B D* (fig. 269) *de paralelas comprendidas entre dos planos paralelos son iguales.*

Por el supuesto los lados A C y B D son paralelos, y por el teorema anterior lo son tambien A B y C D, luego la figura A B C D será paralelógramo, por lo cual A C=B D (449).

De esto resulta que *dos planos paralelos tienen todos sus puntos equidistantes;* pues bastaria imaginarse que el plano A D fuera perpendicular para que las rectas A C y B D midiesen las distancias de los dos planos.

606.—*La recta A B* (fig. 270), *perpendicular á un plano M, lo es tambien á cualquiera otro plano N que le es paralelo.*

Figura 270.

Si por A B se hace pasar un plano cualquiera, por ser A B perpendicular á M, el ángulo A B C es recto; por ser N paralelo á M, la interseccion A D es paralela á B C, y por tanto el ángulo B A D tambien será recto. Como otro tanto sucederia con cualquiera otra recta que pase por A y esté en el plano N, se infiere que A B es perpendicular al plano N.

607.—*Toda recta A B* (fig. 271) *paralela á otra C D, lo es igualmente á cualquier plano M que pase por la segunda sin pasar por A B.*

Estando las dos rectas A B y C D en el mismo plano N por ser paralelas, la recta A B no podria encontrar el plano M sino en su interseccion comun, esto es, sobre la prolongacion de C D; pero como por el supuesto no es esto posible, tampoco podrá encontrar A B al plano M, y por tanto será paralela á él.

608.—*Si una recta A B* (fig. 271) *es paralela á un plano M, cualquier plano que pase por la recta A B encontrará al primero segun una paralela á ella.*

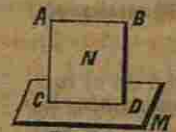

Figura 271.

Porque A B prolongada no podria cortar á C D sin encontrar al plano M, lo que seria contra el supuesto.

De esto se deduce, que cualquiera recta paralela á A B tirada por un punto del plano M, está toda comprendida en este plano.

609.—*Las partes de paralelas A C y B D* (fig. 271) *comprendidas entre una recta A B y un plano M que le es paralelo son iguales.*

Supuesto que la figura A D es paralelógramo, y en todo paralelógramo los lados opuestos son iguales.

Como en el caso de ser A C y B D perpendiculares al plano M, el teorema es igualmente cierto, se infiere que, *una recta paralela á un plano tiene todos sus puntos equidistantes de éste.*

610.—*Dadas dos rectas A B y C D* (fig. 272) *en el espacio que no se cortan ni son paralelas, por una de ellas A B solo se puede hacer pasar un plano paralelo á la otra C D.* 43

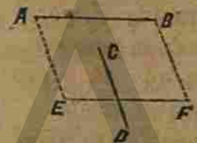

Figura 272.

Si por un punto cualquiera A ó B de la recta A B se tira una paralela A E ó B F á C D, y se hace pasar por A B y A E un plano, éste será paralelo á C D (607). Además, como todas las paralelas á A E y por lo mismo á C D están en un mismo plano, no hay mas de uno solo que satisfaga á la cuestion.

611.—*La menor distancia de dos rectas en el espacio, A B y C D* (figura 273) *que no se cortan, es la perpendicular comun á ambas* o o'. 44

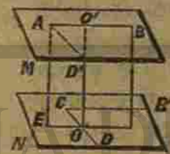

Figura 273.

Por el punto A tiremos A D' paralela á C D, y hagamos pasar el plano M por A B y A D' que será paralelo á la recta C D. Por el punto C tiremos C B' paralela á A B, y hagamos pasar el plano N por C D y C B' que será paralelo á la recta A B. La menor distancia de las rectas A B y C D será la de los planos paralelos M y N que las contienen. Por la recta A B hagamos pasar el plano B E perpendicular á M y á N.

La interseccion de este plano con N encuentra la recta C D en el punto O, y levantando en este punto una perpendicular á C D, que quedará en el plano B E, se tendrá por último la recta O O' que es la menor distancia de las rectas, siendo perpendicular á ambas y á los planos que las contienen.

El ángulo de dos rectas A B y C D en el espacio que no se cortan, es el B A D' que forma una de ellas A B con otra recta A D' tirada por uno de sus puntos A y paralela á la otra C D.

612.—*Dos rectas A B y C D* (fig. 274) *que no están en el mismo plano, quedarán cortadas en partes directamente proporcionales por tres planos paralelos M, N y P.*

Figura 274.

Reuniendo los puntos A y D y tirando las rectas B D, E F, F G y A C por los puntos de interseccion de las rectas A B, A D y C D con los planos M, N y P, se tendrá E F paralela á B D (604) y F G paralela á A C, por lo que (510)

$$A E : E B :: A F : F D$$
$$A F : F D :: C G : G D$$
luego $$A E : E B :: C G : G D$$

613.—Problemas.—I.—*Bajar una perpendicular á un plano M,* (fig. 275) *desde un punto P tomado fuera de él.*

Señálense tres puntos del plano A, B y C equidistantes de P, por ellos hágase pasar un círculo, cuyo centro O será el pié de la perpendicular (593).

II.—*Desde un punto O de un plano, levantarle una perpendicular.* (fig. 275).

Tomando O como centro, trácese un círculo, y en tres puntos de su circunferencia levántense tres oblícuas iguales A P, B P y C P, y determinando el punto P en que coinciden sus extremos, éste será el otro de la perpendicular buscada.

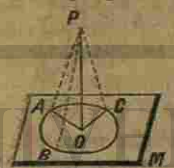

Figura 275.

Haciendo coincidir con el punto O los vértices de los ángulos rectos de dos escuadras A O P y C O P, puede determinarse igualmente la perpendicular O P por la línea de union de las escuadras (593).

III.—*Levantar un plano M* (fig. 275) *perpendicular á una recta O P: 1º por un punto O de la recta, y 2º por un punto C fuera de ella.*

1º En el punto O levántese la recta O C perpendicular á O P. En seguida, en un plano diferente de P O C, levántese otra perpendicular A O á P O, y haciendo pasar un plano por C O y A O, se tendrá el plano pedido.

2º Bájese del punto C la perpendicular C O á P O; determinado el punto O, levántese por él otra perpendicular á P O, pero en un plano

diverso al P O C. Haciendo pasar un plano por las dos perpendiculares C O y O A, se tendrá resuelto el problema.

IV.—*Tirar desde un punto P* (fig. 276) *una perpendicular á una recta A B contenida en un plano* B.

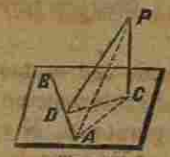

Figura 276.

Desde P bajarémos P C perpendicular al plano B. De su pié C tirarémos C D perpendicular á A B, y reuniendo los puntos P y D, la recta P D será la perpendicular pedida.

Para demostrar que el ángulo P D A es recto, tirémos las rectas C A y A P, y resultando los triángulos rectángulos P C A y C D A, se tendrá:

$$P A^2 = P C^2 + C A^2$$

pero como $P C^2 = P D^2 - C D^2$ y $C A^2 = C D^2 + A D^2$

sustituyendo resulta $P A^2 = P D^2 + A D^2$

luego el ángulo P D A es recto.

Como el plano P C D es perpendicular á A B, este problema da tambien el procedimiento para *tirar desde un punto P un plano perpendicular á una recta A B.*

V.—*Por un punto A* (fig. 277) *tirar un plano paralelo á otro M.*

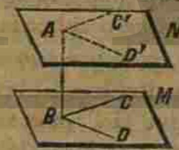

Figura 277.

En el plano dado M, se trazarán dos rectas B C y B D, que se corten en el punto B. Por el punto A se tirarán A C' paralela á B C, y A D' paralela á B D; haciendo pasar un plano N por A C' y A D', este será el plano pedido.

VI.—*Por un punto A* (fig. 277) *tirar una recta paralela á un plano M.*

Por un punto cualquiera B del plano M, trácese la recta B D, tírese A B, por el punto D llévese D D' paralela é igual á A B, y reuniendo los puntos A y D' se tendrá la recta A D' paralela al plano M. Como por el punto B pueden trazarse una infinidad de rectas, y por A tirarse otras tantas paralelas, el problema admite un número indefinido de resoluciones.

VII.—*Por un punto A* (fig. 278) *tirar un plano paralelo á dos rectas cualesquiera B C y D E, que no estén situadas en el mismo plano.*

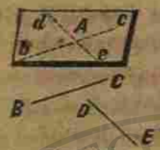

Figura 278.

Por A tírense b c y d e respectivamente paralelas á B C y D E, y haciendo pasar un plano por b A c y d A e, quedará resuelta la cuestion.

ANGULOS DIEDROS.

614.—*Se llama ángulo diedro la figura formada por dos planos M y N inclinados entre sí, que concurren en una recta A B* (fig. 279). Los planos M y N se denominan *caras* ó *lados*, y la recta A B *arista* del diedro. La magnitud de un ángulo diedro depende de la mayor ó menor inclinacion de los planos que lo forman, y no de la extension de éstos; por lo que al medir un diedro lo que se estima únicamente es la inclinacion relativa de sus caras.

Figura 279.

Se tendrá una idea exacta del ángulo diedro y de su magnitud, imaginándose que sus caras están primero aplicadas una sobre otra, que en seguida se separan, pero girando al rededor de la arista A B, como las dos partes de un libro que se abre. El ángulo diedro, nulo al principio, toma un valor que va aumentando con la separacion de las caras. Así, pues, el ángulo diedro está engendrado por la rotacion de un plano al rededor de una recta. En este movimiento cada uno de los puntos del plano describe una circunferencia de círculo cuyo plano es perpendicular á la arista y cuyo centro está en un punto de esta recta.

Cuando no hay mas que un solo diedro, se le designa por las letras A B de su arista; pero cuando hay varios que concurren en la misma arista, para evitar confusion, se designa el diedro por cuatro letras; teniendo cuidado de poner siempre las dos de su arista A B en medio de las otras dos N y M que corresponden á los planos que lo forman, y así se dice el diedro N A B M.

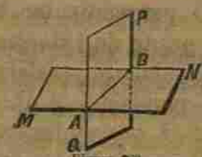

Figura 280.

Cuando un plano P A (fig. 280) cae sobre otro M N, forma con éste dos ángulos diedros M A B P y P B A N, que son *adyacentes*. Cuando éstos son iguales, el plano P A es perpendicular á M N, y recíprocamente. Si el ángulo que forman los dos planos es menor que P B A N, se dice que el diedro es *agudo*, y en caso contrario, que es *obtuso*. En fin, para los ángulos diedros se adoptan las mismas denominaciones de ángulos *complementarios, suplementarios*, etc., que para los ángulos rectilíneos.

615.—*Los ángulos rectilíneos B A C y* b a c (fig. 281) *que resultan de la interseccion de un ángulo diedro* A a, *con dos planos paralelos cualesquiera, son iguales.*

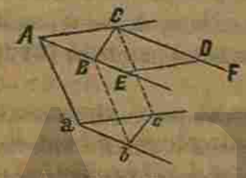

Figura 281.

Tomemos A C = a c y B A = b a, y tiremos las rectas B b, C c, B C y b c: A C es paralela á a c (604) é igual, luego la figura A c es paralelógramo y en consecuencia será C c igual y paralela á A a. Como A B es igual y paralela á a b, la figura A b es igualmente un paralelógramo, de lo que resulta que B b es igual y paralela á A a; luego B b será igual y paralela á C c, y B c será un paralelógramo en el que B c=b c. Los dos triángulos A B C y a b c serán iguales (386) por tener sus tres lados respectivamente iguales, y de la igualdad de los triángulos resulta que el ángulo B A C=b a c, que es lo que se queria demostrar.

616.—De aquí se infiere: 1° *si dos ángulos en el espacio* B A C *y* b a c (fig. 281) *tienen sus lados paralelos y sus aberturas están vueltas en el mismo sentido, serán iguales; 2° igualmente lo son si están vueltas en sentido contrario como* b a c *y* C D E; *y 3° dos ángulos* b a c *y* E D F, *que tienen sus lados paralelos y sus aberturas no están vueltas en el mismo sentido ni en sentido contrario, son suplementarios.*

En el párrafo anterior hemos demostrado la primera parte, esto es, que B A C=b a c.

2° Como el ángulo B A C = C D E (420), se infiere que b a c = C D E.

3° Siendo el ángulo E D F suplemento de C D E, se infiere que E D F y b a c son suplementarios.

617.—*Los planos de dos ángulos* B A C *y* b a c [fig. 282] *cuyos lados son respectivamente paralelos, serán paralelos.*

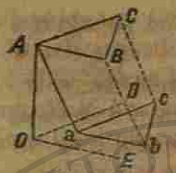

Figura 282.

Desde el punto A bajemos A O perpendicular al plano del ángulo b a c, y por el punto de interseccion O tiremos O D y O E respectivamente paralelas á a c y á a b, por lo que O E será paralela á A B, y O D á A C. Ahora bien, siendo A O perpendicular al plano en que están las rectas O D y O E, los ángulos A O D y A O E son rectos, y por razon de las paralelas [409] tambien lo serán los ángulos O A B y O A C, luego O A es perpendicular á la vez á los planos de los ángulos b a c y B A C, y por lo mismo estos serán paralelos [606].

618.—*Los triángulos* A B C *y* a b c *formados en el espacio por tres rectas respectivamente iguales y paralelas, son iguales y quedan en planos paralelos.*

Serán iguales por serlo respectivamente los tres lados de los triángulos [386], y estarán en planos paralelos por ser los lados paralelos [617].

619.—*Un ángulo diedro* B A D C [fig. 283] *tiene por medida el ángulo rectilíneo* B A C *que resulta levantando perpendiculares á su arista* A D *del mismo punto* A *en cada uno de los dos planos que lo forman.*

En primer lugar observarémos que en cualquier punto de la arista A D en que se levanten perpendiculares, determinarán un ángulo igual á B A C, por estar formados por rectas respectivamente paralelas [616].

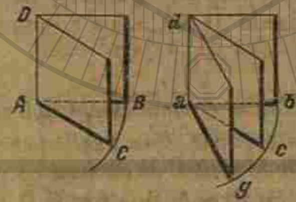

Figura 283.

Para demostrar que los ángulos diedros son proporcionales á los rectilíneos formados por perpendiculares en el mismo punto á su arista, y que por tanto pueden tomarse los últimos como medida de los primeros, demostrarémos préviamente que *si dos ángulos diedros* B A D C *y* b a d c *son iguales lo serán los ángulos rectilíneos* B A C *y* b a c *formados por las respectivas perpendiculares á sus aristas levantadas en cada una de sus caras del mismo punto.*

Siendo por el supuesto iguales los ángulos diedros B A D C y b a d c, si hiciéramos coincidir la cara B D con b d sobreponiendo la arista A D sobre a d, teniendo cuidado de que A cayese sobre a, el plano D C coincidiria con d c. La perpendicular A B coincidiria con a b (395), y la A C con a c; luego el ángulo B A C = b a c.

Ahora bien: si á continuacion del ángulo diedro b a d c ponemos su igual c a d g, haciéndolos coincidir por la cara d c, resultará un ángulo diedro b a d g duplo del b a d c, y el ángulo rectilíneo b a c = c a g,

por lo que al ángulo diedro duplo b a d g corresponde un ángulo rectilíneo b a g duplo de b a c.

De la misma manera probaríamos que á un diedro triple corresponde un ángulo rectilíneo triple, y en general á un ángulo diedro n veces mayor que otro, corresponderá un ángulo rectilíneo formado por las perpendiculares á su arista tambien n veces mayor. Así es que, siendo estos ángulos rectilíneos proporcionales á la magnitud de los ángulos diedros, pueden servirles de medida.

De modo que, en último análisis, los arcos de círculo nos servirán para medir los ángulos diedros.

620.—De esto resulta, que cuando uno ó varios planos caen sobre otro, ó lo cortan, tienen lugar los mismos teoremas que con las rectas que miden los ángulos diedros. Así es, que los ángulos diedros adyacentes son suplementarios; todos los formados al rededor de una arista comun valen cuatro rectos; los ángulos opuestos al vértice son iguales, etc., etc.

Igualmente cuando dos planos paralelos están cortados por otro se tiene que los ángulos diedros alternos internos son iguales, los interiores del mismo lado del plano secante son suplementarios, así como todas las propiedades que hemos demostrado en los casos de rectas paralelas.

621.—Dos planos son perpendiculares cuando el ángulo diedro que forman tiene por medida un recto.

Si un plano es perpendicular á otro, este tambien es perpendicular al primero.

622.—*Si una recta* A B (fig. 284), *es perpendicular á un plano* M N, *lo será igualmente cualquier plano* P C *que pasa por ella.* 47

Si en el plano M N levantamos B O perpendicular á C D interseccion comun de los dos planos, tendrémos que el ángulo A B O formado por las perpendiculares á C D será la medida del ángulo diedro de los dos planos; pero por ser A B perpendicular á M N, el ángulo A B O es recto; luego el plano P C será perpendicular á M N.

623.—*Por una recta* C D (fig. 284) *contenida en un plano, no se puede levantar mas de un plano perpendicular á éste.*

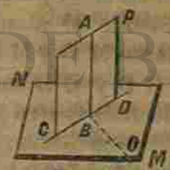

Figura 284.

En razon de que para que el plano P C sea perpendicular á M N, acabamos de ver que es preciso pase por B A perpendicular á M N, y de que se sabe que por un punto B no se puede levantar á M N más de una sola perpendicular [596]. 48

49

624.—*Si dos planos P y M* (fig. 284) *son perpendiculares, y en uno de ellos se baja una recta A B perpendicular á la interseccion comun D C, esta recta será perpendicular al otro plano M.*

Por ser los planos perpendiculares el ángulo A B O es recto.

Por ser A B perpendicular á C D, el ángulo A B C tambien es recto, luego A B será perpendicular á todas las rectas que pasan por el punto B contenidas en el plano M N (592) y por tanto será perpendicular á este plano.

50

625.—*Si dos planos P y M* (fig. 284) *son perpendiculares, y en un punto B de su interseccion comun se levanta una recta B A perpendicular á uno de los planos M, esta recta quedará contenida por entero en el otro plano P.*

Porque si A B no estuviese contenida en el plano P, levantando en este plano en el punto B una perpendicular á C D, se tendrian (624) dos perpendiculares al plano M N en el mismo punto, lo que no es admisible (596).

626.—*Si dos planos M y N* (fig. 285) *son perpendiculares á un tercero P Q, su interseccion comun A B será tambien perpendicular á este plano P Q.*

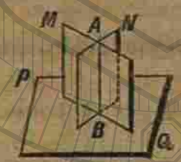

Figura 285.

