recta E' F' tendrá que estar sobre el mismo plano que el ángulo B' C' A', que es lo que se debia demostrar.

655.—*De esto resulta que, para que dos planos sean simétricos basta que lo sean tres de sus puntos respectivamente, y para que dos polígonos ó poliedros sean simétricos, es suficiente que lo sean sus respectivos vértices.*

656.—*Los triángulos, así como los ángulos simétricos, son iguales.*

En efecto, en la figura 302 se tiene: A B=A' B', B C=B' C', y A C=A' C', luego los triángulos A B C y A' B' C' serán iguales.

Ademas de la igualdad de los triángulos resulta que los ángulos simétricos son iguales: A C B=A' C' B', C A B=C' A' B', etc.

657.—*Dos poliedros simétricos tienen todas sus partes respectivamente iguales.*

Las caras correspondientes serán iguales, porque pueden descomponerse en triángulos simétricos y por lo mismo iguales. Si se consideran tres aristas de un poliedro y sus correspondientes del otro, por una parte por ser simétricas serán iguales. y por otra los ángulos simétricos que forman tambien lo serán. Siendo iguales los ángulos planos, lo serán los diedros de los triedros en que pueden descomponerse los poliedros. Esto es, serán respectivamente iguales sus aristas, sus caras, sus ángulos diedros y los triedros de que están formados.

SUPERFICIES DE LOS CUERPOS.

658.—*Se llama prisma á un cuerpo ó poliedro A c* (fig. 303) *terminado por superficies planas, siendo las bases A D y a d polígonos iguales y paralelos, y las caras laterales A b, B c.... paralelógramos, formado cada uno de ellos por los lados A B y a b.... de las bases respectivamente iguales.*

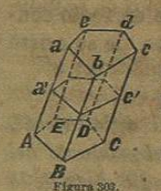

Figura 303.

El prisma puede considerarse engendrado por el movimiento de una recta A a que constantemente permanece paralela á sí misma y uno de sus extremos A recorre el polígono A B C D E.

Las rectas A a, B b.... se llaman aristas laterales, y las A B, B C....a b, b c.... aristas de las bases.

Altura del prisma es la distancia de sus bases. Un prisma es *recto* ú *oblícuo*, segun que sus aristas son perpendiculares ú oblícuas con relacion á sus bases. Se dice que es *triangular cuadrangular, pentagonal....* cuando su base es un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono....

Se llama *prisma regular* el que ademas de ser recto, tiene por base un polígono regular.

Todas las caras laterales de un prisma son paralelógramos, puesto que segun la definicion de prisma a b=A B y paralelas (450).

Las bases A D y a d, y las secciones como a' c' paralelas á éstas, son iguales, supuesto que por una parte son iguales los lados de los polígonos de estas secciones y por otra lo son sus ángulos por estar formados por lados paralelos (616).

Un prisma queda completamente determinado cuando se conoce la posicion y magnitud de su base y de una arista.

659.—*La área lateral de un prisma oblícuo es igual al producto de una de sus aristas A a por el perímetro de la seccion* a' *b' c' d'* (figura 304) *perpendicular á ésta.*

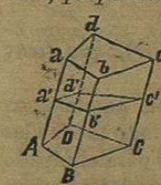

Figura 304.

El área lateral del prisma es igual á la suma de las áreas de las caras laterales que lo forman; pero como estas caras son paralelógramos, la superficie de cada una es igual al producto de su base por su altura. Las bases de los paralelógramos son las aristas del prisma, que todas son iguales á A a, y sus alturas son los lados de la seccion a' b' c' d' que por ser perpendicular á una de ellas lo será á todas las demas. Así es que haciendo la suma de las áreas de los paralelógramos, resulta que la área lateral del prisma es igual al producto de una de sus aristas por el perímetro de la seccion que le es perpendicular.

660.—*La área lateral de un prisma recto es igual al producto de su arista por el perímetro de su base.*

Porque en el caso de ser recto el prisma, la seccion perpendicular á su arista es la de su base. De otro modo, si en la figura 304 la porcion de prisma a' c la colocáramos en la parte inferior haciendo coincidir las

bases iguales a c con A C, el prisma oblícuo se convierte en recto conservando la misma área lateral, cuyo valor es el producto de su arista por el perímetro de su nueva base a' b' c' d'.

661.—*La área total de un prisma cualquiera es igual á la lateral, más la de sus bases. La total de uno regular es igual al producto del perímetro de su base por la suma de su arista con el radio recto de la base.*

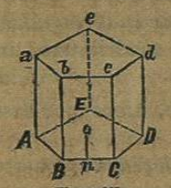

Figura 305.

La primera parte no necesita demostracion.

Si llamamos A la área total del prisma regular A d [fig. 305], p el perímetro A B C D E de la base, y r el radio recto o n de este perímetro, tendrémos:

$$A = A a \times p + 2.\ p \times \tfrac{1}{2} r = p\,(A a + r)$$

que es lo que se debia demostrar.

662.—*La área de un trozo de prisma A d* (fig. 306) *es igual á la suma de las áreas de sus caras.*

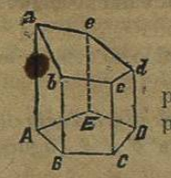

Figura 306.

