

## LIVRE V.

## DES PLANS TANGENTS DONT LE POINT DE CONTACT N'EST PAS DONNÉ.

CHAPITRE I<sup>er</sup>. — Des plans tangents menés par un point extérieur à la surface.

	N <sup>os</sup> .
Pour toute surface, il existe en général un cône circonscrit dont le sommet est au point donné, et dont la ligne de contact fournira toutes les solutions du problème actuel. . . . .	318
Pour une surface développable, le problème devient indéterminé. . . . .	350
Pour une surface du second degré, la courbe de contact d'un cône circonscrit est toujours plane, et son plan se trouve parallèle au plan diamétral conjugué avec le diamètre qui passe par le sommet du cône. . . . .	353
Dans toute surface du second degré, les sections parallèles sont des courbes semblables, dont les centres sont situés sur le diamètre qui est conjugué avec celui de ses plans qui passe par le centre de la surface. . . . .	354
Trouver la courbe de contact d'une surface de révolution avec un cône circonscrit dont le sommet est donné. . . . .	356
Méthode du parallèle. Méthode du méridien. . . . .	357
Construction des points remarquables. . . . .	362
Troisième méthode, par une enveloppée sphérique. . . . .	365
Par un point donné, mener à une surface de révolution un plan tangent qui la touche sur un parallèle, ou sur un méridien assigné. . . . .	367
Trouver la courbe de contact d'une surface <i>quelconque</i> du second degré, avec un cône circonscrit dont le sommet est assigné. . . . .	369

## CHAPITRE II. — Des plans tangents parallèles à une droite donnée.

Pour toute surface, il existe en général un cylindre circonscrit dont les arêtes sont parallèles à une droite donnée, et dont la ligne de contact fournira toutes les solutions du problème actuel. . . . .	377
Quand la surface est développable, le problème devient déterminé. . . . .	379
Pour une surface du second degré, la ligne de contact du cylindre circonscrit est toujours plane, et située dans le plan diamétral qui est conjugué avec le diamètre parallèle au cylindre. . . . .	381
Trouver la courbe de contact d'une surface de révolution avec un cylindre circonscrit et parallèle à une droite donnée. . . . .	383
Méthode du parallèle. Méthode du méridien. . . . .	384
Construction des points remarquables. . . . .	388
Troisième méthode, par une enveloppée sphérique. . . . .	391
Mener à une surface de révolution un plan tangent parallèle à une droite donnée, et qui la touche sur un parallèle, ou sur un méridien assigné. . . . .	392
Trouver la courbe de contact d'une surface <i>quelconque</i> du second degré, avec un cylindre circonscrit et parallèle à une droite donnée. . . . .	394

## CHAPITRE III. — Des plans tangents menés par une droite donnée.

La méthode générale consiste à combiner ensemble deux cônes circonscrits à la surface, ou bien un cône avec un cylindre. . . . .	395
--	-----

	N <sup>os</sup> .
Conséquences particulières aux surfaces et aux courbes du second degré. . . . .	398
Par une droite donnée, mener un plan tangent à une sphère. . . . .	401
Deuxième et troisième méthodes. . . . .	403
Quatrième méthode, utile quand les traces de la droite sont fort éloignées. . . . .	405
Par une droite donnée, mener un plan tangent à une surface de révolution. . . . .	406
Cas particuliers. . . . .	407
Deux autres méthodes, particulières aux surfaces du second degré. . . . .	408
Par une droite donnée, mener un plan tangent à un hyperboloïde gauche de révolution. Autre solution du même problème. . . . .	410
Par une droite donnée, mener un plan tangent à une surface <i>quelconque</i> du second degré. Autre méthode qui n'emploie que la ligne droite et le cercle. . . . .	417

## CHAPITRE IV. — Des plans tangents parallèles à un plan donné.

Méthode générale pour résoudre les problèmes de ce genre. . . . .	421
Ils reviennent à mener une normale parallèle à une droite donnée. . . . .	422
Cas particuliers où la solution se simplifie. . . . .	424

## CHAPITRE V. — Des plans tangents à plusieurs surfaces.

Méthode générale pour trouver un plan qui touche à la fois deux surfaces données. . . . .	425
Surface développable circonscrite aux deux surfaces proposées. . . . .	426
Par un point donné, mener un plan tangent à deux surfaces. . . . .	430
Du plan qui toucherait trois surfaces, ou un plus grand nombre. . . . .	431
Trouver un plan qui touche à la fois une sphère et un cône droit. . . . .	434
Par un point donné, mener un plan tangent à deux sphères. . . . .	437
Trouver un plan qui soit tangent à trois sphères. . . . .	441
Conséquence relative aux tangentes communes à trois cercles. . . . .	445

## LIVRE VI.

## QUESTIONS DIVERSES.

CHAPITRE I<sup>er</sup>. — De l'hélice, et de l'hélicoïde développable.