Porque si por el punto B levantamos una perpendicular al plano P Q, tendrá que estar contenida tanto en el plano M como en el N.

X

627.—*Si desde un punto A* [fig. 286] *tomado en el interior de un ángulo diedro M N se bajan á sus caras las perpendiculares A B y A C, el ángulo A que resulte será suplemento del ángulo diedro.*

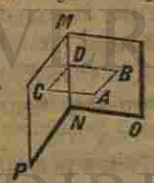

Figura 286.

Por ser A B perpendicular al plano M O, el plano A B D C que pasa por esta recta será perpendicular al plano M O [622] y por tanto el ángulo A B D será recto. Por ser A C perpendicular al plano M P, el plano A B D C que pasa por ella será perpendicular al plano M P, y el ángulo A C D será recto. Siendo el plano A B D C perpendicular á la vez á los planos M O y M P lo será á su interseccion comun M N [626], y como B D y C D son perpendiculares á la arista del ángulo diedro, el ángulo B D C será la medida del diedro O M N P.

Ahora bien: considerando el cuadrilátero A B D C se tiene [445:]

$$A + B + D + C = 4 \text{ rectos}$$

por otra parte $\quad B + C = 2 \text{ rectos}$

restando la 2ª ecuacion $\quad A + D = 2 \text{ rectos}$

que es lo que se debia demostrar, supuesto que B D C es la medida del ángulo diedro.

TRIEDROS Y POLIEDROS

628.—*Se llama ángulo sólido ó ángulo poliedro, la figura que resulta cuando tres ó más planos concurren en el mismo punto S* [fig. 287]. *Cuando los planos que concurren en el mismo punto B son tres, la figura se llama ángulo triedro. Se da el nombre de poliedro no solo al ángulo formado por muchos planos, sino tambien al sólido limitado por muchas caras planas.*

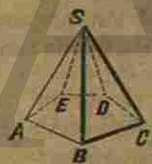

Figura 287.

El punto S es el *vértice* del poliedro; las intersecciones consecutivas S A, S B.... de sus planos son las *aristas;* cada porcion de plano indefinido A S B comprendida entre dos aristas es una *cara;* cada ángulo A S B formado por dos aristas consecutivas es un *ángulo plano,* y cada ángulo diedro B S A E formado por dos caras consecutivas, es un ángulo diedro del poliedro.

Un ángulo poliedro se designa por la letra S de su vértice, y cuando hay varios poliedros que tienen el mismo vértice por las letras S A B C D E de sus aristas, comenzando por la de su vértice.

Si el espacio del poliedro está limitado por un plano A B C D E, se forma un cuerpo que se llama *sólido,* que en el caso de nuestra figura es una *pirámide* de base pentagonal.

Nos ocuparémos únicamente de *los poliedros convexos,* que son aquellos cuyos ángulos diedros son todos salientes, esto es, que cortados por un plano A B C.... dan por seccion un polígono convexo [461].

629.—*En todo ángulo triedro S* [fig. 288] *uno cualquiera de sus ángulos planos E S G formado por dos de sus aristas, es menor que la suma de los otros dos.*

49

624.—*Si dos planos P y M* (fig. 284) *son perpendiculares, y en uno de ellos se baja una recta A B perpendicular á la interseccion comun D C, esta recta será perpendicular al otro plano M.*

Por ser los planos perpendiculares el ángulo A B O es recto.

Por ser A B perpendicular á C D, el ángulo A B C tambien es recto, luego A B será perpendicular á todas las rectas que pasan por el punto B contenidas en el plano M N (592) y por tanto será perpendicular á este plano.

625.—*Si dos planos P y M* (fig. 284) *son perpendiculares, y en un punto B de su interseccion comun se levanta una recta B A perpendicular á uno de los planos M, esta recta quedará contenida por entero en el otro plano P.*

50

Porque si A B no estuviese contenida en el plano P, levantando en este plano en el punto B una perpendicular á C D, se tendrían (624) dos perpendiculares al plano M N en el mismo punto, lo que no es admisible (596).

626.—*Si dos planos M y N* (fig. 285) *son perpendiculares á un tercero P Q, su interseccion comun A B será tambien perpendicular á este plano P Q.*

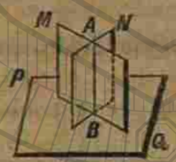
Figura 285.

Porque si por el punto B levantamos una perpendicular al plano P Q, tendrá que estar contenida tanto en el plano M como en el N.

627.—*Si desde un punto A* [fig. 286] *tomado en el interior de un ángulo diedro M N se bajan á sus caras las perpendiculares A B y A C, el ángulo A que resulte será suplemento del ángulo diedro.*

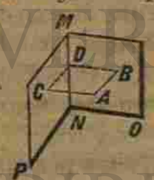
Figura 286.

Por ser A B perpendicular al plano M O, el plano A B D C que pasa por esta recta será perpendicular al plano M O [622] y por tanto el ángulo A B D será recto. Por ser A C perpendicular al plano M P, el plano A B D C que pasa por ella será perpendicular al plano M P, y el ángulo A C D será recto. Siendo el plano A B D C perpendicular á la vez á los planos M O y M P lo será á su interseccion comun M N [626], y como B D y C D son perpendiculares á la arista del ángulo diedro, el ángulo B D C será la medida del diedro O M N P.

Ahora bien: considerando el cuadrilátero A B D C se tiene [445:]

$$A + B + D + C = 4 \text{ rectos}$$

por otra parte $\quad B + C = 2 \text{ rectos}$

restando la 2ª ecuacion $\quad A + D = 2 \text{ rectos}$

que es lo que se debia demostrar, supuesto que B D C es la medida del ángulo diedro.

TRIEDROS Y POLIEDROS

628.—*Se llama ángulo sólido ó ángulo poliedro, la figura que resulta cuando tres ó más planos concurren en el mismo punto S* [fig. 287]. *Cuando los planos que concurren en el mismo punto B son tres, la figura se llama ángulo triedro. Se da el nombre de poliedro no solo al ángulo formado por muchos planos, sino tambien al sólido limitado por muchas caras planas.*

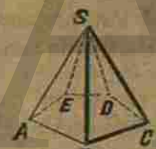
Figura 287.

El punto S es el *vértice* del poliedro; las intersecciones consecutivas S A, S B.... de sus planos son las *aristas;* cada porcion de plano indefinido A S B comprendida entre dos aristas es una *cara;* cada ángulo A S B formado por dos aristas consecutivas es un *ángulo plano,* y cada ángulo diedro B S A E formado por dos caras consecutivas, es un ángulo diedro del poliedro.

Un ángulo poliedro se designa por la letra S de su vértice, y cuando hay varios poliedros que tienen el mismo vértice por las letras S A B C D E de sus aristas, comenzando por la de su vértice.

Si el espacio del poliedro está limitado por un plano A B C D E, se forma un cuerpo que se llama *sólido,* que en el caso de nuestra figura es una *pirámide* de base pentagonal.

Nos ocuparémos únicamente de *los poliedros convexos,* que son aquellos cuyos ángulos diedros son todos salientes, esto es, que cortados por un plano A B C.... dan por seccion un polígono convexo [461].

629.—*En todo ángulo triedro S* [fig. 288] *uno cualquiera de sus ángulos planos E S G formado por dos de sus aristas, es menor que la suma de los otros dos.*

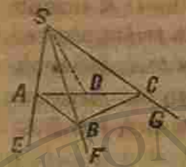

Figura 288.

Nos bastará demostrarlo con el ángulo plano E S G, que es el mayor, para que se comprenda que con más razon será cierto el teorema con cualquiera de los otros dos.

Construyamos sobre esta cara el ángulo E S D=E S F, tiremos una recta cualquiera A C y tomando S B=S D, trácese la recta A B.

Los triángulos S A D y S A B serán iguales [385], de lo que resulta:

$$A B = A D$$

por otra parte $\quad A B + B C > A C$

restando los términos de la ecuacion de los de la desigualdad, se tiene:

$$B C > D C$$

Considerando los triángulos C S B y C S D, en los que los ángulos C S B y C S D están formados por lados respectivamente iguales, el opuesto al mayor lado B C será el mayor, esto es

ángulo $\quad B S C > C S D$
agregando los iguales $\quad B S A = A S D$
resulta $\quad B S C + B S A > A S C$

que es lo que se tenia que demostrar.

630.—*La suma de los tres ángulos planos A S B + B S C + C S A* (fig. 289), *formados en el vértice de un triedro, es menor que cuatro rectos.*

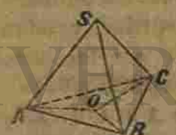

Figura 289.

Cortemos el triedro por un plano cualquiera A B C, y tomando en el interior de este triángulo un punto O, reunámoslo con los tres vértices, A, B y C, con lo que resultarán tres triángulos colocados en el mismo plano cuyo vértice comun es O, y otros tres triángulos cuyos vértices concurren en el S del triedro. Para simplificar harémos la suma de los ángulos.

$$A O B + B O C + C O A = O$$
y $$A S B + B S C + C S A = S$$

Como los ángulos en O valen 4 rectos, nuestro raciocinio tendrá por objeto demostrar que $S < O$.

Siendo el número de triángulos formados al rededor de O el mismo que el de los formados en S, y como los ángulos de cada triángulo valen dos rectos, resulta que la suma de los ángulos de los triángulos en O, es igual á la suma de los ángulos de los triángulos en S. Esto es,
$O + C A B + A B C + B C A = S + S A C + S A B + S B A + S B C + S C B + S C A \ldots.$ [1]

Por otra parte (629) $C A B < S A C + S A B$
$A B C < S B A + S B C$
$B C A < S C B + S C A$

sumando ordenadamente estas tres desigualdades

$$C A B + A B C + B C A < S A C + S A B + S B A + S B C + S C B + S C A \ldots. (2)$$

Si restamos los términos de esta desigualdad de los de la ecuacion (1) como cuando el sustraendo aumenta, la resta disminuye (49), resulta:
ángulos en $\quad O > S$

y como los ángulos en O = 4 rectos, se tiene que la suma de los ángulos planos formados en el vértice S será menor que cuatro rectos.

631.—*Dos triedros S y s* (fig. 290) *formados por ángulos planos respectivamente iguales,* D S E=d s e, D S F=d s f *y* E S F=e s f, *tienen sus ángulos diedros iguales.*

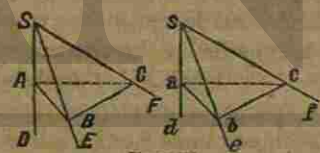

Figura 290.

Tomemos S A = s a, y por los puntos A y a hagamos pasar planos A B C y a b c respectivamente perpendiculares á S D y á s d. El triángulo S A B es igual á s a b (384) por tener S A = s a adyacente á los ángulos A S B = a s b por ángulos planos del triedro y S A B= s a b por rectos. Por la misma razon el triángulo S A C es igual á s a c, y de esto se deduce que A B=a b, A C=a c y que el triángulo B S C igual á b s c por tener el ángulo E S F = e s f formado por los lados iguales S B = s b y S C = s c (385) luego B C = b c. Siendo respectivamente iguales los tres lados del triángulo A B C á los del triángulo a b c, estos dos triángulos serán iguales (386), por lo que el ángulo B A C=b a c; pero como estos ángulos son medida de los diedros formados sobre S D y s d, éstos tambien serán iguales. De la misma manera demostrariamos que los diedros segun S E y s e, y los segun S F y s f son iguales con tomar partes iguales sobre estas aristas y levantarles planos perpendiculares.

632.—*Dos triedros son iguales: 1° cuando tienen un ángulo diedro igual formado por dos ángulos planos respectivamente iguales y situados en el mismo órden; 2° cuando tienen un ángulo plano igual, adyacente á dos ángulos diedros respectivamente iguales situados de la misma manera; y 3° cuando tienen sus tres ángulos planos respectivamente iguales dispuestos en el mismo órden.*


Figura 291.

1° Sea el ángulo diedro S A = s a (fig. 291) é iguales las caras que forman este diedro, esto es, ángulo A S C = a s c y A S B=a s b. Si aplicáramos el ángulo diedro S A sobre s a, por ser iguales los diedros, el plano S A B coincidiria sobre s a b, y el S A C sobre s a c, y por la igualdad de las caras la recta S B coincidiria con s b y S C con s c, así es que los dos triedros coincidirán en todas sus partes, y por lo mismo serán iguales.

2° Sea la cara A S B=a s b adyacente á los ángulos diedros A S igual á a s y B S igual á b s. Si sobrepusiéramos los ángulos A S B y a s b iguales, por la igualdad de los diedros adyacentes el plano A S C coincidiria con a s c, y el plano B S C con b s c, de lo que resulta que coincidiria la interseccion S C de los primeros con la s c de los últimos, y de esto se infiere la igualdad de los triedros en todas sus partes.

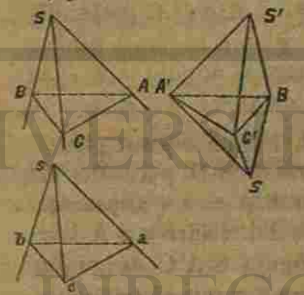
Figura 292.

3° Cuando los triedros tienen sus tres ángulos planos respectivamente iguales, ya demostramos en el número 631 que sus ángulos diedros tambien son iguales; pero para que los triedros puedan sobreponerse se necesita que las caras respectivamente iguales estén dispuestas en el mismo órden. En la figura 292 los triedros S y s serán sobreponibles porque están formados no solo de caras iguales, sino dispuestas en el mismo órden; pero no es posible sobreponer los triedros S y S' en los que los ángulos iguales A S B=A' S' B, A S C= A' S' C' y B S C=B S' C' no están colocados de la misma manera. En efecto, para poder sobreponer el triángulo A B C sobre su igual

A' B C', se necesita invertir el triedro S y hacerlo tomar la posicion S A' B C', que como verémos más adelante (648), es *simétrica* con respecto á la de S'. Esta observacion de que la igualdad de todas las partes de un triedro no implica que puedan sobreponerse sino en el caso de que sus partes constitutivas, caras y diedros, estén agrupadas en el mismo órden, se refiere igualmente á las dos primeras condiciones de igualdad de los triedros.

En el número 634 considerarémos un 4° caso de igualdad de los triedros, y es cuando están formados por diedros iguales.

633.—*Si desde un punto* S (fig. 293) *tomado en el interior de un ángulo triedro* s' *se bajan perpendiculares* S A, S B *y* S C *sobre sus tres caras y se hacen pasar planos por las perpendiculares, se formará un segundo ángulo triedro* S *cuyos ángulos planos* A S B, B S C *y* C S A *son respectivamente suplementos de los ángulos diedros* s' D, s' E *y* s' F *opuestos del primer triedro* s'. *Recíprocamente las caras del triedro* s' *serán suplementos de los ángulos diedros del triedro* S.

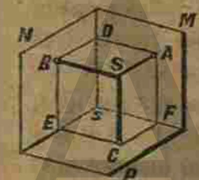
Figura 293.

En el número 627, considerando el cuadrilátero S A D B en el que los ángulos en A y en B son rectos, hemos demostrado que el ángulo A S B es suplemento del ángulo A D B que es la medida del diedro s' D, y como la misma demostracion es aplicable á los cuadriláteros S B E C y S C F A queda probada la proposicion directa.

Para demostrar que las caras del triedro s' son suplementos de los ángulos diedros segun S A, S B y S C, considerarémos el cuadrilátero D s' F A. Por pasar el plano A C por las rectas S A y S C perpendiculares á los planos M s' y P s', será perpendicular á la vez á ambos (622) y á su interseccion comun s' F (626), luego el ángulo A F s' es recto. Por pasar el plano A B por las perpendiculares S A y S B á los planos M s', y N s', será perpendicular á la vez á ambos y á su interseccion s' D, luego el ángulo s' D A es recto. Así es que

A F s'+F s' D+s' D A+D A F=4 rectos (445).

A F s'+s' D A=2 rectos.

restando resulta F s' D+D A F=2 rectos

pero F s' D es la cara del triedro s', y D A F es la medida del diedro A S, por ser esta arista perpendicular á M s' y por consiguiente á las rectas D A y A F que pasan por su pié.

Del mismo modo demostraríamos que las otras caras de s' son suplementos de los diedros opuestos de S.

Dos triedros tales como S y s' se llaman *suplementarios*, y un triedro cualquiera tiene siempre otro que le es suplementario.

Si llamamos d, d' y d'' los ángulos diedros del triedro s', segun las aristas E s', D s' y F s', y representamos por c, c' y c'' los ángulos B S C, B S A y A S C de las caras del triedro suplementario S, por ser igual á dos ángulos rectos $d+c$, $d'+c'$, y $d''+c''$, tendrémos:

$$d+d'+d''+c+c'+c''=6 \text{ rectos} \ldots. (1)$$

y como (630) $\qquad c+c'+c''<4$ rectos

restando esta desigualdad de la ecuacion, resulta:

1° que $\qquad d+d'+d''>2$ rectos

y trasladando en la [1] tendrémos $d+d'+d''=6$ rectos$-(c+c'+c'')$

lo que significa 2° que $\qquad d+d'+d''<6$ rectos

luego *la suma de los ángulos diedros de un triedro es mayor que dos ángulos rectos y menor que seis.*

634.—*Dos ángulos triedros s y s' que tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales, serán iguales.*

Para que los triedros que hemos llamado s y s' sean iguales, tendrémos que deducir que los ángulos planos de sus caras lo son. Si llamamos S y S' dos triedros respectivamente suplementarios de s y de s'; siendo los ángulos diedros de s respectivamente iguales á los de s', los triedros S y S' tendrán sus caras respectivamente iguales, por ser estas caras suplemento de los ángulos diedros de s y de s', y por tanto [632—3°] los triedros S y S' serán iguales. Ahora bien: siendo iguales los ángulos diedros de S y S' las caras de sus suplementarios s y s' lo serán, que es lo que se debia demostrar.

635.—Un poliedro toma el nombre de *tetraedro* cuando está formado por la reunion de 4 planos; el de *pentaedro* cuando lo está por 5 planos; el de *exaedro* si lo forman 6; *eptaedro*, si lo forman 7 caras, etc.

636.—*Dos ángulos poliedros son iguales: 1° cuando tienen sus ángulos diedros iguales formados por ángulos planos respectivamente iguales y colocados de la misma manera; y 2° cuando tienen sus aristas paralelas y distribuidas en el mismo órden* (fig. 294).

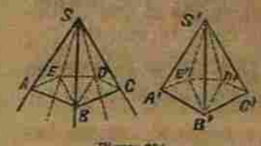
Figura 294.