Se llama trozo de prisma la parte de un prisma comprendido entre una de las bases A D y la seccion hecha por un plano a d que no es paralelo á la base.

663.—*Se llama paralelipípedo un prisma A c* (fig. 307), *que tiene por base un paralelógramo.*

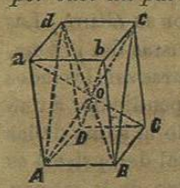

Figura 307.

En este cuerpo las caras opuestas son paralelógramos iguales y paralelos. En efecto, en todo prisma las bases A C y a c son iguales, pero por ser paralelipípedo el sólido serán paralelógramos. Las caras laterales son paralelógramos, y para persuadirse de que son iguales y paralelas por ej. las caras A b y D c, basta observar que los lados del ángulo A B b son respectivamente iguales, y paralelos á los del D C c (446). Lo mismo se verifica con las caras B c y A d por razon del paralelismo é igualdad de las rectas de los ángulos b B C y a A D.

Recíprocamente, *todo cuerpo compuesto de seis caras paralelas de dos en dos, es paralelipípedo.*

Por ser a c paralela á A C, será la recta a b paralela á A B. Por ser

B c paralela á A d, será B b paralela á A a; luego la cara A b será paralelógramo; pudiendo demostrarse igualmente que lo son todas las demás.

Un paralelipípedo está completamente determinado cuando se conoce uno de sus triedros A y la posicion y magnitud de las tres aristas que lo forman. Cualquiera de sus caras puede tomarse por base.

664.—*La seccion A B c d que determina el plano que pasa por dos aristas A B y d c opuestas de un paralelipípedo, es un paralelógramo.*

Siendo a b respectivamente igual y paralela á A B y á d c, A B y d c serán iguales y paralelas (602), y por lo mismo la figura A c será paralelógramo (450).

665.—*Las diagonales A c, B d,* a *C y b D* (fig. 307) *de un paralelipípedo, se cortan en partes mútuamente iguales y en el mismo punto o.*

Por ser la seccion A B c d un paralelógramo, las diagonales A c y B d se cortarán en partes mútuamente iguales en el punto o (451). Si consideramos ahora la seccion D A b c hecha por las aristas opuestas D A y b c, resulta que la diagonal A c de este nuevo paralelógramo, debe ser cortada por la D b en dos partes iguales, y por lo mismo tendrá que pasar por el mismo punto o, y como otro tanto puede demostrarse respecto á la diagonal a C, resulta que las cuatro diagonales se cortan en partes mútuamente iguales en el punto o.

666.—*Cuando la base A C* (fig. 308) *de un paralelipípedo es un rectángulo, y además las aristas laterales son perpendiculares á las bases, se dice que el paralelipípedo es rectangular.*

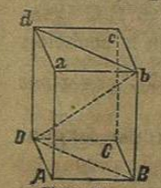

Figura 308.

En este caso todas las caras son rectángulos, y cada una de las aristas es perpendicular á las que pasan por sus extremos, así como á los planos sobre que cae.

Un paralelipípedo recto A c queda dividido en dos prismas triangulares iguales A B D a y C B D c por un plano d b B D que pasa por las diagonales d b y D B de sus bases.

En efecto si hiciéramos coincidir las aristas iguales A a y C c, siendo las tres caras que forman el triedro C respectivamente iguales á las caras que forman el triedro A (632—3°) estos triedros coincidirian. Por la misma razon el triedro c coincidiria con el a, y siendo comun á los dos prismas triangulares la cara d b B D, se infiere que serán iguales los prismas triangulares A B D a y C B D c.

667.—*El cuadrado de la diagonal D b* (fig, 308) *de un paralelipípedo rectangular, es igual á la suma de los cuadrados de las tres aristas que forman uno de sus triedros.*

Por ser rectángulo en B el triángulo b D B se tiene:

$$D\,b^2 = B\,b^2 + D\,B^2 \ldots. \quad (1)$$

siendo el triángulo D A B rectángulo en A, se tiene:

$$D\,B^2 = D\,A^2 + B\,A^2 \ldots. \quad (2)$$

sustituyendo en la ecuacion (1) y reemplazando por D A su igual B C resulta:

$$D\,b^2 = B\,b^2 + B\,C^2 + B\,A^2 \ldots. \quad (3)$$

que es lo que se debia demostrar.

Como las aristas de los triedros son respectivamente iguales, resulta que en el paralelipípedo rectangular las diagonales son iguales, además de verificarse en él las propiedades de los prismas y de los paralelipípedos en general.

668.—*Se llama cubo un paralelipípedo rectángular cuyas seis caras* (fig. 309) *son cuadrados.*

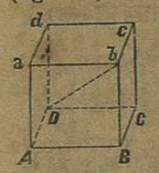

Figura 309.

En el cubo las caras son todas iguales entre sí, así como sus doce aristas. Las caras y las aristas son respectivamente perpendiculares. La gran simetría del cubo ha hecho que se le tome para unidad de volúmen en los cuerpos.

Siendo las aristas del cubo A B = B b = B C iguales entre sí, introduciendo estos valores en la ecuacion (3) del párrafo anterior resulta:

$$D\,b^2 = 3\,A\,B^2$$

esto es, *en el cubo el cuadrado de su diagonal es igual al triple del cuadrado de una de sus aristas.*

669.—*Se llama superficie de revolucion la que puede concebirse engendrada por una línea, recta ó curva, A C B D* (fig. 310) *que gira al rededor de una recta A B que le sirve de eje.*

Figura 310.