Définition de l'hélice. . . . .	446
Recherche de sa tangente; longueur de la sous-tangente. . . . .	448
La longueur d'un arc d'hélice égale celle de sa tangente. . . . .	449
L'inclinaison des diverses tangentes sur les génératrices est constante. . . . .	450
Construire les projections d'une hélice tracée sur un cylindre droit à base circulaire. Équations de ces projections. . . . .	451
Construction de la tangente à l'hélice; le lieu des pieds de toutes les tangentes est la <i>développement</i> de la base du cylindre. . . . .	452
Mener à une hélice une tangente qui soit parallèle à un plan donné. . . . .	454
Hélicoïde développable; de sa génération, et de sa représentation graphique. . . . .	456

	N <sup>os</sup>
Moyen de construire cette surface en relief.....	458
Les sections horizontales sont des spirales développantes du cercle.....	459
Les sections faites par des cylindres concentriques avec l'hélice primitive sont d'autres hélices de même pas que la première.....	460
Du plan tangent à l'hélicoïde.....	462
Développement de l'hélicoïde; dans cette transformation, les hélices deviennent des cercles concentriques. Rayon de courbure d'une hélice.....	465

CHAPITRE II. — *Des épicycloïdes.*

Dans la rotation d'une courbe sur une autre, la ligne décrite par le point générateur a pour normale la droite qui aboutit au contact de la courbe mobile.....	469
De l'épicycloïde plane. Elle peut être rallongée ou raccourcie.....	471
Épicycloïdes intérieures. Épicycloïde rectiligne.....	474
Cas de la cycloïde ordinaire, et de la développante de cercle.....	478
Épicycloïde sphérique. De sa tangente, par deux méthodes. Points singuliers.....	480
Développante sphérique. Construction de sa tangente.....	493

CHAPITRE III. — *Sur les sphères et les pyramides.*

Trouver l'intersection de trois sphères données.....	497
Conséquence relative à l'intersection de trois cercles.....	498
Construire une pyramide dont les six arêtes sont connues.....	499
120 — Circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire.....	500
Inscrire une sphère dans une pyramide triangulaire.....	501
Généralement, trouver une sphère tangente à quatre plans.....	503
Construire un point dont on connaît les distances à trois points donnés, ou à trois plans connus, ou à trois droites données.....	504
Détermination d'un point par la connaissance des trois angles que font avec la verticale, ou entre eux, les rayons visuels menés de ce point à trois points connus.....	506

## LIVRE VII.

## DES SURFACES GAUCHES.

CHAPITRE I<sup>er</sup>. — *Notions générales sur les surfaces gauches.*

Définition générale des surfaces gauches. Les plans tangents relatifs aux divers points d'une même génératrice sont distincts les uns des autres.....	510
Le plan qui est tangent à une surface gauche dans un point se trouve sécant dans tous les autres points communs.....	512
Le moyen général de faire décrire une surface gauche par une droite mobile, est d'assujettir celle-ci à glisser sur trois courbes fixes.....	513
On peut aussi faire glisser la droite mobile sur deux courbes, en la laissant parallèle à un plan directeur fixe, ce qui donne un <i>cylindroïde</i> .....	515

	N <sup>os</sup>
Autres conditions qui peuvent régler le mouvement de la génératrice.....	516
Définitions des <i>conoïdes</i> et des surfaces gauches du second degré.....	520