1° Si los poliedros S y S' tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales formados por caras iguales dispuestas en el mismo órden, y si por una de sus aristas S B y S' B' tiramos planos á todas las demás, para probar que son iguales demostrarémos que lo son los triedros en que quedan descompuestos

El triedro S A B E=S' A' B' E' por tener el diedro S A=S' A' formado por ángulos iguales A S B=A' S' B' y A S E=A' S' E' [632—1°] De esto resulta: 1° que el ángulo diedro A E S B=A' E' S' B', y 2°, que la cara E S B=E' S' B'.

Para demostrar que el triedro S E B D=S' E' B' D', tenemos: que si de los ángulos diedros A E S D=A' E' S' D' restamos los iguales

A E S B=A' E' S' B'

nos queda $\qquad$ B E S D=B' E' S' D'

formados por las caras iguales E S B=E' S' B' y E S D=E' S' D' luego [632—1°] los triedros que consideramos son iguales; pudiendo demostrarse lo mismo con los S B D C y S' B' D' C'.

2° Si las aristas de los poliedros S y S' son paralelas y están distribuidas en el mismo órden, los ángulos planos serán iguales [616], y por serlo éstos lo serán tambien los ángulos diedros de los triedros en que puedan descomponerse [631], luego serán iguales las partes de ambos poliedros.

637.—*La suma de los ángulos planos A S B, B S C.... (fig. 295) formados en el vértice S de un poliedro es menor que cuatro rectos.*


Figura 295.

Cortemos el poliedro por un plano A B C D E, tomemos en su interior un punto O y reuniéndolo con los vértices A, B, C.... resultarán en O y en S tantos triángulos como lados tiene el poliedro. Para simplificar

harémos la suma de los ángulos A O B+B O C+C O D....=O

" $\qquad$ " $\qquad$ " $\qquad$ A S B+B S C+C S D....=S

Como los ángulos en O valen 4 rectos, vamos á demostrar que S<O.

Siendo el número de triángulos formados al rededor de O el mismo que el de los formados en S, y como los ángulos de cada triángulo valen dos rectos, la suma de los ángulos de todos los triángulos formados al rededor de O será igual á la suma de los ángulos de los triángulos en S. Esto es

$$O+E\,A\,B+A\,B\,C+\ldots=S+S\,A\,E+S\,A\,B+S\,B\,A\ldots[1]$$

Por otra parte [629] $E\,A\,B<S\,A\,E+S\,A\,B$
$A\,B\,C<S\,B\,A+S\,B\,C$, etc.

sumando ordenadamente estas desigualdades

$$E\,A\,B+A\,B\,C+\ldots<S\,A\,E+S\,A\,B+S\,B\,A+S\,B\,C+\ldots[2]$$

restando los términos de esta desigualdad de los de la ecuacion [1] como cuando el sustraendo aumenta, la resta disminuye [49], resulta que

ángulos en $O>S$

pero como los ángulos en O valen cuatro rectos, se infiere que la suma de los ángulos planos formados en el vértice S de un poliedro es menor que cuatro rectos.

CUERPOS, O SOLIDOS REGULARES.

638.—*Se llaman cuerpos, ó sólidos regulares, los que están limitados por caras que todas son polígonos regulares iguales entre sí.*

Vamos á demostrar que solo pueden formarse *cinco cuerpos regulares;* fundándonos en que la suma de los ángulos planos de un poliedro tiene que ser menor que 4 rectos, y en que el valor del ángulo de un polígono regular se determina por la fórmula: [467—II] $A=\frac{2.90^\circ(n-2)}{n}$

en la que n representa el número de lados del polígono Por medio de esta fórmula se encuentra que el valor del

ángulo del triángulo equilátero $=60^\circ$
,, del cuadrado $=90^\circ$
,, del pentágono regular $=108^\circ$
,, del exágono ,, $=120^\circ$

Ahora bien: con 3 triángulos equiláteros se puede formar un ángulo sólido ó poliedro, supuesto que $3\times60^\circ=180^\circ<360^\circ$ ó 4 rectos.

El cuerpo sólido que resulta es el *tetraedro*, que tiene 4 caras triangulares y cada uno de sus ángulos poliedros lo forman tres triángulos equiláteros.

Con 4 triángulos equiláteros tambien puede formarse un ángulo sólido, porque $4\times60^\circ=240^\circ<360^\circ$. El cuerpo sólido que resulta se le llama *octaedro* compuesto de 8 caras triangulares y cada uno de sus 6 ángulos poliedros consta de 4 triángulos.

Con 5 triángulos equiláteros todavia puede formarse un ángulo sólido, porque $5\times60^\circ=300^\circ<360^\circ$. El cuerpo sólido que resulta se llama *icosaedro*, y está compuesto de 20 caras triangulares y cada uno de sus 12 ángulos poliedros consta de 5 triángulos.

Con 6 triángulos equiláteros no puede formarse un ángulo poliedro, porque como $6\times60^\circ=360^\circ$, en vez de poliedro resultaria una figura plana, y con más de 6 triángulos no puede formarse ningun ángulo poliedro supuesto que 60° por más de 6 da un producto mayor que 360°.

Con tres cuadrados sí puede formarse un ángulo sólido, porque $3\times90^\circ=270^\circ<360$. El sólido regular que resulta es el *cubo* limitado por 6 cuadrados, y sus ocho ángulos poliedros formados por 3 cuadrados. Con cuatro ó más cuadrados no se puede formar un ángulo sólido, porque 90° multiplicado por 4 da 4 ángulos rectos y por más de 4 da un producto superior á 360°.

Con tres pentágonos regulares puede formarse un ángulo sólido, porque $3\times108^\circ=324<360^\circ$. El cuerpo regular que resulta es el *dodecaedro pentagonal* compuesto de 12 caras, y sus 20 ángulos poliedros están formados por tres pentágonos regulares. Como $4\times108^\circ=432>360^\circ$, resulta que no puede formarse ningun poliedro con la reunion de 4 ni con mayor número de pentágonos.

El ángulo del exágono regular vale 120°, y como $3\times120^\circ=360^\circ$, resulta que ningun poliedro puede formarse con el exágono, sucediendo otro tanto con el heptágono, el octágono y demás polígonos regulares cuyos ángulos valen más que el del exágono.

En resúmen, se ve que no pueden formarse más que cinco cuerpos regulares que son el *tetraedro*, el *octaedro* y el *icosaedro* con el triángulo; el *cubo* con el cuadrado y el *dodecaedro pentagonal* con el pentágono.

Darémos las siguientes reglas para determinar el número de aristas y el de los vértices de cualquiera de los cinco cuerpos regulares, conociendo la especie y el número de sus caras.

Para determinar el número total de aristas de un cuerpo regular, multiplíquese el número de lados de una cara por el número de caras de que está formado, y tómese la mitad.

Tomando separadamente las caras del sólido regular que se considera, la suma de las aristas seria el producto de las aristas de una cara por el número de caras; pero como cada arista es comun á dos caras; es preciso tomar la mitad de ese producto para obtener las aristas del cuerpo.

Para determinar el número de vértices ó ángulos poliedros de un cuerpo regular, multiplíquese el número de ángulos de cada cara por el de caras que limitan el cuerpo, y divídase el producto por el número de caras que forman cada vértice.

El número de ángulos planos de un cuerpo regular, es igual al producto del número de ángulos de cada cara por el de sus caras, y como en cada ángulo poliedro concurren cierto número de caras, resulta que el número de ángulos poliedros será igual al primer producto dividido por el número de caras que forman cada vértice.

SEMEJANZA DE LOS CUERPOS SOLIDOS.

639.—*Se llaman cuerpos ó poliedros semejantes los que tienen sus caras semejantes, sus aristas proporcionales é iguales tanto sus ángulos diedros como sus poliedros.*

640.—*Dos tetraedros S A B C y S' A' B' C' (fig. 296) son semejantes cuando tienen un ángulo diedro igual, A B = A' B', formado por dos caras semejantes colocadas de la misma manera.*

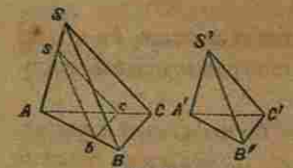

Figura 296.

Si sobrepusiéramos el tetraedro S' A' B' C' poniendo A' en A, A' B' sobre A B y el plano A' B' C' sobre A B C, á causa de la igualdad de los ángulos diedros A B y A' B', la cara A' B' S' coincidiria con el plano de la A B S, y por la semejanza de las caras, siendo iguales sus respectivos ángulos, A' S' caerá sobre la arista A S, B' S' segun b s paralela á B S, y B' C' segun b c igualmente paralela á B C; pues el ángulo A B S = A' B' S' y A B C = A' B' C'. Así es que el tetraedro S' A' B' C' definitivamente coincidirá con s A b c.

Ahora bien, el plano b s c que pasa por b s paralela á B S y por b c paralela á B C determina una cara paralela á S B C, y la interseccion s c será paralela á S C. Así es, que las caras todas de los tetraedros serán semejantes, y por esto proporcionales sus aristas. Los diedros son iguales porque están coincidiendo ó formados por planos paralelos, y los respectivos triedros son iguales por estar formados por ángulos planos iguales distribuidos en el mismo órden (632—3°).

Se ve que *un plano s b c paralelo á una de las caras de un tetraedro, determina otro que le es semejante.*

641.—*Dos tetraedros son semejantes cuando lo son las caras de que están formados.*

De la semejanza de las caras se deduce que las aristas son proporcionales, así como que los ángulos planos de los triedros son iguales. Siendo iguales estos ángulos [631] lo serán los ángulos diedros y tambien los ángulos triedros [632—3°]

642.—*Se llama pirámide un cuerpo S A B C D E* [fig. 297] *limitado por un polígono cualquiera A B C D E, que le sirve de base, y por triángulos S A B, S B C.... que concurren en un mismo punto S, llamado vértice de la pirámide.*

Las aristas S A, S B.... [fig. 297] *de una pirámide quedan cortadas en partes proporcionales por dos planos paralelos A C y a c.*

Siendo paralelos los planos A C y a c, lo serán las rectas A B y a b, B C y b c.... [604] intersecciones de los planos de las caras de la pirámide con los planos A C y a c. Estas rectas paralelas dan [510]:

$$S A : S a :: S B : S b :: A B : a b$$
$$S B : S b :: S C : S c :: B C : b c$$
$$S C : S c :: S D : S d :: C D : c d$$
etc.

y como estas proporciones tienen una razon comun, se infiere:

1° $SA : Sa :: SB : Sb :: SC : Sc....$

que es lo que se queria demostrar;

y 2° $AB : ab :: BC : bc :: CD : cd....$

esto es, *los lados de los polígonos que resultan en una pirámide por la intersección de dos planos paralelos, son proporcionales.*

Figura 297.

643.—*Si una pirámide* S (fig. 297) *se corta por un plano* a c *paralelo á su base, resultará un polígono* a b c d e *semejante á la base* A B C D E.

Acabamos de ver que los lados de los polígonos A B C D E y a b c d e son proporcionales, y como además los ángulos cuyos vértices quedan en la misma arista son iguales por estar formados por lados paralelos (616), serán semejantes.

644.—*Las áreas de los polígonos que resultan cortando una pirámide S* (fig. 297) *por dos planos paralelos, son proporcionales á los cuadrados de sus distancias S H y S h al vértice.*

Por ser los polígonos semejantes, se tiene (519):

$$\text{sup. de } ABCDE : abcde :: AB^2 : ab^2 .... \quad (1)$$

Bajando la perpendicular S H sobre los planos paralelos, y tirando las rectas A H y a h, resultan los triángulos semejantes S A H y S a h, que dan:

$$SA : Sa :: SH : Sh$$

por otra parte $SA : Sa :: AB : ab$

luego $SH^2 : Sh^2 :: AB^2 : ab^2 .... \quad [2]$

suprimiendo la razon comun en las proporciones [1] y [2] se tiene:

áreas $ABCDE : abcde :: SH^2 : Sh^2$

que es lo que se debia demostrar.

645.—*Toda pirámide S A C* (fig. 297) *cortada por un plano a c paralelo á su base, da otra pirámide S a c semejante á la primera.*

Las caras de las dos pirámides son semejantes, por lo cual todas sus

aristas son proporcionales. Siendo iguales los ángulos planos de las caras que constituyen cada ángulo poliedro, serán iguales los ángulos de los triedros en que pueden descomponerse, haciendo pasar planos por el vértice S y los ángulos de la base [631], y los poliedros mismos serán iguales por estar formados de diedros y caras iguales colocadas de la misma manera [636].

646.—*Dos pirámides S A C y S' A' C'* [fig. 298] *formadas por caras semejantes y dispuestas en el mismo órden, son semejantes.*

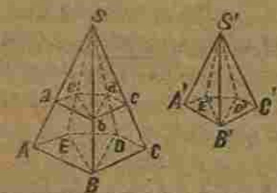

Figura 298.

Por la semejanza de las caras serán proporcionales las aristas é iguales los ángulos planos que forman los poliedros. De esta igualdad de los ángulos planos se origina naturalmente la de los ángulos diedros de los triedros en que pueden descomponerse las pirámides, haciendo pasar planos por los vértices S y S' y los ángulos de las bases [631], y á su vez la de los poliedros. Así, por ejemplo, la igualdad de las caras que constituyen los poliedros S y S' produce la de los diedros; luego los poliedros S y S' serán iguales [636], y si los sobrepusiéramos en S a c, siendo proporcionales las aristas, los planos A C y a c serian paralelos, y por esto semejantes las pirámides S A C y S' A' C'.

647.—*Dos pirámides S A C y S' A' C'* [fig. 298] *serán semejantes si están formadas de tetraedros semejantes dispuestos en el mismo órden.*

Al ser los tetraedros S A E B, S B E D y S B D C respectivamente semejantes á los S' A' E' B', S' B' E' D', etc., las caras que forman los poliedros S y S' serán semejantes, por lo cual los ángulos planos serán iguales y las aristas proporcionales, de lo que se deduce que los ángulos diedros y los triedros de las pirámides serán iguales, y por lo mismo semejantes las pirámides que consideramos.

Como lo que hemos dicho y demostrado de las pirámides es aplicable á todos los poliedros, se infiere:

1° Que dos poliedros serán semejantes cuando tengan sus caras semejantes dispuestas en el mismo órden, formando ángulos diedros iguales.

2° Que dos poliedros son semejantes cuando tirando respectivamente de sus ángulos sólidos homólogos planos que pasen por sus aristas, quedan compuestos de tetraedros semejantes dispuestos en el mismo órden.

3° Recíprocamente, los poliedros semejantes pueden descomponerse en pirámides semejantes, haciendo pasar planos por dos de sus ángulos homólogos y sus respectivas aristas.

FIGURAS SIMETRICAS.

648.—Dos puntos A y A' son *simétricos con respecto á un punto* o cuando las distancias o A y o A' son iguales. El punto o se llama *centro de simetría* [fig. 299].

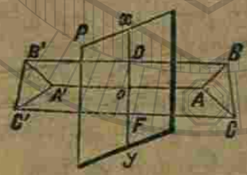

Figura 299.

Se dice que los puntos A y A' son *simétricos respecto á una recta ó eje de simetría* x y, cuando x y divide en dos partes iguales la recta A A' y le es perpendicular.

Los mismos puntos A y A' son *simétricos con respecto á un plano de simetría* P, cuando la recta A A' es perpendicular al plano P, y éste la divide en dos partes iguales.

Se llaman *figuras simétricas* respecto á *un centro, á un eje ó á un plano*, aquellas cuyos puntos son de dos en dos simétricos con relacion á este centro, á este eje ó á este plano.

649.—*Dos figuras simétricas con relacion á un eje son iguales.*

Si, por ejemplo, tenemos el triángulo A B C simétrico con A' B' C' é hiciéramos girar la parte A B C al rededor de D o F, cada uno de los puntos A, B, C coincidirá con sus simétricos A', B' y C' al girar 180°, supuesto que B D es perpendicul[ar] á D o F é igual á D B' sucediendo otro tanto con o A y F C respe[cto] á o A' y á F C'.

650.—*La simetría con relacion á un [punto] ó á una recta, envuelve siempre la condicion de simetría con res[pecto] á un plano.*

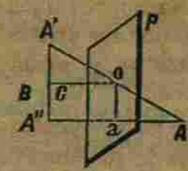

Figura 300.

En efecto, sean A y A' dos puntos simétricos con relacion al centro o (fig. 300). Hagamos pasar un plano P por o y tiremos B o perpendicular al plano. Vamos á demostrar que el punto A'', simétrico de A', con respecto al eje B O lo es igualmente de A con relacion al plano P.

Sea a el punto donde A A'' encuentra al plano P. Siendo C el medio de A' A'' y o el medio de A A', A A'' será paralela á o C (511), y por consiguiente perpendicular al plano P. La recta o a perpendicular á o C será paralela á A' A'', y como pasa por la mitad de A A', el punto a será igualmente el medio de A A''; luego los puntos A y A'' son simétricos con relacion al plano P.

Se ve, pues, por una parte, que la simetría de los puntos A y A' respecto á un centro, produce la simetría respecto á un plano, y por otra que la simetría de A'' y A' con relacion á un eje B o, envuelve igualmente la simetría respecto al plano entre A'' y A. Ahora, como lo que se ha probado de un punto es aplicable á todos los de una figura, resulta que nos bastará ocuparnos de la simetría con relacion á un plano.

651.—*Si tres puntos A, B y C* (fig. 301) *están en línea recta, sus simétricos A', B' y C' con relacion á un plano lo estarán igualmente.*

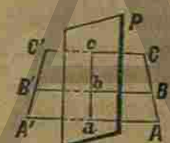

Figura 301.

Las rectas A A', B B' y C C', por ser perpendiculares al plano P, serán paralelas, y por pasar por la recta A B C determinan un plano cuya interseccion con P es la recta a b c. Si se hiciera girar A B C al rededor de a c por ser perpendiculares á c a é iguales las rectas C c y c C', b B y b B', a A y a A', los puntos A, B y C caerian sobre A', B' y C', y estando los primeros en línea recta, se infiere que tambien lo estarán sus simétricos.

652.—En consecuencia, *para que dos rectas sean simétricas, basta que lo sean dos de sus puntos.*

653.—Se deduce tambien (651) *que la distancia de dos puntos es igual á la de sus simétricos.*

654.—*Cuando cuatro puntos A, B, C y D* (fig. 302) *están en un mismo plano, sus simétricos A' B' C' y D' tambien estarán en un plano.*

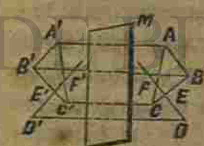

Figura 302.