El carácter distintivo de esta clase de superficies, es, que sea cual fuere la linea generatriz A C D B, cualquier plano perpendicular al eje produce por su interseccion una circunferencia de círculo. En efecto, una recta cualquiera D o perpendicular al eje, describirá un plano perpendicular al eje, y como la distancia o D permanece fija, el punto D trazará una circunferencia de círculo.

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
U. A. N. L.

670.—*Se llama cilindro un prisma cuyas bases paralelas A B y a b* (fig. 311) *son círculos.*

Aunque las bases pueden ser otras curvas, en la geometría elemental no se considera sino el cilindro de base circular.

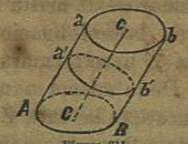

Figura 311.

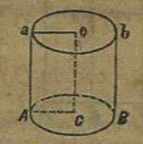

Figura 312.

La línea C c que une los centros de las bases, se llama *eje del cilindro.* Cuando el eje no es perpendicular á las bases del cilindro, se llama *oblícuo*, y cuando el eje es perpendicular á las bases (fig. 312) *el cilindro es recto.* La *altura* de un cilindro es la distancia de sus bases.

Lo mismo que un prisma, el cilindro puede concebirse originado por el movimiento de una recta A a paralelamente al eje, y de la que uno de sus extremos recorre una circunferencia de círculo. De esto resulta que cualquiera seccion paralela á las bases produce un círculo igual á éstas.

El cilindro recto (fig. 312) puede concebirse engendrado por la rotacion de un rectángulo A c al rededor de uno de sus lados C c, que viene á ser el eje del cilindro.

671.—Como el cilindro es un prisma de base circular, y el círculo puede considerarse como un polígono regular de una infinidad de lados, resulta que *la área lateral del cilindro oblícuo es igual al producto de su generatriz A a* (fig. 311) *por la longitud de la curva a' b' de la seccion que le es perpendicular.* (659)

672.—Por la misma consideracion *la área lateral del cilindro recto es igual al producto de su altura por la circunferencia del círculo de su base.*

Si llamamos s la área lateral del cilindro, r el rádio de su base, h su altura y π la razon de la circunferencia al diámetro igual á 3'141593, la expresion del área lateral del cilindro recto será:

$$S = 2\,\pi\,r\,h$$

673.—*La área total de un cilindro es igual á la lateral mas la de sus dos bases.*

La área total del cilindro recto tendrá en consecuencia por expresion:

ó $$S = 2\pi r h + 2\pi r^2$$
$$S = 2\pi r (h + r)$$

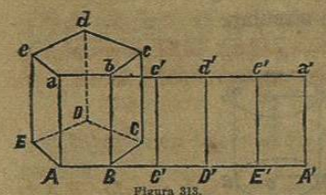

Figura 313.

674.—Si en el prisma A d [figura 313] concebimos que la cara B c gira al rededor de la arista B b hasta colocarse en la prolongacion del plano de la cara A b se formará el rectángulo A c'. De la misma manera, si nos imaginamos que la cara E a gira al rededor de E e hasta ponerse en el plano de e D, en seguida que las dos caras se colocaran en el plano de c D, y las tres caras girando sobre C c se pusiesen en el plano de C b, y girando por último todo el sistema al rededor de B b se colocara en la prolongacion del plano de la primera cara A b, resultaria la superficie lateral del prisma tendida en plano é igual al rectángulo A a'. Las partes que componen este rectángulo son respectivamente iguales á las que forman la área lateral del prisma. La área de este rectángulo es equivalente á la lateral del prisma, pues una y otra tienen por valor el producto de la arista A a por A A' que es el perímetro de la base.

La figura A a a' A' se llama el *desarrollo* de la superficie lateral del prisma A d.

Igualmente el *desarrollo* de un cilindro recto es un rectángulo cuyas bases son las circunferencias del cilindro, y su altura la de este cuerpo.

La superficie lateral de un cilindro oblícuo A b [fig. 314] tambien puede desarrollarse en plano. Para esto tirarémos la recta a' a' igual a

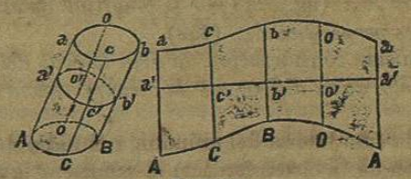

Figura 314.

la curva que daria la seccion hecha perpendicularmente á la generatriz A a, que es a' c' b' o' a'; sobre esta recta se llevarán las partes a' c', c' b'.... respectivamente iguales á las partes de la curva rectificadas a' c', c' b'....; por los puntos de division a', c'.... se levantarán perpendiculares y sobre ellas se llevarán las partes a' a=a' a de la generatriz, a' A =a' A, c 'c = c' c, c' C = c, C.... y se tendrá la área A a'' ter-

minada por dos curvas paralelas, que será el desarrollo de la superficie lateral del cilindro oblícuo.