CHAPITRE II. — *De l'hyperboloïde à une nappe.*

Génération de cette surface; elle est gauche.....	521
Cette surface admet un second mode de génération, où les génératrices deviennent directrices.....	524
Lemme sur les segments formés par une droite qui coupe les trois côtés d'un triangle.....	525
Lemme sur les segments formés par deux droites qui se coupent, en s'appuyant sur les côtés opposés d'un quadrilatère gauche.....	526
Du plan tangent à l'hyperboloïde.....	530
L'hyperboloïde admet un centre; il est fourni par l'intersection de trois plans conduits chacun par deux génératrices parallèles.....	532
Identité de la surface gauche actuelle avec l'hyperboloïde à une nappe qui fait partie des cinq surfaces du second degré.....	535
On prouve synthétiquement que ce dernier hyperboloïde admet en effet deux systèmes de génératrices rectilignes.....	536
Construction du plan tangent à cet hyperboloïde.....	541
Moyen d'établir une symétrie convenable dans le tracé de l'épure.....	542
Du cône asymptote de l'hyperboloïde.....	543
Discussion sur le genre de la section que produira dans l'hyperboloïde un plan sécant donné.....	544
Trouver sur l'hyperboloïde une génératrice parallèle à un plan donné.....	548

CHAPITRE III. — *Du paraboloïde hyperbolique.*

Génération de cette surface; elle est gauche.....	549
Tout plan parallèle aux deux directrices coupe la surface suivant une droite.....	551
Il s'ensuit que le paraboloïde admet un second mode de génération, où les directrices sont deux génératrices primitives, et où le plan directeur est différent du premier.....	552
Le paraboloïde admet encore deux autres modes de génération, où l'on emploie pour directrices trois droites parallèles à un même plan.....	553
Manière de construire un modèle en relief du paraboloïde.....	555
Du plan tangent au paraboloïde.....	556
Identité de la surface gauche actuelle avec le paraboloïde hyperbolique qui fait partie des cinq surfaces du second degré.....	558
Discussion sur le genre de la section que produira dans le paraboloïde un plan sécant donné.....	559
Trouver sur le paraboloïde une génératrice parallèle à un plan donné.....	565
Représentation graphique d'un paraboloïde défini par deux directrices rectilignes et un plan directeur.....	566
Détermination du sommet et de l'axe de la surface.....	570
Sections perpendiculaires à l'axe. Du plan tangent à ce paraboloïde.....	573

CHAPITRE IV. — *Des plans tangents aux surfaces gauches générales.*

Lorsque deux surfaces gauches ont trois plans tangents communs et que leurs points de contact sont situés sur la même génératrice, ces surfaces se raccordent tout le long de cette droite... b.	575
---	-----

	Nos.
Lorsque deux surfaces gauches ont le même plan directeur, il suffit qu'elles aient deux plans tangents communs, pour qu'elles se raccordent tout le long de la génératrice commune. . . . .	576
Méthode générale pour trouver le plan tangent d'une surface gauche en un point donné sur une génératrice. . . . .	577
Cas où l'une des directrices est une surface. . . . .	581
Cas où l'on ne connaît pas les tangentes aux directrices. . . . .	582
Tout plan mené par une génératrice d'une surface gauche est tangent dans un certain point que l'on peut déterminer. . . . .	583
Construire la tangente à une courbe tracée arbitrairement. . . . .	584
Du plan tangent à une surface gauche, lorsqu'il doit passer par un point donné. . . . .	585
Cas où ce plan doit passer par une droite donnée. . . . .	589
Cas où il doit être parallèle à un plan donné. . . . .	592
Dans toute surface gauche, le lieu des normales menées par les divers points d'une même génératrice est un hyperboloïde hyperbolique. . . . .	595