Tiremos la recta D F que encuentre á B C y á C A en E y en F. Estando D, E y F en línea recta lo estarán igualmente sus simétricos D', E' y F'; pero E' como simétrico de E estará sobre la recta B' C' y F' sobre A' C', luego D' que pertenece á la recta E' F' tendrá que estar sobre el mismo plano que el ángulo B' C' A', que es lo que se debia demostrar.

655.—*De esto resulta que, para que dos planos sean simétricos basta que lo sean tres de sus puntos respectivamente, y para que dos polígonos ó poliedros sean simétricos, es suficiente que lo sean sus respectivos vértices.*

656.—*Los triángulos, así como los ángulos simétricos, son iguales.*

En efecto, en la figura 302 se tiene: A B=A' B', B C=B' C', y A C=A' C', luego los triángulos A B C y A' B' C' serán iguales.

Ademas de la igualdad de los triángulos resulta que los ángulos simétricos son iguales: A C B=A' C' B', C A B=C' A' B', etc.

657.—*Dos poliedros simétricos tienen todas sus partes respectivamente iguales.*

Las caras correspondientes serán iguales, porque pueden descomponerse en triángulos simétricos y por lo mismo iguales. Si se consideran tres aristas de un poliedro y sus correspondientes del otro, por una parte por ser simétricas serán iguales, y por otra los ángulos simétricos que forman tambien lo serán. Siendo iguales los ángulos planos, lo serán los diedros de los triedros en que pueden descomponerse los poliedros. Esto es, serán respectivamente iguales sus aristas, sus caras, sus ángulos diedros y los triedros de que están formados.

SUPERFICIES DE LOS CUERPOS.

658.—*Se llama prisma á un cuerpo ó poliedro A c* (fig. 303) *terminado por superficies planas, siendo las bases A D y a d polígonos iguales y paralelos, y las caras laterales A b, B c.... paralelógramos, formado cada uno de ellos por los lados A B y a b.... de las bases respectivamente iguales.*

Figura 303.

El prisma puede considerarse engendrado por el movimiento de una recta A a que constantemente permanece paralela á sí misma y uno de sus extremos A recorre el polígono A B C D E.

Las rectas A a, B b.... se llaman aristas laterales, y las A B, B C....a b, b c.... aristas de las bases.

Altura del prisma es la distancia de sus bases. Un prisma es *recto* ú *oblícuo*, segun que sus aristas son perpendiculares ú oblícuas con relacion á sus bases. Se dice que es *triangular cuadrangular, pentagonal....* cuando su base es un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono....

Se llama *prisma regular* el que ademas de ser recto, tiene por base un polígono regular.

Todas las caras laterales de un prisma son paralelógramos, puesto que segun la definicion de prisma a b=A B y paralelas (450).

Las bases A D y a d, y las secciones como a' c' paralelas á éstas, son iguales, supuesto que por una parte son iguales los lados de los polígonos de estas secciones y por otra lo son sus ángulos por estar formados por lados paralelos (616).

Un prisma queda completamente determinado cuando se conoce la posicion y magnitud de su base y de una arista.

659.—*La área lateral de un prisma oblícuo es igual al producto de una de sus aristas A a por el perímetro de la seccion* a' b' c' d' (figura 304) *perpendicular á ésta.*

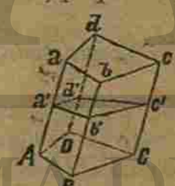

Figura 304.

El área lateral del prisma es igual á la suma de las áreas de las caras laterales que lo forman; pero como estas caras son paralelógramos, la superficie de cada una es igual al producto de su base por su altura. Las bases de los paralelógramos son las aristas del prisma, que todas son iguales á A a, y sus alturas son los lados de la seccion a' b' c' d' que por ser perpendicular á una de ellas lo será á todas las demas. Así es que haciendo la suma de las áreas de los paralelógramos, resulta que la área lateral del prisma es igual al producto de una de sus aristas por el perímetro de la seccion que le es perpendicular.

660.—*La área lateral de un prisma recto es igual al producto de su arista por el perímetro de su base.*

Porque en el caso de ser recto el prisma, la seccion perpendicular á su arista es la de su base. De otro modo, si en la figura 304 la porcion de prisma a' c la colocáramos en la parte inferior haciendo coincidir las recta E' F' tendrá que estar sobre el mismo plano que el ángulo B' C' A', que es lo que se debia demostrar.

655.—*De esto resulta que, para que dos planos sean simétricos basta que lo sean tres de sus puntos respectivamente, y para que dos polígonos ó poliedros sean simétricos, es suficiente que lo sean sus respectivos vértices.*

656.—*Los triángulos, así como los ángulos simétricos, son iguales.*

En efecto, en la figura 302 se tiene: A B=A' B', B C=B' C', y A C=A' C', luego los triángulos A B C y A' B' C' serán iguales.

Ademas de la igualdad de los triángulos resulta que los ángulos simétricos son iguales: A C B=A' C' B', C A B=C' A' B', etc.

657.—*Dos poliedros simétricos tienen todas sus partes respectivamente iguales.*

Las caras correspondientes serán iguales, porque pueden descomponerse en triángulos simétricos y por lo mismo iguales. Si se consideran tres aristas de un poliedro y sus correspondientes del otro, por una parte por ser simétricas serán iguales, y por otra los ángulos simétricos que forman tambien lo serán. Siendo iguales los ángulos planos, lo serán los diedros de los triedros en que pueden descomponerse los poliedros. Esto es, serán respectivamente iguales sus aristas, sus caras, sus ángulos diedros y los triedros de que están formados.

SUPERFICIES DE LOS CUERPOS.

658.—*Se llama prisma á un cuerpo ó poliedro A c (fig. 303) terminado por superficies planas, siendo las bases A D y a d polígonos iguales y paralelos, y las caras laterales A b, B c.... paralelógramos, formado cada uno de ellos por los lados A B y a b.... de las bases respectivamente iguales.*

Figura 303.

El prisma puede considerarse engendrado por el movimiento de una recta A a que constantemente permanece paralela á sí misma y uno de sus extremos A recorre el polígono A B C D E.

Las rectas A a, B b.... se llaman aristas laterales, y las A B, B C....a b, b c.... aristas de las bases.

Altura del prisma es la distancia de sus bases. Un prisma es *recto* ú *oblícuo*, segun que sus aristas son perpendiculares ú oblícuas con relacion á sus bases. Se dice que es *triangular cuadrangular, pentagonal....* cuando su base es un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono....

Se llama *prisma regular* el que ademas de ser recto, tiene por base un polígono regular.

Todas las caras laterales de un prisma son paralelógramos, puesto que segun la definicion de prisma a b=A B y paralelas (450).

Las bases A D y a d, y las secciones como a' c' paralelas á éstas, son iguales, supuesto que por una parte son iguales los lados de los polígonos de estas secciones y por otra lo son sus ángulos por estar formados por lados paralelos (616).

Un prisma queda completamente determinado cuando se conoce la posicion y magnitud de su base y de una arista.

659.—*La área lateral de un prisma oblícuo es igual al producto de una de sus aristas A a por el perímetro de la seccion* a' *b' c' d'* (figura 304) *perpendicular á ésta.*

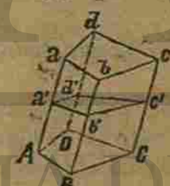

Figura 304.

El área lateral del prisma es igual á la suma de las áreas de las caras laterales que lo forman; pero como estas caras son paralelógramos, la superficie de cada una es igual al producto de su base por su altura. Las bases de los paralelógramos son las aristas del prisma, que todas son iguales á A a, y sus alturas son los lados de la seccion a' b' c' d' que por ser perpendicular á una de ellas lo será á todas las demas. Así es que haciendo la suma de las áreas de los paralelógramos, resulta que la área lateral del prisma es igual al producto de una de sus aristas por el perímetro de la seccion que le es perpendicular.

660.—*La área lateral de un prisma recto es igual al producto de su arista por el perímetro de su base.*

Porque en el caso de ser recto el prisma, la seccion perpendicular á su arista es la de su base. De otro modo, si en la figura 304 la porcion de prisma a' c la colocáramos en la parte inferior haciendo coincidir las bases iguales a c con A C, el prisma oblícuo se convierte en recto conservando la misma área lateral, cuyo valor es el producto de su arista por el perímetro de su nueva base a' b' c' d'.

661.—*La área total de un prisma cualquiera es igual á la lateral, más la de sus bases. La total de uno regular es igual al producto del perímetro de su base por la suma de su arista con el radio recto de la base.*

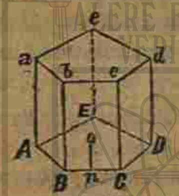

Figura 305.

La primera parte no necesita demostracion.

Si llamamos A la área total del prisma regular A d [fig. 305], p el perímetro A B C D E de la base, y r el radio recto o n de este perímetro, tendrémos:

$$A = A a \times p + 2.\ p \times \tfrac{1}{2} r = p\,(A a + r)$$

que es lo que se debia demostrar.

662.—*La área de un trozo de prisma A d* (fig. 306) *es igual á la suma de las áreas de sus caras.*

Figura 306.

Se llama trozo de prisma la parte de un prisma comprendido entre una de las bases A D y la seccion hecha por un plano a d que no es paralelo á la base.

663.—*Se llama paralelipípedo un prisma A c* (fig. 307), *que tiene por base un paralelógramo.*

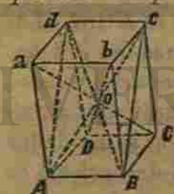

Figura 307.

En este cuerpo las caras opuestas son paralelógramos iguales y paralelos. En efecto, en todo prisma las bases A C y a c son iguales, pero por ser paralelipípedo el sólido serán paralelógramos. Las caras laterales son paralelógramos, y para persuadirse de que son iguales y paralelas por ej. las caras A b y D c, basta observar que los lados del ángulo A B b son respectivamente iguales, y paralelos á los del D C c (446). Lo mismo se verifica con las caras B c y A d por razon del paralelismo é igualdad de las rectas de los ángulos b B C y a A D.

Recíprocamente, *todo cuerpo compuesto de seis caras paralelas de dos en dos, es paralelipípedo.*

Por ser a c paralela á A C, será la recta a b paralela á A B. Por ser

B c paralela á A d, será B b paralela á A a; luego la cara A b será paralelógramo; pudiendo demostrarse igualmente que lo son todas las demás.

Un paralelipípedo está completamente determinado cuando se conoce uno de sus triedros A y la posicion y magnitud de las tres aristas que lo forman. Cualquiera de sus caras puede tomarse por base.

664.—*La seccion A B c d que determina el plano que pasa por dos aristas A B y d c opuestas de un paralelipípedo, es un paralelógramo.*

Siendo a b respectivamente igual y paralela á A B y á d c, A B y d c serán iguales y paralelas (602), y por lo mismo la figura A c será paralelógramo (450).

665.—*Las diagonales A c, B d, a C y b D* (fig. 307) *de un paralelipípedo, se cortan en partes mútuamente iguales y en el mismo punto o.*

Por ser la seccion A B c d un paralelógramo, las diagonales A c y B d se cortarán en partes mútuamente iguales en el punto o (451). Si consideramos ahora la seccion D A b c hecha por las aristas opuestas D A y b c, resulta que la diagonal A c de este nuevo paralelógramo, debe ser cortada por la D b en dos partes iguales, y por lo mismo tendrá que pasar por el mismo punto o, y como otro tanto puede demostrarse respecto á la diagonal a C, resulta que las cuatro diagonales se cortan en partes mútuamente iguales en el punto o.

666.—*Cuando la base A C* (fig. 308) *de un paralelipípedo es un rectángulo, y además las aristas laterales son perpendiculares á las bases, se dice que el paralelipípedo es rectangular.*

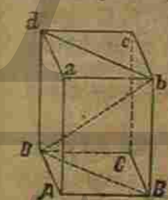

Figura 308.

En este caso todas las caras son rectángulos, y cada una de las aristas es perpendicular á las que pasan por sus extremos, así como á los planos sobre que cae.

Un paralelipípedo recto A c queda dividido en dos prismas triangulares iguales A B D a y C B D c por un plano d b B D que pasa por las diagonales d b y D B de sus bases.

En efecto si hiciéramos coincidir las aristas iguales A a y C c, siendo las tres caras que forman el triedro C respectivamente iguales á las caras que forman el triedro A (632—3°) estos triedros coincidirian. Por la misma razon el triedro c coincidiria con el a, y siendo comun á los dos prismas triangulares la cara d b B D, se infiere que serán iguales los prismas triangulares A B D a y C B D c.

667.—*El cuadrado de la diagonal D b* (fig. 308) *de un paralelipípedo rectangular, es igual á la suma de los cuadrados de las tres aristas que forman uno de sus triedros.*

Por ser rectángulo en B el triángulo b D B se tiene:

$$D\,b^2 = B\,b^2 + D\,B^2 \ldots. \quad (1)$$

siendo el triángulo D A B rectángulo en A, se tiene:

$$D\,B^2 = D\,A^2 + B\,A^2 \ldots. \quad (2)$$

sustituyendo en la ecuacion (1) y reemplazando por D A su igual B C resulta:

$$D\,b^2 = B\,b^2 + B\,C^2 + B\,A^2 \ldots. \quad (3)$$

que es lo que se debia demostrar.

Como las aristas de los triedros son respectivamente iguales, resulta que en el paralelipípedo rectangular las diagonales son iguales, además de verificarse en él las propiedades de los prismas y de los paralelipípedos en general.

668.—*Se llama cubo un paralelipípedo rectangular cuyas seis caras* (fig. 309) *son cuadrados.*

Figura 309.

En el cubo las caras son todas iguales entre sí, así como sus doce aristas. Las caras y las aristas son respectivamente perpendiculares. La gran simetría del cubo ha hecho que se le tome para unidad de volúmen en los cuerpos.

Siendo las aristas del cubo A B = B b = B C iguales entre sí, introduciendo estos valores en la ecuacion (3) del párrafo anterior resulta:

$$D\,b^2 = 3\,A\,B^2$$

esto es, *en el cubo el cuadrado de su diagonal es igual al triple del cuadrado de una de sus aristas.*

669.—*Se llama superficie de revolucion la que puede concebirse engendrada por una línea, recta ó curva, A C B D* (fig. 310) *que gira al rededor de una recta A B que le sirve de eje.*

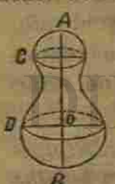

Figura 310.

El carácter distintivo de esta clase de superficies, es, que sea cual fuere la linea generatriz A C D B, cualquier plano perpendicular al eje produce por su interseccion una circunferencia de círculo. En efecto, una recta cualquiera D o perpendicular al eje, describirá un plano perpendicular al eje, y como la distancia o D permanece fija, el punto D trazará una circunferencia de círculo.

670.—*Se llama cilindro un prisma cuyas bases paralelas A B y a b* (fig. 311) *son círculos.*

Aunque las bases pueden ser otras curvas, en la geometría elemental no se considera sino el cilindro de base circular.

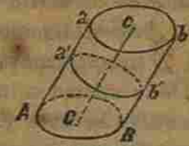

Figura 311.

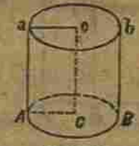

Figura 312.

La línea C c que une los centros de las bases, se llama *eje del cilindro.* Cuando el eje no es perpendicular á las bases del cilindro, se llama *oblícuo,* y cuando el eje es perpendicular á las bases (fig. 312) *el cilindro es recto.* La *altura* de un cilindro es la distancia de sus bases.

Lo mismo que un prisma, el cilindro puede concebirse originado por el movimiento de una recta A a paralelamente al eje, y de la que uno de sus extremos recorre una circunferencia de círculo. De esto resulta que cualquiera seccion paralela á las bases produce un círculo igual á éstas.

El cilindro recto (fig. 312) puede concebirse engendrado por la rotacion de un rectángulo A c al rededor de uno de sus lados C c, que viene á ser el eje del cilindro.

671.—Como el cilindro es un prisma de base circular, y el círculo puede considerarse como un polígono regular de una infinidad de lados, resulta que *la área lateral del cilindro oblícuo es igual al producto de su generatriz A a* (fig. 311) *por la longitud de la curva a' b' de la seccion que le es perpendicular.* (659)

672.—Por la misma consideracion *la área lateral del cilindro recto es igual al producto de su altura por la circunferencia del círculo de su base.*

Si llamamos s la área lateral del cilindro, r el rádio de su base, h su altura y π la razon de la circunferencia al diámetro igual á 3'141593, la expresion del área lateral del cilindro recto será:

$$S = 2\,\pi\,r\,h$$

673.—*La área total de un cilindro es igual á la lateral mas la de sus dos bases.*

La área total del cilindro recto tendrá en consecuencia por expresion:

$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

ó

$$S = 2\pi r (h + r)$$

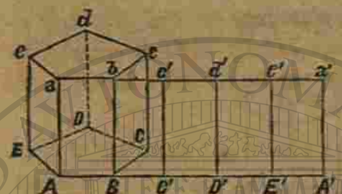

Figura 313.

674.—Si en el prisma A d [figura 313] concebimos que la cara B c gira al rededor de la arista B b hasta colocarse en la prolongacion del plano de la cara A b se formará el rectángulo A c'. De la misma manera, si nos imaginamos que la cara E a gira al rededor de E e hasta ponerse en el plano de e D, en seguida que las dos caras se colocaran en el plano de c D, y las tres caras girando sobre C c se pusiesen en el plano de C b, y girando por último todo el sistema al rededor de B b se colocara en la prolongacion del plano de la primera cara A b, resultaria la superficie lateral del prisma tendida en plano é igual al rectángulo A a'. Las partes que componen este rectángulo son respectivamente iguales á las que forman la área lateral del prisma. La área de este rectángulo es equivalente á la lateral del prisma, pues una y otra tienen por valor el producto de la arista A a por A A' que es el perímetro de la base.

La figura A a a' A' se llama el *desarrollo* de la superficie lateral del prisma A d.

Igualmente el *desarrollo* de un cilindro recto es un rectángulo cuyas bases son las circunferencias del cilindro, y su altura la de este cuerpo.