675.—*La área total de una pirámide S A D* [fig. 315] *es igual á la suma de las áreas de los triángulos que forman sus caras y la del polígono A B C D.... de su base.*

Figura 315.

676.—*La área lateral de una pirámide regular S A D* (fig. 315) *tiene por valor la mitad del producto del perímetro de su base por el apotema S n.*

Se llama *apotema, la altura S n de uno de los triángulos de las caras de la pirámide.* Cuando ésta es regular, su base es un polígono regular y su altura S o es una perpendicular que cae en el centro de la base. De esto resulta que las caras de una pirámide regular son triángulos iguales, pues por una parte sus bases A B, B C.... son lados de polígono regular, y por otra los lados S A, S B.... son oblícuas que se separan igualmente del pié de la perpendicular. Las alturas de estos triángulos son todas iguales á S n.

Así, pues, la área lateral de la pirámide será igual á

$$\tfrac{1}{2} S n (A B + B C + \ldots.)$$

y si llamamos s esta área, el apotema S n=A, y p el perímetro A B C D de la base, se tendrá:

área lateral de la pirámide $= s = \frac{1}{2} p A$.

Para obtener la área total de la pirámide, á la lateral debemos agregarle la del polígono de la base que tiene por valor $\frac{1}{2}$ p. r, llamando r el radio recto o p. Así, pues,

área total de la pirámide $= S = \frac{1}{2} p A + \frac{1}{2} p r$
ó ,, ,, ,, $= S = \frac{1}{2} p (A + r)$

677.—Se llama *trozo de pirámide la parte de una pirámide comprendida entre la base A D y la seccion hecha por un plano a d* (fig. 316) *que le es paralelo.*

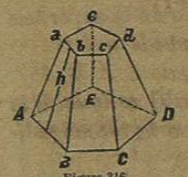

Figura 316.

La área lateral de un trozo de pirámide recta tiene por valor el producto de la altura h de una de sus caras por la semisuma de los perímetros de sus bases.

Las caras del trozo son trapecios iguales, cuyas alturas todas son iguales á h, y como la área de cada trapecio (565) es igual al producto de su altura por la semisuma de las bases A B + a b, la de todo el trozo tendrá por medida el producto de la altura de una de las caras por la semisuma de los perímetros A B C.... + a b c de sus bases.

678.—Se llama *cono una pirámide S A B* (fig. 317) *cuya base es un círculo.*

Aunque la base puede ser una curva cerrada cualquiera, en la geometría elemental sólo se considera el cono de base circular.

La recta S o que une el vértice con el centro de la base, se llama *eje* del cono, que *es recto* cuando el eje es perpendicular á la base, y *oblícuo* en el caso contrario. *Altura* del cono es la perpendicular bajada del vértice sobre la base.

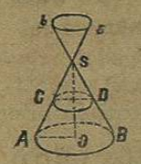

Figura 317.

El cono puede concebirse originado por el movimiento de una recta S A sujeta á pasar constantemente por un punto S y recorrer con el otro extremo la circunferencia A B, la cual traza otra capa cónica superior S a b que rara vez se considera. Cuando el cono es recto, como en la figura 317, puede considerarse engendrado por la revolucion de un triángulo rectángulo S o A girando al rededor de uno de sus catetos S o. Por esta razon (669) cualquiera seccion C D hecha paralelamente á la base en el cono, produce un círculo.

679.—*La área lateral del cono recto tiene por valor la mitad del producto de su generatriz S A por la circunferencia de la base.*

Esto resulta de que el cono es una pirámide cuya base es un polígono regular de una infinidad de lados (676). Si llamamos A el lado S A del cono, y r el radio A o de su base, tendrémos:

$$\text{área lateral del cono} = s = \pi\, r\, A.$$

Para obtener la área total debemos agregar la del círculo de la base, por lo que

$$\text{área total del cono} = S = \pi\, r\, A + \pi\, r^2 = \pi\, r\, (A + r)$$

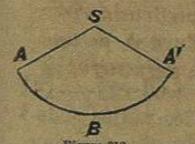

Figura 318.

La área lateral de un cono recto puede desarrollarse en plano, y es un sector de círculo S A B A' (fig. 318) *cuyo rádio es la generatriz S A de la figura 317, y el arco A B A' es igual á la circunferencia de la base.*

En efecto, basta concebir cortada la superficie lateral del cono segun una de sus generatrices S A, para comprender que al extender esta superficie se formaria un sector, supuesto que por una parte todas las generatrices vienen á concurrir al punto S, y por otra todos los puntos de la circunferencia de la base conservan una distancia igual á S A al vértice S. Además, la área del sector (570) y la lateral del cono tienen por valor la misma expresion, pues ambos son iguales á $\frac{1}{2}$ S A × A B A'.

Para determinar el número de grados del ángulo A S A', observarémos que la longitud del arco A B A' que le sirve de medida, es la de la circunferencia del círculo O (fig. 317) base del cono. Por consiguiente conservando las anotaciones de A para el lado S A del cono, y *r* para el radio A O de la base; y representando por *x* el número de grados del ángulo A S A', tendrémos:

longitud del arco A B A' = $2\,\pi\,r$

Por otra parte, conocida esta longitud, se determinará el número de grados del arco A B A' por la proporcion:

circf. A S : arco A B A' :: 360° : x

$$2\,\pi\,A : 2\,\pi\,r :: 360^\circ : x^\circ = \frac{r.\ 360^\circ}{A}$$

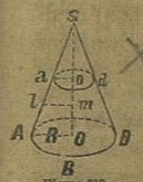

Figura 319.

680.—*La área lateral del trozo de cono recto A D b a* (fig. 319) *tiene por valor el producto de su generatriz A a por la semisuma de las circunferencias de sus bases A D y a b.*

Aun cuando esto es una consecuencia de lo que dejamos probado en el número 677, lo demostrarémos directamente.

Llamemos R el radio de la base inferior cuya circunferencia es $2\,\pi\,R$, r el radio de la base superior cuya circunferencia es $2\,\pi\,r$, y l el lado A a del tronco. La área lateral que buscamos es igual á la del cono S A D ménos la del cono S a b. Representándola por T tendrémos [679]

$$T=\pi R.\ SA-\pi r.\ Sa \ldots [1]$$

$$SA=l+Sa \text{ y } SA-Sa=l$$

sustituyendo $T=\pi R\ (l+Sa)-\pi r\ Sa=\pi R\ l+\pi\ Sa\ (R-r) \ldots [2]$

Vamos á determinar el valor de S a en funcion de los radios y de l para sustituirlo en esta ecuacion. Comparando los triángulos semejantes S A O y S a o, se tiene:

$$R : r :: SA : Sa$$

Dividiendo $\quad R-r : r :: SA-Sa : Sa=\dfrac{r\,l}{R-r}$

sustituyendo en la ecuacion [2]

$$T=\pi R\,l+\frac{\pi r\,l}{R-r}[R-r]$$

reduciendo y sacando l como factor comun, se tiene por último:

$$T=l\,[\pi R+\pi r] \ldots [3]$$

que es lo que se debia demostrar.

Considerando el trapecio a o O A [459], en el que l es el medio de A a, se tiene: $\quad l\,m=\frac{1}{2}\,[R+r]$

multiplicando por $2\pi \quad 2\pi.\ l\,m=\frac{1}{2}\,[2\pi R+2\pi r]$

$$2\pi.\ l\,m=\pi R+\pi r$$

sustituyendo en la ecuacion [3] resulta:

$$T=l\times 2\pi.\ l\,m$$

Esto es, *la área lateral del trozo de cono recto tiene por valor el producto de su lado por la circunferencia del círculo tirado á distancias iguales de sus bases.*

681.—*Se llama esfera un cuerpo A O B N* [fig. 320] *limitado por una superficie curva cuyos puntos todos están á igual distancia de uno interior C llamado centro.*

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
U. A. N. L.

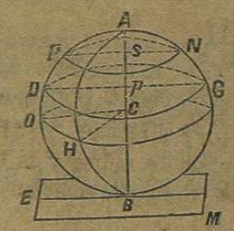

Figura 320.

La esfera puede considerarse engendrada por la revolucion de un semicírculo A D B al rededor de su diámetro A B. Cuando se corta la esfera por un plano que pasa por su centro C, se produce un círculo A O B N que se llama *círculo máximo. Todos los círculos máximos de una esfera son iguales,* porque todos tienen por rádio el de la esfera. De esto resulta que la esfera puede considerarse engendrada por la revolucion de cualquiera de sus círculos máximos.

Un plano, sea cual fuere su direccion, corta la esfera segun un círculo. Si este plano fuera por ejemplo F N, levantando el diámetro A B perpendicular, podria suponerse la esfera engendrada por el semicírculo A F O B girando al rededor de este eje A B, y por consiguiente (669) la seccion hecha por un plano perpendicular al eje, tiene que ser un círculo.

Todo círculo, cuyo centro no coincide con el de la esfera, trazado en su superficie, se llama círculo menor. F N y D G son círculos menores.

Se llama zona la parte de la superficie de la esfera F D G N comprendida entre dos circunferencias, cuyos planos son paralelos.

Se llama casquete esférico, ó zona de una base, la parte de la superficie de la esfera F N A limitada por una circunferencia F N.

682.—Se llama *plano tangente á la esfera el que, como M* (fig. 320), *no tiene mas que un punto B de contacto con ella.*

Como toda recta diversa de C B tirada del centro de la esfera al plano, tiene que ser mayor que su rádio, resulta que el rádio C B es la menor distancia del centro al plano, y por consiguiente le es perpendicular. Recíprocamente, todo plano M perpendicular al extremo de un radio C B será tangente á la esfera, porque debiendo ser cualquiera oblícua mayor que la perpendicular C B, el plano M no podrá tener mas que el punto B de contacto con la esfera.

Si se hace girar un círculo y su tangente B E al rededor del diámetro A B perpendicular á la tangente, se engendrará la esfera y un plano tangente al punto B, porque este plano M es perpendicular al radio C B.

683.—*Cuando un polígono regular A B C....* (fig. 321) *gira al rededor del diámetro A O del círculo inscrito, engendra una superficie que tiene por medida el producto de la circunferencia del círculo inscrito por la proyeccion de la parte del perímetro que se considera sobre el eje A O de revolucion.*

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

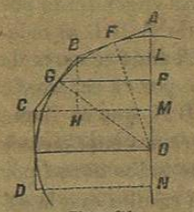

Figura 321.