La superficie lateral de un cilindro oblícuo A b [fig. 314] tambien puede desarrollarse en plano. Para esto tirarémos la recta a' a' igual a

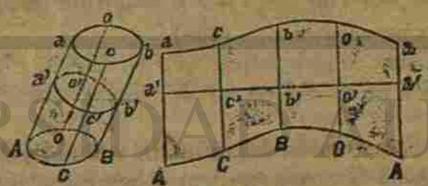

Figura 314.

la curva que daria la seccion hecha perpendicularmente á la generatriz A a, que es a' c' b' o' a'; sobre esta recta se llevarán las partes a' c', c' b'.... respectivamente iguales á las partes de la curva rectificadas a' c', c' b'....; por los puntos de division a', c'.... se levantarán perpendiculares y sobre ellas se llevarán las partes a' a=a' a de la generatriz, a' A =a' A, c 'c = c' c, c' C = c, C.... y se tendrá la área A a'' terminada por dos curvas paralelas, que será el desarrollo de la superficie lateral del cilindro oblícuo.

675.—*La área total de una pirámide S A D* [fig. 315] *es igual á la suma de las áreas de los triángulos que forman sus caras y la del polígono A B C D.... de su base.*

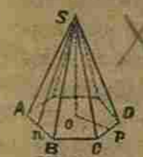

Figura 315.

676.—*La área lateral de una pirámide regular S A D* (fig. 315) *tiene por valor la mitad del producto del perímetro de su base por el apotema S n.*

Se llama *apotema, la altura S n de uno de los triángulos de las caras de la pirámide.* Cuando ésta es regular, su base es un polígono regular y su altura S o es una perpendicular que cae en el centro de la base. De esto resulta que las caras de una pirámide regular son triángulos iguales, pues por una parte sus bases A B, B C.... son lados de polígono regular, y por otra los lados S A, S B.... son oblícuas que se separan igualmente del pié de la perpendicular. Las alturas de estos triángulos son todas iguales á S n.

Así, pues, la área lateral de la pirámide será igual á

$$\tfrac{1}{2}\, S n\, (A B + B C + \ldots .)$$

y si llamamos s esta área, el apotema S n=A, y p el perímetro A B C D de la base, se tendrá:

área lateral de la pirámide $= s = \frac{1}{2}\, p\, A$.

Para obtener la área total de la pirámide, á la lateral debemos agregarle la del polígono de la base que tiene por valor $\frac{1}{2}$ p. r, llamando r el radio recto o p. Así, pues,

área total de la pirámide $= S = \frac{1}{2}\, p\, A + \frac{1}{2}\, p\, r$

ó ,, ,, ,, $= S = \frac{1}{2}\, p\, (A + r)$

677.—Se llama *trozo de pirámide la parte de una pirámide comprendida entre la base A D y la seccion hecha por un plano a d* (fig. 316) *que le es paralelo.*

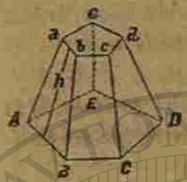

Figura 316.

La área lateral de un trozo de pirámide recta tiene por valor el producto de la altura h de una de sus caras por la semisuma de los perímetros de sus bases.

Las caras del trozo son trapecios iguales, cuyas alturas todas son iguales á h, y como la área de cada trapecio (565) es igual al producto de su altura por la semisuma de las bases A B + a b, la de todo el trozo tendrá por medida el producto de la altura de una de las caras por la semisuma de los perímetros A B C.... + a b c de sus bases.

678.—Se llama *cono una pirámide S A B* (fig. 317) *cuya base es un círculo.*

Aunque la base puede ser una curva cerrada cualquiera, en la geometría elemental sólo se considera el cono de base circular.

La recta S o que une el vértice con el centro de la base, se llama *eje* del cono, que *es recto* cuando el eje es perpendicular á la base, y *oblícuo* en el caso contrario. *Altura* del cono es la perpendicular bajada del vértice sobre la base.

Figura 317.

El cono puede concebirse originado por el movimiento de una recta S A sujeta á pasar constantemente por un punto S y recorrer con el otro extremo la circunferencia A B, la cual traza otra capa cónica superior S a b que rara vez se considera. Cuando el cono es recto, como en la figura 317, puede considerarse engendrado por la revolucion de un triángulo rectángulo S o A girando al rededor de uno de sus catetos S o. Por esta razon (669) cualquiera seccion C D hecha paralelamente á la base en el cono, produce un círculo.

679.—*La área lateral del cono recto tiene por valor la mitad del producto de su generatriz S A por la circunferencia de la base.*

Esto resulta de que el cono es una pirámide cuya base es un polígono regular de una infinidad de lados (676). Si llamamos A el lado S A del cono, y r el radio A o de su base, tendrémos:

$$\text{área lateral del cono} = s = \pi \text{ r A.}$$

Para obtener la área total debemos agregar la del círculo de la base, por lo que

$$\text{área total del cono} = S = \pi \text{ r A} + \pi \text{ r}^2 = \pi \text{ r (A+r)}$$

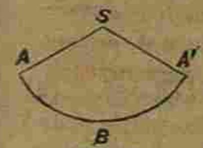

Figura 318.

La área lateral de un cono recto puede desarrollarse en plano, y es un sector de círculo S A B A' (fig. 318) *cuyo rádio es la generatriz S A de la figura 317, y el arco A B A' es igual á la circunferencia de la base.*

En efecto, basta concebir cortada la superficie lateral del cono segun una de sus generatrices S A, para comprender que al extender esta superficie se formaria un sector, supuesto que por una parte todas las generatrices vienen á concurrir al punto S, y por otra todos los puntos de la circunferencia de la base conservan una distancia igual á S A al vértice S. Además, la área del sector (570) y la lateral del cono tienen por valor la misma expresion, pues ambos son iguales á $\frac{1}{2}$ S A $\times$ A B A'.

Para determinar el número de grados del ángulo A S A', observarémos que la longitud del arco A B A' que le sirve de medida, es la de la circunferencia del círculo O (fig. 317) base del cono. Por consiguiente conservando las anotaciones de A para el lado S A del cono, y *r* para el radio A O de la base; y representando por *x* el número de grados del ángulo A S A', tendrémos:

longitud del arco A B A' $= 2 \pi$ r

Por otra parte, conocida esta longitud, se determinará el número de grados del arco A B A' por la proporcion:

circf. A S : arco A B A' :: 360° : x

$$2 \pi \text{ A} : 2 \pi \text{ r} :: 360° : x° = \frac{\text{r. } 360°}{\text{A}}$$

Figura 319.

680.—*La área lateral del trozo de cono recto A D b a* (fig. 319) *tiene por valor el producto de su generatriz A a por la semisuma de las circunferencias de sus bases A D y a b.*

Aun cuando esto es una consecuencia de lo que dejamos probado en el número 677, lo demostrarémos directamente.

Llamemos R el radio de la base inferior cuya circunferencia es 2π R, r el radio de la base superior cuya circunferencia es 2π r, y l el lado A a del tronco. La área lateral que buscamos es igual á la del cono S A D ménos la del cono S a b. Representándola por T tendrémos [679]

$$T=\pi\,R.\ S\,A-\pi\,r.\ S\,a\ldots.[1]$$

$$S\,A=l+S\,a \text{ y } S\,A-S\,a=l$$

sustituyendo $T=\pi\,R\,(l+S\,a)-\pi\,r\,S\,a=\pi\,R\,l+\pi\,S\,a\,(R-r)\ldots.[2]$

Vamos á determinar el valor de S a en funcion de los radios y de l para sustituirlo en esta ecuacion. Comparando los triángulos semejantes S A O y S a o, se tiene:

$$R : r :: S\,A : S\,a$$

Dividiendo $R-r : r :: S\,A-S\,a : S\,a=\frac{r\,l}{R-r}$

sustituyendo en la ecuacion [2]

$$T=\pi\,R\,l+\frac{\pi\,r\,l}{R-r}[R-r]$$

reduciendo y sacando l como factor comun, se tiene por último:

$$T=l\,[\pi\,R+\pi\,r]\ldots.[3]$$

que es lo que se debia demostrar.

Considerando el trapecio a o O A [459], en el que l es el medio de A a, se tiene: $l\,m=\frac{1}{2}\,[R+r]$

multiplicando por 2π $\quad 2\pi.\ l\,m=\frac{1}{2}\,[2\pi\,R+2\pi\,r]$

$$2\pi.\ l\,m=\pi\,R+\pi\,r$$

sustituyendo en la ecuacion [3] resulta:

$$T=l\times 2\pi.\ l\,m$$

Esto es, *la área lateral del trozo de cono recto tiene por valor el producto de su lado por la circunferencia del círculo tirado á distancias iguales de sus bases.*

681.—*Se llama esfera un cuerpo A O B N* [fig. 320] *limitado por una superficie curva cuyos puntos todos están á igual distancia de uno interior C llamado centro.*

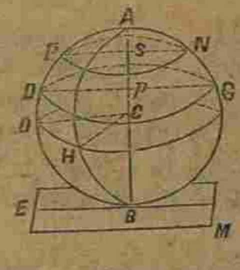

Figura 320.

La esfera puede considerarse engendrada por la revolucion de un semicírculo A D B al rededor de su diámetro A B. Cuando se corta la esfera por un plano que pasa por su centro C, se produce un círculo A O B N que se llama *círculo máximo. Todos los círculos máximos de una esfera son iguales*, porque todos tienen por rádio el de la esfera. De esto resulta que la esfera puede considerarse engendrada por la revolucion de cualquiera de sus círculos máximos.

Un plano, sea cual fuere su direccion, corta la esfera segun un círculo. Si este plano fuera por ejemplo F N, levantando el diámetro A B perpendicular, podria suponerse la esfera engendrada por el semicírculo A F O B girando al rededor de este eje A B, y por consiguiente (669) la seccion hecha por un plano perpendicular al eje, tiene que ser un círculo.

Todo círculo, cuyo centro no coincide con el de la esfera, trazado en su superficie, se llama círculo menor. F N y D G son círculos menores.

Se llama zona la parte de la superficie de la esfera F D G N comprendida entre dos circunferencias, cuyos planos son paralelos.

Se llama casquete esférico, ó zona de una base, la parte de la superficie de la esfera F N A limitada por una circunferencia F N.

682.—Se llama *plano tangente á la esfera el que, como M* (fig. 320), *no tiene mas que un punto B de contacto con ella.*

Como toda recta diversa de C B tirada del centro de la esfera al plano, tiene que ser mayor que su rádio, resulta que el rádio C B es la menor distancia del centro al plano, y por consiguiente le es perpendicular. Recíprocamente, todo plano M perpendicular al extremo de un radio C B será tangente á la esfera, porque debiendo ser cualquiera oblícua mayor que la perpendicular C B, el plano M no podrá tener mas que el punto B de contacto con la esfera.

Si se hace girar un círculo y su tangente B E al rededor del diámetro A B perpendicular á la tangente, se engendrará la esfera y un plano tangente al punto B, porque este plano M es perpendicular al radio C B.

683.—*Cuando un polígono regular A B C....* (fig. 321) *gira al rededor del diámetro A O del círculo inscrito, engendra una superficie que tiene por medida el producto de la circunferencia del círculo inscrito por la proyeccion de la parte del perímetro que se considera sobre el eje A O de revolucion.*


Figura 321.

Para demostrar este principio en toda su generalidad, consideraremos tres casos: 1°, la superficie de un cilindro engendrada por una porcion C D del polígono paralela al eje A O; 2°, la superficie de un trozo de cono engendrada por el lado B C, y 3°, la superficie de un cono engendrada por el lado A B.

1° La superficie del cilindro originado por la rotacion de C D tiene por valor (672): circf. D N × C D y sustituyendo sus iguales: circunferencia G O × M N, que es lo que expresa el principio que vamos demostrando.

2° La superficie de trozo de cono engendrado por la rotacion de B C al rededor del eje tiene por medida (680):

$$C\,B \times \text{circf. } G\,P \ldots.\ (1)$$

Comparando los triángulos C B H y G O P que son semejantes por tener sus lados perpendiculares, se tiene:

$$C\,B : B\,H :: G\,O : G\,P$$
$$G\,O : G\,P :: \text{circf. } G\,O : \text{circf. } G\,P$$
luego
$$C\,B : L\,M :: \text{circf. } G\,O : \text{circf. } G\,P$$

formando el producto de extremos y medios

$$C\,B \times \text{circf. } G\,P = \text{circf. } G\,O \times L\,M$$

y como el primer miembro de esta ecuacion es la área lateral del trozo de cono, se ve que esta segun lo expresado en el segundo miembro tiene por valor igualmente lo que indica el principio que venimos demostrando:

3° La superficie del cono engendrado por la rotacion de A B al rededor del eje tiene por valor (679):

$$\tfrac{1}{2}\ \text{circf. } B\,L \times A\,B \ldots.\ (2)$$

Comparando los triángulos A B L y A O F que son semejantes por ser rectángulos y tener el ángulo A B L=A O F cuyos lados son perpendiculares, se tiene:

$$A\,L : A\,F :: B\,L : F\,O$$
$$B\,L : F\,O :: \text{circf. } B\,L : \text{circf. } F\,O$$
luego:
$$A\,L : A\,F :: \text{circf. } B\,L : \text{circf. } F\,O$$

formando el producto de los medios y de los extremos

$$\text{circf. } B\,L \times A\,F = \text{circf. } F\,O \times A\,L$$
sustituyendo
$$\text{circf. } B\,L \times \tfrac{1}{2}\,A\,B = \text{circf. } G\,O \times A\,L$$

Expresando el primer miembro la área del cono, se ve que tiene por valor igualmente lo que indica el segundo miembro de la ecuacion, que es la expresion algebráica del teorema que venimos demostrando.

En consecuencia, cualquiera que sea la posicion del lado del polígono generador de la superficie, el valor de ésta se determina por la regla que hemos demostrado.

684.—Cuando el polígono regular tiene un número infinito de lados la superficie que engendra es la de la esfera, y por medio del principio del párrafo anterior, podremos determinar la área de este cuerpo y la de sus diversas partes.

Si llamamos R el radio de la esfera, y la altura s p de la zona F D G N (fig. 320) la representamos por h, tendremos:

$$\text{área de la zona esférica} = s = 2\,\pi\,R.\,h$$

En el casquete esférico si representamos por a su altura s A, tendremos:

$$\text{área del casquete esférico} = s = 2\,\pi\,R.\,a$$

Como la área de la esfera es la suma de las áreas de las diversas zonas y casquetes que la forman, y la suma de las proyecciones de todas las partes del semicírculo generador sobre el eje es el diámetro, resulta que

$$\text{la área de la esfera} = S = 2\,\pi\,R. = 4\,\pi\,R^2$$

luego la superficie de la esfera es cuádrupla de la de uno de sus círculos máximos.

Si por R ponemos su valor $\frac{D}{2}$, llamando D al diámetro, tendremos por expresion del área de la esfera:

$$S = \pi\,D^2$$

Se llama *huso á la porcion de la superficie de la esfera* A O B H A (fig. 320) *comprendida entre dos semicírculos máximos que terminan en el mismo diámetro* A B. Si desde el centro C de la esfera se tiran los radios C O y C H perpendiculares al diámetro comun A B, *el ángulo* O C H, que mide el ángulo diedro de los dos semicírculos que limitan el huso, *se llama ángulo del huso.*

Si el arco O H, medida del ángulo del huso, se divide en dos partes iguales y por el punto de division se tira un semicírculo que pase por A B, resultará un huso que será la mitad del primero por ser sobreponibles las porciones de la esfera de que están formados. Si el arco O H se divide en tres, cuatro ó más partes iguales, el huso quedará dividido igualmente en tres, cuatro ó más partes iguales entre sí. En consecuencia, *las superficies de los husos son proporcionales á sus ángulos, ó á los arcos que los miden.*

Si comparamos la superficie del huso con la de la esfera, tendremos:
sup. huso A O B H : sup. esfera :: arco O H : circf. círc. máximo
luego, *la superficie de un huso es igual á la de la esfera multiplicada por la relacion que existe entre el número de grados del ángulo del huso y* 360°

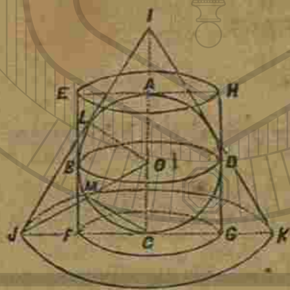

Figura 322.

685.—Si al círculo A B C D [fig. 322] circunscribimos un cuadrado E F G H y un triángulo equilátero I J K y suponemos que este sistema gira al rededor del eje I A C, resultará una esfera inscrita á un cilindro y á un cono, y vamos á determinar la relacion que existe entre la superficie de la esfera y las del cilindro y cono circunscritos á ella.

Llamando R el radio B O de la esfera, hemos visto ya que:

1° el área de la esfera $= S = 4\pi R^2$.

Respecto al cilindro [672] tenemos:

2° área lateral del cilindro $= S' = 2\pi R \times 2R = 4\pi R^2$

3° área total del cilindro $= S'' = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$. [673]

Para determinar la área del cono vamos á comenzar por establecer el valor del rádio de su base J C, que por razon del triángulo equilátero es la mitad de su lado I J, en funcion del rádio de la esfera. Siendo equilátero el triángulo que engendra el cono, el ángulo I J K vale 60° [465], y como los triángulos O L J y O C J son iguales, el ángulo

O J C vale 30°, y el J O C, que es su complemento valdrá 60°. Tirando la cuerda C M, ésta será igual al radio [497], y nos resulta el triángulo equilátero O M C en el que el ángulo O C M = 60°. Si del ángulo recto O C J se resta el O C M, queda el ángulo M C J = 30°. De consiguiente el triángulo M C J será isósceles, por tener iguales los ángulos M J C y M C J, y por tanto M J = M C = R. Por último se tendrá, J O = 2 R.

Considerando el triángulo rectángulo J O C, se tiene:

$$JC^2 = JO^2 - OC^2$$

y sustituyendo $\quad JC^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$

por otra parte $\quad 2\,JC = JI$

Ahora bien: la área total del cono [679] es

$$S''' = \pi\, JC\,[2\,JC + JC] = 3\pi\, JC^2$$

y sustituyendo $\quad S''' = 9\pi R^2$

En resúmen: el área de la esfera $= 4\pi R^2$
la lateral del cilindro $= 4\pi R^2$
la total del cilindro $= 6\pi R^2$
y la total del cono $= 9\pi R^2$

De lo que resulta: 1° que la área de la esferra es igual á la lateral de cilindro circunscrito; 2° que es los dos tercios de la total del mismo cilindro; 3° que es los cuatro novenos de la total del cono circunscrito; y 4° que la área del cilindro es media proporcional entre la de la esfera y la del cono, supuesto que

$$6\pi R^2 = \sqrt{4\pi R^2 \times 9\pi R^2}$$

686.—*Las áreas de dos poliedros semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus líneas homólogas.*

Llamemos s, s', s''.... las áreas de las caras de un poliedro, y S, S', S''.... las de su semejante: l, l', l''.... las líneas del primer poliedro, y L, L', L''.... las líneas homólogas en el segundo. Se tiene [579]:

$$s : S :: l^2 : L^2 \qquad s' : S' :: l'^2 : L'^2 \text{ etc.}$$

Por ser las caras semejantes, tendremos:

$$l : L :: l' : L' :: l'' : L'' \ldots.$$

elevando al cuadrado $l^2 : L^2 :: l'^2 : L'^2 :: l''^2 : L''^2 \ldots.$

luego $s : S :: s' : S' :: s'' : S'' \ldots :: l^2 : L^2$

y como la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á un consecuente [318—8°] resulta:

$$s + s' + s'' \ldots : S + S' + S'' + \ldots :: l^2 : L^2$$

que es lo que se queria demostrar.