Para demostrar este principio en toda su generalidad, consideraremos tres casos: 1°, la superficie de un cilindro engendrada por una porcion C D del polígono paralela al eje A O; 2°, la superficie de un trozo de cono engendrada por el lado B C, y 3°, la superficie de un cono engendrada por el lado A B.

1° La superficie del cilindro originado por la rotacion de C D tiene por valor (672): circf. D N × C D y sustituyendo sus iguales: circunferencia G O × M N, que es lo que expresa el principio que vamos demostrando.

2° La superficie de trozo de cono engendrado por la rotacion de B C al rededor del eje tiene por medida (680):

$$C\,B \times \text{circf. } G\,P \ldots. \quad (1)$$

Comparando los triángulos C B H y G O P que son semejantes por tener sus lados perpendiculares, se tiene:

$$C\,B : B\,H :: G\,O : G\,P$$
$$G\,O : G\,P :: \text{circf. } G\,O : \text{circf. } G\,P$$
luego $$C\,B : L\,M :: \text{circf. } G\,O : \text{circf. } G\,P$$

formando el producto de extremos y medios

$$C\,B \times \text{circf. } G\,P = \text{circf. } G\,O \times L\,M$$

y como el primer miembro de esta ecuacion es la área lateral del trozo de cono, se ve que esta segun lo expresado en el segundo miembro tiene por valor igualmente lo que indica el principio que venimos demostrando:

3° La superficie del cono engendrado por la rotacion de A B al rededor del eje tiene por valor (679):

$$\tfrac{1}{2} \text{ circf. } B\,L \times A\,B \ldots. \quad (2)$$

Comparando los triángulos A B L y A O F que son semejantes por ser rectángulos y tener el ángulo A B L=A O F cuyos lados son perpendiculares, se tiene:

$$A\,L : A\,F :: B\,L : F\,O$$
$$B\,L : F\,O :: \text{circf. } B\,L : \text{circf. } F\,O$$
luego: $$A\,L : A\,F :: \text{circf. } B\,L : \text{circf. } F\,O$$

formando el producto de los medios y de los extremos

$$\text{circf. } B\,L \times A\,F = \text{circf. } F\,O \times A\,L$$
sustituyendo $$\text{circf. } B\,L \times \tfrac{1}{2}\,A\,B = \text{circf. } G\,O \times A\,L$$

Expresando el primer miembro la área del cono, se ve que tiene por valor igualmente lo que indica el segundo miembro de la ecuacion, que es la expresion algebráica del teorema que venimos demostrando.

En consecuencia, cualquiera que sea la posicion del lado del polígono generador de la superficie, el valor de ésta se determina por la regla que hemos demostrado.

684.—Cuando el polígono regular tiene un número infinito de lados la superficie que engendra es la de la esfera, y por medio del principio del párrafo anterior, podremos determinar la área de este cuerpo y la de sus diversas partes.

Si llamamos R el radio de la esfera, y la altura s p de la zona F D G N (fig. 320) la representamos por h, tendremos:

área de la zona esférica $= s = 2\,\pi\,R.\,h$

En el casquete esférico si representamos por a su altura s A, tendremos:

área del casquete esférico $= s = 2\,\pi\,R.\,a$

Como la área de la esfera es la suma de las áreas de las diversas zonas y casquetes que la forman, y la suma de las proyecciones de todas las partes del semicírculo generador sobre el eje es el diámetro, resulta que

la área de la esfera $= S = 2\,\pi\,R. = 4\,\pi\,R^2$

luego la superficie de la esfera es cuádrupla de la de uno de sus círculos máximos.

Si por R ponemos su valor $\frac{D}{2}$, llamando D al diámetro, tendremos por expresion del área de la esfera:

$$S = \pi\,D^2$$

Se llama *huso á la porcion de la superficie de la esfera* A O B H A (fig. 320) *comprendida entre dos semicírculos máximos que terminan en el mismo diámetro* A B. Si desde el centro C de la esfera se tiran los radios C O y C H perpendiculares al diámetro comun A B, *el ángulo* O C H, que mide el ángulo diedro de los dos semicírculos que limitan el huso, *se llama ángulo del huso.*

Si el arco O H, medida del ángulo del huso, se divide en dos partes iguales y por el punto de division se tira un semicírculo que pase por A B, resultará un huso que será la mitad del primero por ser sobreponibles las porciones de la esfera de que están formados. Si el arco O H se divide en tres, cuatro ó más partes iguales, el huso quedará dividido igualmente en tres, cuatro ó más partes iguales entre sí. En consecuencia, *las superficies de los husos son proporcionales á sus ángulos, ó á los arcos que los miden.*

Si comparamos la superficie del huso con la de la esfera, tendremos: sup. huso A O B H : sup. esfera :: arco O H : circf. círc. máximo luego, *la superficie de un huso es igual á la de la esfera multiplicada por la relacion que existe entre el número de grados del ángulo del huso y* 360°

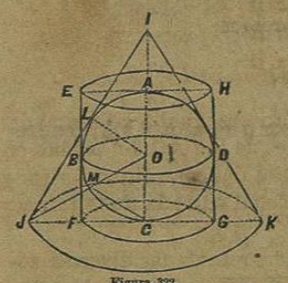

Figura 322.