Las áreas de dos cilindros engendrados por rectángulos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus alturas y á los de sus radios.

Si representamos por s y S las áreas laterales de los cilindros, por r y R los radios de sus bases, y por h y H sus respectivos alturas. Como los rectángulos generadores tienen por lados los radios y las alturas, y por el supuesto son semejantes, tendremos:

$$h : H :: r : R$$

por otra parte $s : S :: 2 \pi r h : 2 \pi R H \ldots.$ [1]

multiplicando ordenanamente, y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$s : S :: r^2 : R^2$$

y si la proporcion [1] se multiplica por la siguiente:

$$r : R :: h : H$$

resulta: $s : S :: h^2 : H^2$

que es lo que se debia demostrar.

Las áreas laterales de los conos engendrados por triángulos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus generatrices y á los de sus radios.

Representando por s y S las áreas laterales de los conos, por a y A sus respectivas generatrices, y por r y R los radios de sus bases: siendo los triángulos generadores semejantes, cuyas hipotenusas y catetos homólogos son a, A y r, R, se tiene:

$$a : A :: r : R$$

por otra parte [679] $s : S :: \pi r a : \pi R A$

multiplicando ordenadamente estas proporciones y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$s : S :: r^2 : R^2$$

elevando al cuadrado los términos de la 1ª proporcion:

$$a^2 : A^2 :: r^2 : R^2$$

se tiene igualmente $s : S :: a^2 : A^2$

Las áreas de las esferas son proporcionales á los cuadrados de sus radios y á los de sus diámetros.

Siendo la área de la esfera $= 4 \pi R^2 = \pi D^2$, [684] si representamos por s y S las áreas de las esferas, por r y R sus radios, y por d y D sus respectivos diámetros, se tiene:

$$s : S :: 4 \pi r^2 : 4 \pi R^2 :: \pi d^2 : \pi D^2$$

y suprimiendo los factores comunes resulta:

$$s : S :: r^2 : R^2 :: d^2 : D^2$$

14 687.—Problemas.—I.—*Determinar la superficie lateral de un prisma recto de base pentagonal, cuyo lado es de 8 centímetros y su arista tiene tres metros y medio.*

Para que la superficie esté valuada en una unidad dada, comenzarémos por expresar las dimensiones del prisma en la misma unidad lineal, en metros ó en centímetros. Adoptando la primera, tendrémos que el perímetro de la base será $= \overset{m}{0'08} \times 5 = 0'40.$

La arista del prisma $= \overset{m}{3'50}$, y por último, la área lateral será

$$s = \overset{m}{0'40} \times 3'50 = \overset{m.\,c.}{1'40}$$

un metro cuadrado y 40 centésimos de metro cuadrado.

Si hubiésemos adoptado por unidad lineal el centímetro, la superficie la habriamos obtenido en centímetros cuadrados, é igual 1400 centímetros cuadrados.

15 II.—*Se quiere determinar el lado de un cubo cuya diagonal mide* $\overset{m}{5{,}1961}$.

Si llamamos l el lado del cubo y d su diagonal, hemos visto [668] que

$$d^2 = 3\ l^2$$

despejando á l y sustituyendo por d su valor, se tiene:

$$l = \sqrt{\frac{5'1961^2}{3}} = 3 \text{ metros próximamente.}$$

16 III.—*Determinar la área total de un cilindro recto, cuya altura es de* $\overset{m}{1'8}$ *y el radio de su base* $\overset{m}{0'6}$.

La fórmula correspondiente [673] es:

$$s = 2\ \pi\ r\ [h + r]$$

sustituyendo los valores del problema

$$s = 2 \times 3'141593 \times \overset{m}{0'6} \times \overset{m}{1'8} = \overset{m.\ cd.}{6'78584}$$

17 IV.—*Determinar la superficie lateral de una pirámide exagonal recta y regular, en la que el lado de la base es de 3 pulgadas y su apotema tiene 11 pulgadas.*

El perímetro de la base será $3 \times 6 = 18$ pulgadas, y la área lateral [676] es:

$$s = \tfrac{1}{2}\ p.\ A = \tfrac{1}{2}\ 18 \times 11 = 99 \text{ pulg. cuadradas.}$$

18 V.—*Determinar la superficie lateral de un trozo de pirámide regular cuadrangular, en la que los lados de las bases son $2\frac{1}{2}$ piés y 2 piés, y la altura de uno de los trapecios que le sirve de cara 1 pié y 9 pulgadas.*

El perímetro de la base inferior será $2\frac{1}{2} \times 4 = 10$ piés.

El perímetro de la base superior $2 \times 4 = 8$ piés.

La área lateral del trozo será $= \frac{1}{2}\ [10 + 8]\ 1'75 = 15'75$ piés cuadrados.

19 VI.—*Determinar la superficie total de un cono recto cuya generatriz es de* $\overset{m}{11'25}$, *y el rádio de su base* $\overset{m}{4'72}$.

La fórmula correspondiente [679] es:

$$S = \pi\ r\ (A + r)$$

sustituyendo $S = 3'141593 \times 4'72 \times 15'97 = \overset{m.\ cd.}{236{,}808}$

20 VII.—*Calcular la superficie de una zona glacial de la tierra, que es un casquete esférico cuya altura aproximada es de 526'6 kilómetros y el rádio de la esfera 6 367 kilómetros.*

La fórmula correspondiente (684) es

$$s = 2\ \pi\ R\ a$$

sustituyendo: $s = 2 \times 3'141593 \times \overset{kilóms.}{6367} \times \overset{kilóms.}{526'6}$
$= 21\ 066\ 657$ kilómetros cuadrados.

21 VIII.—*Determinar la superficie de una de las zonas templadas de la tierra, siendo su altura 3 305 kilómetros, y el radio de la esfera 6 367 kilómetros.*

La fórmula respectiva (684) es:

$$s = 2\ \pi\ R\ h$$

sustituyendo $s = 2 \times 3'141593 \times 6367 \times 3305$
próximamente $= 132\ 216\ 674$ kilómetros cuadrados ó miriaras.

22 IX.—*Dado el radio de una esfera, que es de 6 367 kilómetros, determinar su superficie.*

Para resolver este problema haremos uso de la fórmula:

$$S = 4\ \pi\ R^2\ (684)$$

sustituyendo $S = 4 \times 3'141593 \times 6\ 367^2$
próximamente $= 509\ 424\ 070$ kilómetros cuadrados.

23 X.—*Se quiere determinar el diámetro de una esfera cuya superficie es de 282 743'37 metros cuadrados.*

Si de la fórmula (684)

$$s = \pi\ D^2$$

despejamos á D y sustituimos: $D = \sqrt{\dfrac{282743'37}{3'141593}} = 300$ metros.

Volúmen de los cuerpos.

688.—*Volúmen es la extension en sus tres dimensiones, longitud, latitud y grueso.*

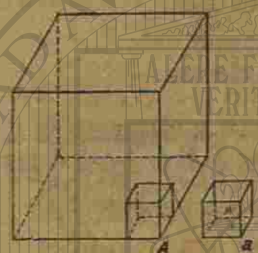

Figura 323.

El volúmen de un cuerpo es la extension comprendida entre las superficies que lo limitan. Así como la medida de una línea se obtiene refiriendo su longitud á la de otra línea tomada por unidad y determinando el número de veces que está contenida en ella, para valuar un volúmen es necesario averiguar cuántas veces contiene á la unidad de volúmen. Al explicar el sistema de pesos y medidas (182 y 185) dijimos que la unidad de volúmen es el *cubo*, que tiene la unidad lineal por lado. Así, por ejemplo, si el cubo a (figura 323) representa la unidad de volúmen, y quisiéramos determinar el volúmen del cuerpo A, tendriamos que averiguar cuántas veces el primer cubo cabe en el segundo. En la figura de que nos servimos, pueden colocarse en la base del cubo A 16 cubos iguales á a, y cabiendo 4 hiladas, una encima de otra, de 16 cubos, diriamos que el volúmen del cuerpo A es de 64 medios centímetros cúbicos; porque es el medio centímetro cúbico el volúmen que en este caso hemos tomado por unidad. La medida ó valuacion de volúmenes raras veces puede hacerse si no es valiéndose de métodos indirectos.

Cuerpos equivalentes en volúmen son los que tienen volúmenes iguales. Así, por ejemplo, un paralelipípedo, en el que quepan 64 cubos iguales á a, será equivalente á A, sin ser igual ni aun semejante á este cuerpo.

689.—*Dos paralelipípedos de la misma base é igual altura, son equivalentes en volúmen.*

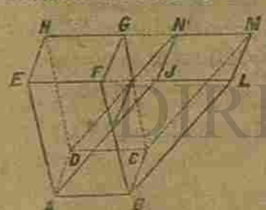

Figura 324.

Siendo las bases iguales, siempre se podrán hacer coincidir como en la figura 324, en A C, y por ser iguales las alturas, las otras bases E G y J M quedarán en el mismo plano H L.

Esto supuesto, pueden ocurrir dos casos:

1º Cuando quedan en un mismo plano las caras A F y A L de los dos prismas, los triángulos E A J y F B L son iguales por tener

iguales los ángulos en A y en B, formados por lados respectivamente iguales como lados opuestos de paralelógramos. Ahora bien: los prismas E A J H y F B L G, que tienen los expresados triángulos E A J y F B L por bases, son sobreponibles por tener todos sus elementos iguales, y si del sólido total B D H L se quitan sucesivamente los prismas triangulares iguales E A J H y F B L G, nos quedarán los paralelipípedos B D N L y B D H F, que serán equivalentes.

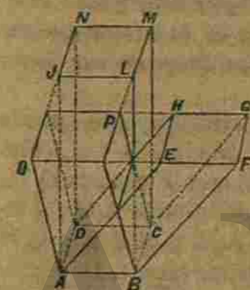

Figura 325.

2º Cuando no quedan en el mismo plano las caras A F y A L (fig. 325), si prolongamos los lados de las bases superiores E F, G H, J N y LM, por sus respectivas intersecciones se formará el paralelógramo O P igual á ellas, y por consiguiente igual á la base comun A C. Si unimos los vértices de O P con los de la base A C, se formará un nuevo paralelipípedo A P que se hallará en las circunstancias del 1er. caso con los paralelipípedos A G y A M, y será equivalente á cada uno de ellos, luego estos paralelipípedos A G y A M serán tambien equivalentes entre sí.

690.—*Un paralelipípedo cualquiera puede trasformarse en otro rectangular recto que sea equivalente á él.*

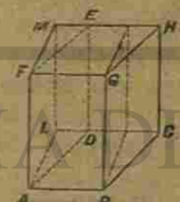

Figura 326.

En los vértices de la base A B C D (fig. 326) del paralelipípedo dado, levantemos perpendiculares á la base, iguales á la altura del mismo paralelipípedo, y se tendrá otro paralelipípedo A C H E F recto y equivalente al propuesto, que, para evitar confusion, no hemos representado en la figura. En seguida levantemos en A y B perpendiculares á A B, y sobre el rectángulo A J construiremos el paralelipípedo B M equivalente á B E, por tener ambos la misma base A G y A L por altura; luego el paralelipípedo recto y rectangular B M será equivalente al propuesto, que no se ha representado en la figura.

691.—*Dos paralelipípedos rectangulares de la misma base son proporcionales á sus alturas.*

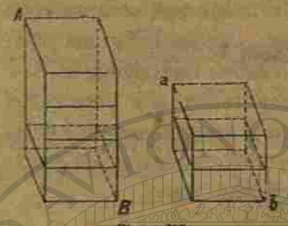

Figura 327.

Puede suceder que las alturas de los dos paralelipípedos sean conmensurables ó inconmensurables, y en uno ó en otro caso haciendo pasar planos por los puntos de division, resultarian paralelipípedos iguales (fig. 327), y repitiendo el raciocinio que hicimos en el número 557 con las figuras 234 y 235, fácilmente demostrariamos la verdad del teorema.

Figura 328.

692.—*Los volúmenes de dos paralelipípedos A P y A p* (fig. 328) *rectangulares de la misma altura, son proporcionales á las superficies de sus bases B P y B p.*

Siendo rectangulares los paralelipípedos, puede hacerse coincidir uno de sus triedros B y el plano de sus bases. Prolonguemos la cara F p hasta Q H, y nos resultará un nuevo paralelipípedo A Q. Llamarémos P al paralelipípedo A P, p al A p, y Q al A Q. Comparando P con Q, que tienen la misma base A D, se tiene [691]:

$$P : Q :: BC : BE$$

Comparando Q con p, que tienen la misma base B F, se tiene:

$$Q : p :: BD : BG$$

multiplicando ordenadamente estas proporciones, resulta:

$$P : p :: BC \times BD : BE \times BG$$

que es lo que se queria demostrar.

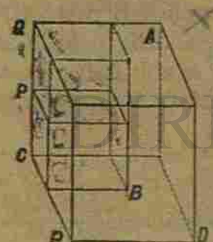

Figura 329.

693.—*Los volúmenes de dos paralelipípedos rectangulares cualesquiera A P y B p* (fig. 329), *son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.*

Si prolongamos las caras del paralelipípedo B p, nos resultará uno nuevo B Q. Llamando P al paralelipípedo A P, p al B p, y Q al B Q, tendrémos, comparando P con Q, que tienen la misma altura:

$$P : Q :: CD : CB$$

Comparando Q con p, que tienen la misma base, se tendrá:

$$Q : p :: CQ : Cp$$

multiplicando las proporciones, resulta:

$$P : p :: CD \times CQ : CB \times Cp$$

que es lo que se debia demostrar.

694.—Si en la última proporcion p nos representa un cubo que se tome como unidad de volúmen, por lo que sus lados serán iguales á la unidad de longitud, la expresada proporcion se cambia en

$$P : 1 : CD \times CQ : 1 \times 1$$

luego $$P = CD \times CQ$$

Esto es, *cuando se toma por unidad de volúmen el cubo que tiene por lado la unidad lineal, el volúmen de un paralelipípedo rectangular recto tiene por valor el producto de su base por su altura;* pero debe tenerse presente que las cantidades que forman la última ecuacion son números abstractos que representan relaciones con la unidad respectiva. P representa el número de veces que el paralelipípedo que se considera contiene al cubo que se ha tomado por unidad, y expresará metros cúbicos, varas cúbicas, pulgadas cúbicas, segun que sus dimensiones se hayan estimado respectivamente en metros, en varas ó en pulgadas. La base C D expresará las veces que la unidad superficial está contenida en ella; y por último, la altura C Q expresará las veces que la unidad lineal está contenida en dicha altura. Además el número P que representa el volúmen, tiene que estar indicado en la unidad correspondiente á la lineal que ha servido para estimar las dimensiones del paralelipípedo. Por ejemplo, si éstas se han tomado en metros, el volúmen resultará valuado en metros cúbicos; si se han tomado en decímetros, el volúmen resultará en litros; si se han tomado en piés, el volúmen resultará en piés cúbicos, etc.

Siendo el *cubo* un paralelipípedo recto cuyos lados son iguales, *su volúmen tiene por valor la 3ª potencia de uno de sus lados.* De aquí la denominacion de cubo á la 3ª potencia.

Como el volúmen de un paralelipípedo oblícuo es equivalente al de uno recto rectangular de la misma altura y de base equivalente [689], resulta: que *el volúmen de un paralelipípedo cualquiera tiene por valor el producto de su base por su altura.*

Figura 330.

695.—*Un prisma oblícuo A D* (fig. 330), *es equivalente á otro recto O p cuya generatriz P p=B D y su base O P es la proyeccion de la A B del primero.*

Prolonguemos las aristas C A, B D.... tiremos el plano M N perpendicular á estas aristas, tomemos P p = B D y hagamos pasar el plano o p paralelo á M N. De este modo resulta el prisma recto O p cuya generatriz es igual á la de A D, y su base O P es la proyeccion de la base A B. Vamos á demostrar que los prismas A D y O p son equivalentes.

Si consideramos los prismas truncados o D y O B, veremos que son iguales, pues por una parte sus bases O P y o p lo son como bases de un mismo prisma O p, y por otra sus aristas respectivas tambien lo son, esto es, P B = p D, O A = o C, etc. En efecto, por construccion P p=B D agregando á estas rectas la parte p B resulta P B=p D, y lo mismo con las demás aristas. Ahora bien, si de los prismas truncados O B y o D se quita la parte comun o B, resulta: prisma recto O p = al oblícuo A D; que es lo que teniamos que demostrar.

696.—*Los prismas simétricos A D y a d* (fig. 330) *son equivalentes.*

Para que el prisma a d sea simétrico á A D, se necesita que las rectas D d, C c.... sean perpendiculares al plano M N, y además que D P = d P, O C = O c, P B = P b, O A = O a....

Tomemos P p=P p'=D B y hagamos pasar por p y p' planos paralelos á M N. Nos resultarán los prismas O p y O p' iguales, por ser rectos, por tener la misma base é iguales sus generatrices. Ahora bien: O p es equivalente á A D (695), y O p' lo es á a d, luego A D y a d serán equivalentes; que es lo que se tenia que demostrar.

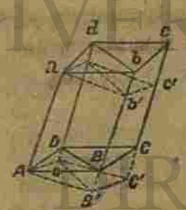

Figura 331.

697.—*Un paralelipípedo cualquiera A c* (fig. 321) *está formado de dos prismas triangulares A B D b d a y C B D d b c, equivalentes entre sí.*

Si por las diagonales d b y D B de las bases se hace pasar un plano, resultarán dos prismas triangulares A D B a y C D B c, cuyas partes constitutivas son iguales, pero que, por no estar dispuestas en el mismo órden, no serán sobreponibles. Para demostrar que los volúmenes de estos prismas son equivalentes, tiremos dos planos a c' y A C' perpendiculares á las aristas, y prolongando éstas nos resultarán el paralelipípedo recto A c' y los prismas triangulares rectos A B' O a y C' B' O c'. Estos prismas son iguales por serlo las partes de que se componen, y estar en ambos distribuidas en el mismo órden (666). Además, el prisma recto A B' O a es equivalente al oblícuo A B D b d a, porque tienen la misma generatriz A a y su base A B' O es la proyeccion de la A B D (695). Por igual razon, el prisma recto C' B' O c' es equivalente al C B D b d c; luego siendo iguales los prismas rectos, serán equivalentes entre sí los prismas A B D b d a y C B D b d c, y por lo mismo equivalentes á la mitad del paralelipípedo A c.

698.—*El volúmen de un prisma cualquiera tiene por valor el producto de la superficie de su base por su altura.*

1° Si el prisma es un paralelipípedo recto, hemos visto [694] que esa es la medida de su volúmen.

2° Si es un paralelipípedo oblícuo, su volúmen es equivalente al de uno recto de la misma altura y de base equivalente en superficie [689].

3° En el caso de que el prisma tenga por base un triángulo como A B D b d a (fig. 331), segun acabamos de verlo, éste será la mitad del paralelipípedo cuya base fuera un paralelógramo A B C D doble del triángulo. Ahora bien, como el volúmen del paralelipípedo tiene por expresion el producto de la superficie del paralelógramo de su base por su altura, el volúmen del prisma triangular será igual á la mitad de esta expsesion; ó lo que es lo mismo, al producto de la superficie del triángulo que le sirve de base por la altura del prisma.

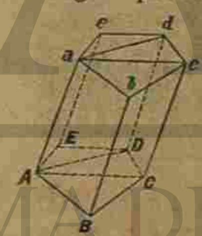

Figura 332.

4° Si la base del prisma es un polígono, podemos descomponerlo en prismas triangulares, haciendo pasar planos por una de sus aristas laterales A A' (fig. 332) y todas las opuestas. Siendo el volúmen del prisma poligonal A C' la suma de los prismas triangulares en que ha quedado descompuesto, si representamos por V el volúmen total, y por v, v', v'' los volúmenes respectivos de los prismas triangulares, tendrémos:

$$V = v + v' + v''$$

Por otra parte, el volúmen de cada prisma triangular tiene por valor el producto de su base por su altura. Así es que si observamos que las alturas de todos los prismas parciales son iguales á la del prisma total, en razon de ser paralelas las bases A C y A' C', representando por a esta altura comun y sustituyendo en la ecuacion anterior, resulta:

$$V = A\,B\,C \times a + A\,C\,D \times a + A\,D\,E \times a$$

y sacando á a como factor comun y reemplazando la suma de los triángulos por el polígono que forman, se tiene:

$$V = A\,B\,C\,D\,E \times a$$

que es lo que debíamos demostrar.

699.—Si llamamos P el volúmen de un prisma cuya base es B y A su altura; y representamos por p el volúmen de otro prisma cuya base sea b y a su altura, tendrémos:

$$P : p :: B \times A : b \times a$$

luego *los volúmenes de dos prismas cualesquiera son proporcionales á los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

Si las bases son iguales, esto es, si B=b los volúmenes de los prismas serán proporcionales á sus alturas; y si por el contrario, lar alturas son iguales, sus volúmenes serán proporcionales á sus bases.

700.—*El volúmen de un cilindro, recto ú oblícuo, tiene por valor el producto de la área de su base por su altura.*

Supuesto que un cilindro no es mas que un prisma cuya base es un polígono regular de una infinidad de lados. Si representamos por v el volúmen del cilindro, por r el radio de su base, y por h su altura, tendrémos como expresion del volúmen del cilindro $v = \pi r^2 h$.

701.—*El volúmen de un tetraedro D A B C* (fig. 333) *es la tercera parte del de un prisma A B C F D E de la misma base y altura que él.*

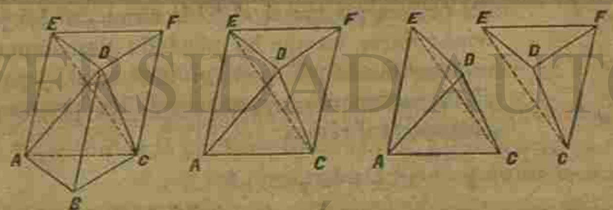

Figura 333.

Sobre la base A B C de nuestro tetraedro, levantemos aristas iguales y paralelas á D B, con lo que se formará el prisma A B C E D F de la misma base y altura que el tetraedro. Si quitamos éste nos quedará la

pirámide cuadrangular D A C F E, que para mayor claridad hemos representado en la figura 2ª. En esta pirámide el plano D C E la divide en dos tetraedros, representados por separado en las figuras 3ª y 4ª, de los que el C D E F es equivalente tanto al D A B C como al D A C E. En efecto, C D E F es equivalente á D A B C por tener sus bases E D F y A B C iguales (658) y la misma altura, que es la distancia de las bases del prisma. El mismo tetraedro D C E F es equivalente al D A C E porque sus bases E C F y A C E son triángulos iguales y tienen la misma altura, que es la distancia de D á la cara A C F E. Luego siendo equivalentes entre sí los tres tetraedros en que hemos dividido el prisma, el volúmen de uno de ellos D A B C será la tercera parte del del prisma.

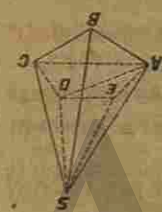

Figura 334.

702.—Haciendo pasar planos por las aristas de una pirámide S A B C.... (fig. 334) puede descomponerse en tetraedros, que tienen la misma altura que la pirámide. El volúmen de la pirámide es la suma de los volúmenes de los tetraedros, así como su base es la suma de los triángulos que sirven respectivamente de bases á los tetraedros, y como el volúmen de cada tetraedro tiene por valor la tercera parte del producto de su base por su altura, se infiere que el *volúmen de una pirámide cualquiera tiene por medida la tercera parte del producto de su base por su altura.*

703.—Como el cono es una pirámide de base circular, *el volúmen del cono recto ú oblícuo tiene por valor la tercera parte del producto de su base por su altura.*

Si representamos por v el volúmen del cono, por r el radio de su base y por h su altura, tendrémos con expresion del volúmen del cono:

$$v = \tfrac{1}{3} \pi r^2 h$$

704.—El volúmen de un poliedro cualquiera se obtiene descomponiéndolo en pirámides y valuando en seguida el volúmen de éstas: su suma dará el volúmen del poliedro.

705.—*Las pirámides de igual altura y de bases equivalentes, tienen el mismo volúmen.*

Supuesto que el volúmen de las pirámides tendrá por valor la tercera parte del producto de factores iguales.

706.—*El volúmen de un trozo de prisma triangular A B C F D E* (fig. 335) *tiene por valor la tercera parte del producto de su base A B C* *por la suma de las distancias de los tres vértices D, E y F á la misma base.*

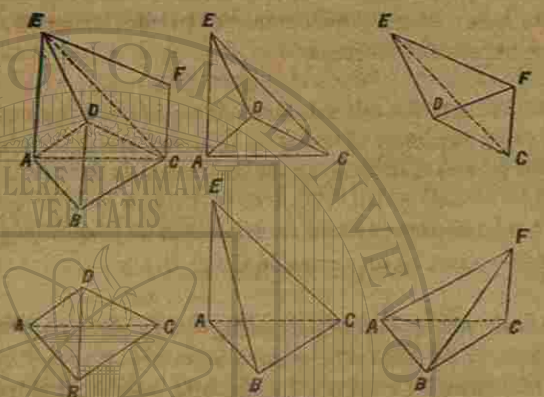

Figura 335.

Si en el prisma truncado A B F hacemos las mismas secciones que en el número 701, primero con el plano D A C nos resultará por una parte el tetraedro D A B C, que hemos representado en la figura 1ª de abajo, y la pirámide cuadrangular D A C F E. Esta pirámide cuadrangular, cortada por el plano D C E, se descompone en los tetraedros D C A E y D C F E. Así es que el volúmen del trozo será la suma de los volúmenes de los tres tetraedros D A B C, D C A E y D C F E. El primer tetraedro de la figura 1ª tiene por base la del trozo A B C, y por altura la distancia del vértice opuesto D á esta misma base, y su volúmen será el tercio del producto de estas dos cantidades, lo cual está conforme con el enunciado del teorema que venimos demostrando. El segundo tetraedro D C A E es equivalente al B C A E representado en la figura 2ª de abajo, que resultaria haciendo pasar un plano por los vértices B E C del trozo de prisma, porque tiene la misma base C A E é igual altura por ser la arista B D paralela á la cara A E. El tercer tetraedro D C F E es equivalente al B C F A, representado en la figura 3ª de abajo, que resultaria al cortar el trozo por un plano que pasara por los vértices F, A y B, porque tienen bases equivalentes y la misma altura. Los triángulos C F E y C F A que sirven de bases á estos tetraedros son equivalentes, porque tienen la misma base C F, y por altura la distancia de las dos aristas paralelas C F y A E. Las alturas de los tetraedros D C F E y B C F A son iguales, porque la arista D B es paralela á la cara A F del trozo. En último análisis, el volúmen del

trozo A F es equivalente á la suma de los volúmenes de los tetraedros de las figuras 1ª, 2ª y 3ª de abajo, que tienen por base la del trozo A B C y por alturas respectivamente las distancias de los vértices opuestos D, E y F á esta base; luego el volúmen del prisma truncado tendrá por valor lo que expresa el teorema.

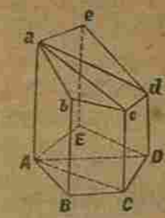

Figura 336.

707.—*El volúmen de un prisma truncado* A D' (figura 336) *de base cualquiera, tiene por valor la suma de los volúmenes de los trozos de los prismas triangulares* A B C A', A C D A', y A D E A' *en que se puede descomponer haciendo pasar planos por una arista* A A' *y las opuestas* C C', D D'.

27 708.—*El volúmen de un trozo de pirámide de bases paralelas, es igual á la tercera parte del producto de la altura del trozo por la suma de la base inferior, más la superior, más una média proporcional entre ambas.*

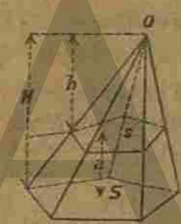

Figura 337.

Llamemos S la base inferior del trozo (fig. 337), S' su base superior y a su altura. Completando la pirámide de que forma parte del trozo, llamarémos: V el volúmen de la pirámide total O S, y H su altura: v el volúmen de la pirámide superior O S' y H' su altura. El volúmen del trozo que representarémos por T, será igual á V—v. Esto supuesto, tendrémos

$$V = \tfrac{1}{3} S\,H,\quad v = \tfrac{1}{3} S'\,H',\quad V - v = \tfrac{1}{3} S\,H - \tfrac{1}{3} S'\,H'$$

Como $H = a + H'$ sustituyendo en el último valor

$$V - v = T = \tfrac{1}{3} S\,(a + H') - \tfrac{1}{3} S'\,H'$$

ejecutando la multiplicacion $\quad T = \tfrac{1}{3}\Big(S\,a + H'\,(S - S')\Big) \ldots \ (1)$

Vamos á determinar el valor de H' en funcion de a, S y S' para sustituirlo en esta ecuacion. Conforme á lo demostrado en el número 644, se tiene:

$$S : S' :: H^2 : H'^2$$

extrayendo raíz y sustituyendo

$$\sqrt{S} : \sqrt{S'} :: a + H' : H'$$

formando é igualando el producto de extremos y medios,

$$H'\sqrt{S} = a\sqrt{S'} + H'\sqrt{S'}$$

despejando á $$H' = \frac{a\sqrt{S'}}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}} \ldots. \quad (2)$$

sustituyendo este valor en la ecuacion (1)

$$T = \frac{1}{3}\left(S\,a + \frac{a\sqrt{S'}\,(S-S')}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}\right)$$

sacando a como factor comun y considerando que

$S=\sqrt{S^2}$, $S'=\sqrt{S'^2}$ y que $S-S'=(\sqrt{S}+\sqrt{S'})\,(\sqrt{S}-\sqrt{S'})$, (251–3°)

tendremos:

$$T = \frac{1}{3}a\left(S + \frac{\sqrt{S'}\,(\sqrt{S}+\sqrt{S'})(\sqrt{S}-\sqrt{S'})}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}\right)$$

y finalmente $$T = \frac{1}{3}a\,(S + S' + \sqrt{S\,S'}) \ldots. \quad (3)$$

que es lo que teniamos que demostrar.

709.—Como el trozo de cono, lo es de una pirámide cuyas bases paralelas son círculos, llamando t su volúmen y sustituyendo por S y S' sus valores, se tiene:

$$t = \frac{1}{3}a\,(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi^2 R^2 r^2})$$

ó $$t = \frac{1}{3}\pi a\,(R^2 + r^2 + R\,r)$$

expresion que servirá para valuar el volúmen de un trozo de cono.

710.—*Un triángulo* A B C (fig. 338) *que gira al rededor de una recta cualquiera* C I *situada en su plano y que pasa por uno de sus vértices* C, *engendra un volúmen que tiene por valor la tercera parte del producto de la perpendicular* C D *bajada de este vértice sobre la base* A B, *multiplicada por la superficie engendrada por esta base* A B.

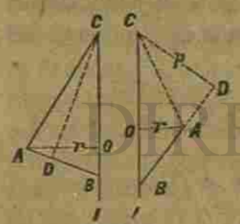

Figura 338.

Llamarémos p á la perpendicular C D bajada sobre la base A B, R á la A O, y para simplificar dirémos vol. B A C para expresar el volúmen engendrado por la rotacion del triángulo B A C al rededor de C I, y sup. A B para indicar la superficie engendrada por la rotacion de la recta A B. Esto supuesto, considerarémos tres casos:

1° Cuando el triángulo C A B gira al rededor de uno de sus lados C B (fig. 338). Se tiene:

$$\text{vol. } C\,A\,B = \text{cono } C\,O\,A + \text{cono } B\,O\,A$$
$$\text{vol. } C\,A\,B = \tfrac{1}{3}\pi R^2\,(C\,O + O\,B) = \tfrac{1}{3}\pi R.\ R \times C\,B$$

R × C B, que es el duplo de la superficie del triángulo C A B, es igual á A B × p, y sustituyendo se tiene:

$$\text{vol. } C\,A\,B = \tfrac{1}{3}\pi R.\ A\,B \times p$$

pero como π R. A B expresa la superficie cónica engendrada, por la rotacion de A B (679), finalmente resulta:

$$\text{vol. } C\,A\,B = \tfrac{1}{3}\text{ sup. } A\,B \times p$$

que es lo que expresa el teorema. Cualquiera que sea el valor del ángulo en A, serán aplicables los raciocinios de esta demostracion.

2° Cuando el triángulo C A B (fig. 339) gira al rededor de una línea exterior C I. En este caso tendrémos.

$$\text{vol. } C\,A\,B = \text{vol. } C\,A\,I - \text{vol. } C\,B\,I$$

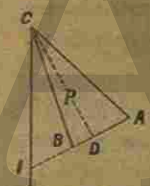

Figura 339.

sustituyendo los valores de vol. C A I y de vol. C B I conforme á lo demostrado en el primer caso, se tiene:

$$\text{vol. } C\,A\,B = \tfrac{1}{3}\text{ p. sup. } A\,I - \tfrac{1}{3}\text{ p. sup. } B\,I$$

ó $$\text{vol. } C\,A\,B = \tfrac{1}{3}\text{ p. (sup. } A\,I - \text{sup. } B\,I) = \tfrac{1}{3}\text{ p. sup. } A\,B$$

que es lo que se tenia que demostrar.

3° Cuando la base A B (fig. 340) es paralela al eje de rotacion. En este caso se tiene:

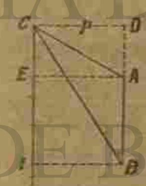

Figura 340.

$$\text{vol. } C\,A\,B = \text{cilindro } A\,B\,I\,E + \text{cono } C\,A\,E - \text{cono } C\,B\,I$$

sustituyendo los valores respectivos tendremos:

$$\text{vol. } C\,A\,B = \pi p^2\,E\,I + \tfrac{1}{3}\pi p^2\,C\,E - \tfrac{1}{3}\pi p^2\,C\,I$$
$$= \pi p^2\,(E\,I + \tfrac{1}{3}C\,E - \tfrac{1}{3}C\,I) = \tfrac{1}{3}\pi p^2\,(3\,E\,I + C\,E - C\,I)$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi p^2\,(3\,E\,I - E\,I) = \tfrac{1}{3}\pi p^2\,2\,E\,I$$

ó $$\text{vol. } C\,A\,B = 2\pi p\,E\,I \times \tfrac{1}{3}p = \tfrac{1}{3}\text{ sup. } A\,B \times p.$$

que es lo que se tenia que demostrar.

711.—Este teorema nos servirá de fundamento para determinar el volúmen de la esfera, del *sector* y del *segmento* esférico.

Figura 341.

En efecto, si nos imaginamos un polígono regular A B D E.... (fig. 341) circunscrito á un círculo, y que éste gire al rededor de un diámetro A C, el volúmen engendrado por la rotacion del polígono será igual á la suma de los volúmenes producidos por los triángulos A B C, B D C, D C E.... y tendrá por expresion $\frac{1}{3}$ p (sup. A B + sup. B D + sup. D E....) Esto es, el volúmen engendrado por el polígono tiene por valor la tercera parte del producto del rádio por la superficie engendrada por los lados del polígonos. Cuando los lados de éste sean infinitamente pequeños *el volúmen se convertirá en el de la esfera cuyo valor será la tercera parte del producto de su superficie por el rádio.*

Y como la superficie de la esfera es cuádrupla de la de uno de sus círculos máximos (684), el volúmen de la esfera tendrá por expresion:

$$v = 4\pi R^2 \times \frac{1}{3} R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

ó

$$v = \frac{1}{6}\pi D^3$$

sustituyendo por R su valor en funcion del diámetro, que es $\frac{D}{2}$.

28

712.—*Se llama sector esférico la porcion de la esfera* C D E A (fig. 342) *limitada por la superficie cónica* D C E *que tiene por vértice el centro de la esfera y por el casquete esférico* A D E. El sector esférico puede concebirse engendrado por la rotacion del sector circular A C D al rededor del radio A C.

Figura 342.

El volúmen del sector esférico, conforme al teorema demostrado (710), *tendrá por valor la tercera parte del producto del radio de la esfera por la superficie del casquete esférico D E A.*

Llamando *a* la altura A O del casquete esférico, y recordando (684) que la área de éste está expresada por $2\pi R.\ a$, el volúmen del sector esférico tendrá por expresion:

$$v = \frac{2}{3}\pi R^2 a$$

713.—Se llama *segmento esférico* la porcion de la esfera D E A (fig.