685.—Si al círculo A B C D [fig. 322] circunscribimos un cuadrado E F G H y un triángulo equilátero I J K y suponemos que este sistema gira al rededor del eje I A C, resultará una esfera inscrita á un cilindro y á un cono, y vamos á determinar la relacion que existe entre la superficie de la esfera y las del cilindro y cono circunscritos á ella.

Llamando R el radio B O de la esfera, hemos visto ya que:

1° el área de la esfera $= S = 4 \pi R^2$.

Respecto al cilindro [672] tenemos:

2° área lateral del cilindro $= S' = 2 \pi R \times 2 R = 4 \pi R^2$

3° área total del cilindro $= S'' = 4 \pi R^2 + 2 \pi R^2 = 6 \pi R^2$. [673]

Para determinar la área del cono vamos á comenzar por establecer el valor del rádio de su base J C, que por razon del triángulo equilátero es la mitad de su lado I J, en funcion del rádio de la esfera. Siendo equilátero el triángulo que engendra el cono, el ángulo I J K vale 60° [465], y como los triángulos O L J y O C J son iguales, el ángulo

O J C vale 30°, y el J O C, que es su complemento valdrá 60°. Tirando la cuerda C M, ésta será igual al radio [497], y nos resulta el triángulo equilátero O M C en el que el ángulo O C M = 60°. Si del ángulo recto O C J se resta el O C M, queda el ángulo M C J = 30°. De consiguiente el triángulo M C J será isósceles, por tener iguales los ángulos M J C y M C J, y por tanto M J = M C = R. Por último se tendrá, J O = 2 R.

Considerando el triángulo rectángulo J O C, se tiene:

$$J C^2 = J O^2 - O C^2$$

y sustituyendo $\quad J C^2 = 4 R^2 - R^2 = 3 R^2$

por otra parte $\quad 2 J C = J I$

Ahora bien: la área total del cono [679] es

$$S''' = \pi J C [2 J C + J C] = 3 \pi J C^2$$

y sustituyendo $\quad S''' = 9 \pi R^2$

En resúmen: el área de la esfera $= 4 \pi R^2$
la lateral del cilindro $= 4 \pi R^2$
la total del cilindro $= 6 \pi R^2$
y la total del cono $= 9 \pi R^2$

De lo que resulta: 1° que la área de la esferra es igual á la lateral de cilindro circunscrito; 2° que es los dos tercios de la total del mismo cilindro; 3° que es los cuatro novenos de la total del cono circunscrito; y 4° que la área del cilindro es media proporcienal entre la de la esfera y la del cono, supuesto que

$$6 \pi R^2 = \sqrt{4 \pi R^2 \times 9 \pi R^2}$$

686.—*Las áreas de dos poliedros semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus líneas homólogas.*

Llamemos s, s', s''.... las áreas de las caras de un poliedro, y S, S', S''.... las de su semejante: l, l', l''.... las líneas del primer poliedro, y L, L', L''.... las líneas homólogas en el segundo. Se tiene [579]:

$$s : S :: l^2 : L^2 \qquad s' : S' :: l'^2 : L'^2 \text{ etc.}$$

Por ser las caras semejantes, tendremos:

$$l : L :: l' : L' :: l'' : L''....$$

elevando al cuadrado $l^2 : L^2 :: l'^2 : L'^2 :: l''^2 : L''^2....$

luego $s : S :: s' : S' :: s'' : S''... :: l^2 : L^2$

y como la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á un consecuente [318—8°] resulta:

$$s + s' + s''... : S + S' + S'' + ... :: l^2 : L^2$$

que es lo que se queria demostrar.

Las áreas de dos cilindros engendrados por rectángulos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus alturas y á los de sus radios.

Si representamos por s y S las áreas laterales de los cilindros, por r y R los radios de sus bases, y por h y H sus respectivos alturas. Como los rectángulos generadores tienen por lados los radios y las alturas, y por el supuesto son semejantes, tendremos:

$$h : H :: r : R$$

por otra parte $s : S :: 2\pi r h : 2\pi R H....$ [1]

multiplicando ordenanamente, y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$s : S :: r^2 : R^2$$

y si la proporcion [1] se multiplica por la siguiente:

$$r : R :: h : H$$

resulta: $s : S :: h^2 : H^2$

que es lo que se debia demostrar.

Las áreas laterales de los conos engendrados por triángulos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus generatrices y á los de sus radios.

Representando por s y S las áreas laterales de los conos, por a y A sus respectivas generatrices, y por r y R los radios de sus bases: siendo los triángulos generadores semejantes, cuyas hipotenusas y catetos homólogos son a, A y r, R, se tiene:

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
U. A. N. L.

$$a : A :: r : R$$

por otra parte [679] $s : S :: \pi r a : \pi R A$

multiplicando ordenadamente estas proporciones y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$s : S :: r^2 : R^2$$

elevando al cuadrado los términos de la 1ª proporcion:

$$a^2 : A^2 :: r^2 : R^2$$

se tiene igualmente $s : S :: a^2 : A^2$

Las áreas de las esferas son proporcionales á los cuadrados de sus radios y á los de sus diámetros.

Siendo la área de la esfera $= 4\pi R^2 = \pi D^2$, [684] si representamos por s y S las áreas de las esferas, por r y R sus radios, y por d y D sus respectivos diámetros, se tiene:

$$s : S :: 4\pi r^2 : 4\pi R^2 :: \pi d^2 : \pi D^2$$

y suprimiendo los factores comunes resulta:

$$s : S :: r^2 : R^2 :: d^2 : D^2$$

14 687.—Problemas.—I.—*Determinar la superficie lateral de un prisma recto de base pentagonal, cuyo lado es de 8 centímetros y su arista tiene tres metros y medio.*

Para que la superficie esté valuada en una unidad dada, comenzarémos por expresar las dimensiones del prisma en la misma unidad lineal, en metros ó en centímetros. Adoptando la primera, tendrémos que el perímetro de la base será $= \overset{m}{0'08} \times 5 = 0'40$.

La arista del prisma $= \overset{m}{3'50}$, y por último, la área lateral será

$$s = \overset{m}{0'40} \times 3'50 = \overset{m.\,cd.}{1'40}$$

un metro cuadrado y 40 centésimos de metro cuadrado.

Si hubiésemos adoptado por unidad lineal el centímetro, la superficie la habriamos obtenido en centímetros cuadrados, é igual 1400 centímetros cuadrados.

15 II.—*Se quiere determinar el lado de un cubo cuya diagonal mide* $\overset{m}{5}$,1961.

Si llamamos l el lado del cubo y d su diagonal, hemos visto [668] que

$$d^2 = 3\,l^2$$

despejando á l y sustituyendo por d su valor, se tiene:

$$l = \sqrt{\frac{5'1961^2}{3}} = 3 \text{ metros próximamente.}$$

16 III.—*Determinar la área total de un cilindro recto, cuya altura es de* $\overset{m}{1}$'8 *y el radio de su base* $\overset{m}{0}$'6.

La fórmula correspondiente [673] es:

$$s = 2\,\pi\,r\,[h + r]$$

sustituyendo los valores del problema

$$s = 2 \times 3'141593 \times \overset{m}{0}'6 \times \overset{m}{1}'8 = \overset{m.\,cd.}{6'78584}$$

17 IV.—*Determinar la superficie lateral de una pirámide exagonal recta y regular, en la que el lado de la base es de 3 pulgadas y su apotema tiene 11 pulgadas.*

El perímetro de la base será $3 \times 6 = 18$ pulgadas, y la área lateral [676] es:

$$s = \tfrac{1}{2}\,p.\,A = \tfrac{1}{2}\,18 \times 11 = 99 \text{ pulg. cuadradas.}$$

18 V.—*Determinar la superficie lateral de un trozo de pirámide regular cuadrangular, en la que los lados de las bases son* $2\frac{1}{2}$ *piés y 2 piés, y la altura de uno de los trapecios que le sirve de cara 1 pié y 9 pulgadas.*

El perímetro de la base inferior será $2\frac{1}{2} \times 4 = 10$ piés.

El perímetro de la base superior $2 \times 4 = 8$ piés.

La área lateral del trozo será $= \frac{1}{2}\,[10 + 8]\,1'75 = 15'75$ piés cuadrados.

VI.—*Determinar la superficie total de un cono recto cuya generatriz es de* $\overset{m}{11}$'25, *y el rádio de su base* $\overset{m}{4}$'72.

19 La fórmula correspondiente [679] es:

$$S = \pi\,r\,(A + r)$$

sustituyendo $\quad S = 3'141593 \times 4'72 \times 15'97 = \overset{m\,cd.}{236{,}808}$

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
U. A. N. L.

VII.—*Calcular la superficie de una zona glacial de la tierra, que es un casquete esférico cuya altura aproximada es de 526'6 kilómetros y el rádio de la esfera 6 367 kilómetros.*

20 La fórmula correspondiente (684) es

$$s = 2\,\pi\,R\,a$$

sustituyendo: $\quad s = 2 \times 3'141593 \times \overset{kilóms.}{6367} \times \overset{kilóms.}{526'6}$

$= 21\ 066\ 657$ kilómetros cuadrados.

VIII.—*Determinar la superficie de una de las zonas templadas de la tierra, siendo su altura 3 305 kilómetros, y el radio de la esfera 6 367 kilómetros.*

21 La fórmula respectiva (684) es:

$$s = 2\,\pi\,R\,h$$

sustituyendo $\quad s = 2 \times 3'141593 \times 6367 \times 3305$

próximamente $\quad = 132\ 216\ 674$ kilómetros cuadrados ó miriaras.

22 IX.—*Dado el radio de una esfera, que es de 6 367 kilómetros, determinar su superficie.*

Para resolver este problema haremos uso de la fórmula:

$$S = 4\,\pi\,R^2 \quad (684)$$

sustituyendo $\quad S = 4 \times 3'141593 \times 6\,367^2$

próximamente $\quad = 509\ 424\ 070$ kilómetros cuadrados.

23 X.—*Se quiere determinar el diámetro de una esfera cuya superficie es de 282 743'37 metros cuadrados.*

Si de la fórmula (684)

$$s = \pi\,D^2$$

despejamos á D y sustituimos: $D = \sqrt{\dfrac{282743'37}{3'141593}} = 300$ metros.