342), engendrada por la rotacion del segmento circular D O E A al rededor de la flecha O A.

El volúmen del segmento esférico es igual al del sector C D E A ménos el del cono C D E, y tendrá por valor:

$$v=\frac{2}{3}\pi R^2 a-\frac{1}{3}\pi D\,O^2\times O\,C\ldots.(1)$$
$$D\,O^2=B\,O\times O\,A\ (538)=(2\,R-a)\,a=2\,R\,a-a^2$$
$$O\,C=R-a$$
$$D\,O^2\times O\,C=(2\,R\,a-a^2)\,(R-a)=2\,R^2\,a-3\,R\,a^2+a^3$$

sustituyendo en [1]

$$v=\frac{2}{3}\pi R^2 a-\frac{1}{3}\pi\,[2\,R^2\,a-3\,R\,a^2+a^3]$$

ejecutando la multiplicacion, reduciendo y sacando como factor comun á $\frac{1}{3}\pi a^2$, se tiene finalmente:

volúmen del segmento esférico$=v=\frac{1}{3}\pi a^2\,[3\,R-a]$

El volúmen de un segmento de dos bases paralelas F G E D, es igual á la diferencia de los volúmenes de los segmentos que se apoyan sobre los círculos que respectivamente le sirven de bases.

Para determinar el volúmen engendrado por la revolucion del segmento circular A i B D [fig. 342 bis] girando al rededor del diámetro E F, supondremos que para fijar la magnitud del segmento se conozca la cuerda A B, y que para determinar la posicion del mismo segmento con relacion al eje de revolucion se da la proyeccion O H de su cuerda A B. Esto supuesto el volúmen engendrado por la revolucion del segmento A i B D es igual al engendrado por el sector A C B D ménos el engendrado por el triángulo A C B girando ambas figuras al rededor de E F. Así pues:

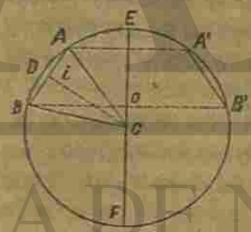

Figura 342 bis.

vol. seg. A i B D=vol. sector A C B D—vol. triángulo A C B....[1]
conforme á lo demostrado [710]
vol. sector A C B D=sup. zona A D B$\times\frac{R}{3}=2\pi R\times$H O$\times\frac{R}{3}$ [684]
vol. sector A C B D$=\frac{2}{3}\pi R^2\times$H O..............................[2]
Ahora conforme á lo demostrado [683 y 710]

$$\text{vol. triáng. } A\,C\,B = 2\,\pi\,Ci \times H\,O \times \frac{Ci}{3} = \frac{2}{3}\,\pi\,Ci^2 \times H\,O$$

como en el triángulo rectángulo A i C

$$Ci^2 = A\,C^2 - A\,D^2 = R^2 - \frac{A\,B^2}{4}$$

tendremos:

$$\text{vol. triáng. } A\,C\,B = \frac{2}{3}\,\pi\,H\,O\left(R^2 - \frac{A\,B^2}{4}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{[3]}$$

sustituyendo los valores de las ecuaciones [2] y [3] en la [1] resulta:

$$\text{vol. seg. } A\,i\,B\,D = \frac{2}{3}\,\pi\,R^2\,H\,O - \frac{2}{3}\,\pi\,H\,O\left(R^2 - \frac{A\,B^2}{4}\right)$$

ejecutando las operaciones y reduciendo:

$$\text{vol. seg. } A\,i\,B\,D = \frac{1}{6}\,\pi\,H\,O \times A\,B^2$$

que es la expresion del volúmen engendrado por la rotacion de un segmento circular en funcion de su cuerda y de la proyeccion de esta sobre el eje de rotacion.

Se llama cuña á la porcion del volúmen de la esfera A B M A H (figura 342) *comprendida entre dos semicírculos máximos que terminan en el mismo diámetro A B y la superficie de un huso A H B M.*

Como si dividimos en dos, tres ó más partes iguales el ángulo H C M del huso que fija la magnitud de la cuña, resultará ésta dividida en dos, tres ó igual número de partes, por ser sobreponibles las cuñas de la misma esfera que corresponden á husos iguales, resulta que los volúmenes de las cuñas son proporcionales á los ángulos de sus husos, y siendo la esfera el conjunto de un número dado de cuñas iguales, resulta:

vol. cuña A B M A H : vol. esfera :: como arco H M : circf. círc. máx.
luego *el volúmen de una cuña es igual al de la esfera multiplicado por la relacion que existe entre el número de grados del ángulo H C M del huso de la cuña y 360°.*

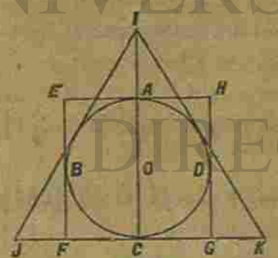

Figura 343

714.—Si al círculo A B C D (fig. 343) circunscribimos un cuadrado E F G H y un triángulo equilátero I J K, y nos imaginamos que gira este sistema al rededor del eje I A C, resultarán un cilindro y un cono circunscritos á la esfera, y tendrémos:

1° El volúmen de la esfera que lo representaremos por v,

$$v = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3$$

2° El del cilindro que lo llamarémos v',

$$v' = \pi\,R^2 \times 2\,R = 2\,\pi\,R^3$$

3° El volúmen del cono circunscrito que representarémos por

$$v'' + \frac{1}{3}\,\pi\,C\,J^2 \times C\,I$$

Ahora bien, hemos visto (685) que $J\,C^2 = 3\,R^2$ y que $J\,I = 2\,J\,C$, luego $J\,I^2 = 4\,J\,C^2 = 12\,R^3$

Para determinar el valor de C I, considerarémos el triángulo rectángulo I C J, en el que

$$I\,C = \sqrt{J\,I^2 - J\,C^2} = \sqrt{12\,R^2 - 3\,R^2} = 3\,R$$

sustituyendo en el valor de v'' los de $C\,J^2$ y de C I, se tiene:

$$v'' = \frac{1}{3}\,\pi\,3\,R^2 \times 3\,R = 3\,\pi\,R^3$$

En resúmen, el volúmen de la esfera $= \frac{4}{3}\,\pi\,R^3$
,, del cilindro $= 2\,\pi\,R^3$
,, del cono $= 3\,\pi\,R^3$

Comparando estas cantidades, se ve que son entre sí como 4 : 6 : 9, de lo que se deduce: 1° que el volúmen de la esfera es los dos tercios de el del cilindro circunscrito: 2° que es igual á los cuatro novenos de el del cono; y 3° que el volúmen del cilindro es medio proporcional entre el de la esfera y el del cono, supuesto que $6 = \sqrt{4 \times 9}$.

715.—*Los volúmenes de dos pirámides cualesquiera son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.*

Si representamos por P el volúmen de una pirámide cuya base sea B y A su altura, tendrémos (702): $P = \frac{1}{3}$ B. A; y llamando p el volúmen de la otra pirámide, b su base y a su altura, se tiene: $p = \frac{1}{3}$ b. a. Luego

$$P : p :: \frac{1}{3}\,B.\,A : \frac{1}{3}\,b.\,a.$$

multiplicando por 3 la 2ª razon

$$P : p :: B.\,A : b.\,a$$

que es lo que se queria demostrar.

716.—*Los volúmenes de dos pirámides semejantes son proporcionales á los cubos de sus alturas ó al de sus líneas homólogas.*

Conforme al teorema del número anterior, se tiene:

$$P : p :: B \times A : b \times a$$

por ser las pirámides semejantes (644)

$$B : b :: A^2 : a^2$$

multiplicando estas proporciones y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$P : p :: A^3 : a^3$$

y como por ser las pirámides semejantes, todas sus líneas homólogas son proporcionales entre sí; llamando L y l las líneas que se escojan, se tiene:

$$A : a :: L : l$$

ó $A^3 : a^3 :: L^3 : l^3$

luego $P : p :: A^3 : a^3 :: L^3 : l^3$

30 717.—*Los volúmenes de los poliedros semejantes son entre sí como los cubos de sus líneas homólogas.*

Llamemos V y v los volúmenes de los poliedros; P, P', P''...... las pirámides en que se puede descomponer el primer poliedro V, y p, p', p''.... las pirámides semejantes de que se compone el segundo poliedro v; L, L', L''.... las líneas de uno, y l, l', l''...... las homólogas del otro. Se tiene (716):

$$P : p :: L^3 : l^3 \qquad P' : p' :: L'^3 : l'^3 \text{ etc.}$$

por ser semejantes los poliedros, lo serán sus caras y tendrémos:

$$L : l :: L' : l' \ldots.$$

elevando al cubo $L^3 : l^3 :: L'^3 : l'^3 \ldots.$

luego $P : p :: P' : p' :: P'' : p'' \ldots. :: L^3 : l^3$

y como la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente (318—8°) resulta:

$$P + P' + P'' \ldots. : p + p' + p'' \ldots. :: L^3 : l^3$$

ó $V : v :: L^3 : l^3$

que es lo que debiamos demostrar.

31 718.—*Los volúmenes de los cilindros rectos engendrados por rectángulos semejantes son proporcionales á los cubos de sus radios ó á los de sus alturas.*

Representarémos por V el volúmen de un cilindro, por R el radio de su base, y por H su altura; por v el volúmen del otro cilindro, por r el radio de su base, y por h su altura. Tendrémos (700):

$$V : v :: \pi R^2 H : \pi r^2 h \ldots.[1]$$

como los rectángulos generadores son semejantes, y los lados de estos rectángulos son los radios y las alturas de los respectivos cilindros, se tiene:

$$H : h :: R : r$$

multiplicando ordenadamente y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$V : v :: R^3 : r^3$$

Igualmente, si la proporcion [1] se multiplica por la

$$R^2 : r^2 :: H^2 : h^2$$

resulta:

$$V : v :: H^3 : h^3$$

que es lo que se debia demostrar.

32 719.—*Los volúmenes de los conos rectos engendrados por triángulos rectángulos semejantes, son proporcionales á los cubos de sus líneas homólogas.*

Llamemos V y v los volúmenes de los conos, H y h sus respectivas alturas, R y r sus radios, y A, a sus generatrices. Por ser semejantes sus triángulos generadores, se tiene:

$$R : r :: H : h :: A : a \ldots.[1]$$

Por otra parte (703) $V : v :: \frac{1}{3}\pi R^2 H : \frac{1}{3}\pi r^2 h \ldots.[2]$

Elevando al cuadrado la primera proporcion de la série de razones [1]

$$R^2 : r^2 :: H^2 : h^2$$

multiplicando los términos de esta proporcion por los de la [2] y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$V : v :: H^3 : h^3$$

si elevamos al cubo los términos de las razones iguales [1] se tiene:

$$R^3 : r^3 :: H^3 : h^3 :: A^3 : a^3$$

luego $$V : v :: R^3 : r^3 :: H^3 : h^3 :: A^3 : a^3$$

que es lo que se queria demostrar.

33 720.—*Los volúmenes de las esferas son proporcionales á los cubos de sus radios ó á los de sus diámetros.*

Hemos visto (711) que el volúmen de la esfera tiene por expresion $\frac{4}{3}\pi R^3$ ó $\frac{1}{6}\pi D^3$, así es que si representamos por V y v los volúmenes de las esferas, por R y r sus respectivos radios, y por D y d sus diámetros, tendrémos:

$$V : v :: \tfrac{4}{3}\pi R^3 : \tfrac{4}{3}\pi r^3 :: \tfrac{1}{6}\pi D^3 : \tfrac{1}{6}\pi d^3$$

y suprimiendo los factores comunes

$$V : v :: R^3 : r^3 :: D^3 : d^3$$

que es lo que se queria demostrar.

721.—*Los volúmenes de los poliedros simétricos son iguales.*

Si imaginándonos dos poliedros P y P' simétricos con relacion á un plano, tomamos un punto O en el interior de uno de ellos, y su simétrico o' en el otro, y desde estos puntos tiramos rectas á todos los vértices, nos resultarán divididos los dos poliedros en el mismo número de pirámides respectivamente simétricas. Estas pirámides tienen sus bases y sus alturas iguales [657], luego serán equivalentes en volúmen considerándolas de dos en dos, y en consecuencia la suma de todas las que forman el poliedro P será igual á la suma de las pirámides que constituyen el poliedro P'.

34 722.—Problemas.—I.—*Determinar el volúmen de un paralelipípedo rectangular, en el que los tres lados de uno de sus triedros miden:* $\overset{\text{m}}{\text{1‘50}}$, *42 centímetros y 50 centímetros.*

Comenzarémos por expresar las dimensiones lineales referidas á la misma unidad. Elegirémos el metro para que el volúmen resulte en metros cúbicos. Llamando V el volúmen que buscamos, tendrémos (694):

$$V = \overset{\text{m}}{\text{1‘50}} \times \overset{\text{m}}{\text{0‘42}} \times \overset{\text{m}}{\text{0‘50}} = \overset{\text{m cúb.}}{\text{0‘315}}$$

Si hubiéramos querido determinar el volúmen en litros, las dimensiones lineales las habriamos reducido á decímetros, y nos habria resultado: $V = \overset{\text{d}}{\text{15}} \times \text{4‘2} \times 5 = 315$ litros.

II.—*Determinar el volúmen de un cilindro cuya base tiene 40 centímetros de rádio, y 60 centímetros de altura.*

La fórmula correspondiente es [700]:

$$v = \pi r^2 h$$

sustituyendo $$v = \text{3‘141593} \times 40^2 \times 60 = \overset{\text{cent. cúb.}}{\text{301 592‘928}}$$

$$v = \overset{\text{litros}}{\text{301‘592 928}}$$

III.—*Calcular el volúmen de un cono cuya altura es de* $\overset{\text{m}}{\text{2‘5}}$ *y el radio de su base de* $\overset{\text{m}}{\text{0‘30}}$.

La fórmula que expresa el volúmen de un cono es [703]:

$$v = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

sustituyendo $$v = \tfrac{1}{3}\, \text{3‘141 593} \times \overset{\text{m}}{\text{0‘30}}^2 \times \text{2‘5}$$

de donde $$v = \overset{\text{m. cúb.}}{\text{0‘235 619 475}} = \overset{\text{litros.}}{\text{235‘619 475}}$$

IV.—*Calcular el volúmen de un trozo de cono, cuya altura es de* $\overset{\text{m}}{\text{1‘2}}$, *y los radios de sus bases son* $\overset{\text{m}}{\text{0‘7}}$ *y* $\overset{\text{m}}{\text{0‘9}}$.

La fórmula respectiva es [709]:

$$v = \tfrac{1}{3}\pi a (R^2 + r^2 + R r)$$

sustituyendo $$v = \tfrac{1}{3}\, \text{3‘141593} \times \text{1‘2}\, (\text{0‘9}^2 + \text{0‘7}^2 + \text{0‘9} \times \text{0‘7})$$

ó $$v = \overset{\text{m. cúb.}}{\text{2‘425309796}}$$

V.—*Calcular el volúmen de una esfera cuyo diámetro es de* $\overset{\text{m}}{\text{12‘5}}$.

La fórmula que expresa el volúmen de la esfera es [711]:

$$v = \tfrac{1}{6}\,\pi\,D^3$$

sustituyendo $v = \tfrac{1}{6}\; 3'141593 \times 12'5^3$

y resulta $v = \overset{\text{m. cúb.}}{1026'537}$

35 VI.—*Determinar el radio de una esfera cuyo volúmen es de* $\overset{\text{litros.}}{2144'661}$.

De la fórmula que expresa el volúmen de la esfera [711]:

$$v = \tfrac{4}{3}\,\pi\,r^3$$

despejarémos á $r = \sqrt[3]{\dfrac{3\,v}{4\,\pi}}$

sustituyendo $r = \sqrt[3]{\dfrac{3 \times 2144'661}{4 \times 3'141593}}$

ejecutando la operacion resulta:

$r = 8$ que serán decímetros, por estar estimado el volúmen en litros.

VII.—*Determinar el volúmen de un sector esférico cuya altura es de* $\overset{\text{m}}{4'5}$*, y el radio de la esfera 12 metros.*

36 La fórmula que expresa el valor del volúmen del sector esférico es (712):

$$v = \tfrac{2}{3}\,\pi\,R^2\,a$$

sustituyendo $v = \tfrac{2}{3}\; 3'141593 \times 12^2 \times 4'5$

ó $v = \overset{\text{m. cúb.}}{1357'168}$

37 VIII.—*Determinar el volúmen de un segmento esférico cuya altura es la mitad del radio de la esfera, que tiene 16 decímetros.*

El volúmen del segmento esférico está expresado por la fórmula (713)

$$v = \tfrac{1}{3}\,\pi\,a^2\,(3\,R—a)$$

sustituyendo $v = \tfrac{1}{3}\; 3'141593 \times 8^2\,(3 \times 16—8)$

ó $v = \overset{\text{litros.}}{2680'826}$

38 IX.—*Se quiere determinar el volúmen de un cubo cuya diagonal es de 8 decímetros.*

Representando por d la diagonal del cubo, y por a una de sus aristas, tendrémos:

$$d^2 = 3\,a^2 \;(668)$$

y el volúmen del cubo $v = a^3$ (694)

despejando en la primera ecuacion á a, y sustituyendo su valor en la segunda, resulta:

$$v = \frac{d^3}{\sqrt{27}}$$

sustituyendo el valor numérico de la diagonal del cubo en nuestro problema, se tiene:

$$v = \frac{8^3}{\sqrt{27}} = \overset{\text{litros}}{98'5344}$$

X.—*Determinar gráficamente el radio de una esfera* C (fig. 344).

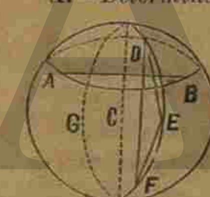

Figura 344.

Tomemos dos puntos cualesquiera sobre la esfera, A y B, haciendo centro en ellos, y con un compás de puntas curvas determinemos sucesivamente con tres radios diferentes tres puntos D, E y F equidistantes de A y B, por lo cual el plano que pasa por D, E y F será perpendicular al medio de la recta A B, y todos sus puntos estarán equidistantes de A y de B; luego pasará por el centro de la esfera, siendo un círculo máximo de ésta la seccion D E F G. Esto supuesto, si sobre un plano llevamos las distancias D E, E F y D F construirémos el triángulo D E F, y si circunscribimos al triángulo un círculo, determinando el radio de este círculo obtendrémos el de la esfera.

FIN.

ÍNDICE.

GEOMETRIA.

VOLÚMENES.