## CHAPITRE V. — Exemples divers de surfaces gauches.

Génération et représentation d'un conoïde droit. . . . .	596
Construction du plan tangent pour divers points d'une même génératrice. . . . .	598
Conoïde circonscrit à une sphère. Construction du plan tangent. . . . .	601
Du biais passé. Génération de cette surface qui est gauche. . . . .	606
Construction du plan tangent et de la normale. . . . .	608
Hélicoïde gauche. Construction de ses génératrices. . . . .	610
Second mode de génération pour cette surface. Troisième mode. . . . .	613
L'hélicoïde gauche admet une nappe supérieure, qui couperait l'autre nappe suivant des hélices de même pas. . . . .	616
Représentation complète de la surface, avec les enveloppes des génératrices, et les asymptotes. . . . .	617
Sections remarquables; spirales d'Archimède. . . . .	618
Construction du plan tangent à l'hélicoïde pour un point donné sur une génératrice. Du paraboloidé de raccordement. . . . .	621
Trouver le point de contact de l'hélicoïde avec un plan donné qui passe par une génératrice connue. . . . .	627
Hélicoïde gauche à plan directeur. . . . .	628
De la vis à filet triangulaire. Génération du filet et représentation complète de la vis avec les enveloppes des génératrices. . . . .	632
De la vis à filet carré. . . . .	637
Du conoïde de la voûte d'arête en tour ronde. Des courbes d'arête. . . . .	640
Les projections de ces courbes sont des spirales d'Archimède. . . . .	643
De la tangente à la courbe d'arête pour un point quelconque. . . . .	645
construction de cette droite pour le point multiple et pour la naissance. . . . .	646

## LIVRE VIII.

## DE LA COURBURE DES LIGNES ET DES SURFACES.

CHAPITRE I<sup>er</sup>. — Sur la courbure et les développées des lignes.

	Nos.
Définition des contacts de divers ordres entre deux courbes; du cercle osculateur, du plan osculateur, pour un point donné sur une courbe. . . . .	649
La courbure d'une courbe en chaque point, a pour mesure précise le rapport de l'unité au rayon du cercle osculateur. . . . .	653
Les courbes gauches n'ont qu'une seule courbure; mais elles présentent une torsion ou <i>cambrure</i> qui est mesurée par l'angle de deux plans osculateurs voisins. . . . .	654
Les rayons de courbure d'une courbe gauche ne se coupent pas consécutivement, et, par suite, les centres de courbure ne forment point une développée. . . . .	656
Cependant une courbe gauche admet une infinité de développées, situées toutes sur une surface développable où elles sont les lignes <i>minimum</i> . . . . .	657
Cas où la courbe proposée est sphérique. . . . .	660
Si elle est plane, toutes ses développées deviennent des hélices. . . . .	661
Remarques sur la position du cercle osculateur et du plan osculateur, qui traversent ordinairement la courbe proposée. . . . .	662
Construire le plan osculateur relatif à un point donné sur une courbe. . . . .	664
Construire le rayon de courbure d'une courbe, en un point donné. . . . .	665
Méthode générale pour construire une développée d'une courbe quelconque, et le lieu de ses centres de courbure. . . . .	667
Étant donnée une développante sphérique, trouver le lieu de ses centres de courbure, et l'une de ses développées. . . . .	669
Étant donnée une hélice à base circulaire, construire le lieu de ses centres de courbure, et l'une de ses développées. On prouve d'abord que le lieu de toutes les développées est un hélicoïde développable, dont l'arête de rebroussement contient les centres de courbure de l'hélice primitive. . . . .	672
Le rayon de courbure de l'hélice primitive et celui de l'hélice arête de rebroussement de l'hélicoïde <i>polaire</i> sont égaux chacun à la somme des rayons des cylindres où sont situées ces deux hélices. . . . .	674
Valeur analytique de ces rayons de courbure. . . . .	676
Construction d'une développée de l'hélice primitive. De ses diverses branches et de leurs asymptotes. . . . .	677

## CHAPITRE II. — De la courbure des surfaces.

Définition de deux surfaces osculatrices en un point commun. . . . .	684
Relations entre les rayons de courbure des sections normales qui passent par un même sommet d'un ellipsoïde. . . . .	685
Cas d'un hyperboloïde gauche. Des plans normaux <i>limites</i> . . . . .	686
Pour chaque point d'une surface quelconque, il existe deux sections normales <i>principales</i> , situées dans des plans perpendiculaires, et dont l'une a un rayon de courbure <i>minimum</i> , et l'autre un rayon de courbure <i>maximum</i> ; ces rayons sont liés avec le rayon d'une autre	

	N <sup>os</sup> .
section normale, par une relation identique avec celle que nous avons trouvée pour les surfaces du second degré.....	690
Discussion de la courbure des sections normales dans une surface convexe; des ombilics.....	691
Discussion analogue pour une surface non convexe. Des plans normaux <i>limites</i> . Note sur le théorème de <i>Meunier</i> .....	693
On démontre synthétiquement qu'en chaque point d'une surface quelconque, on peut trouver un ellipsoïde, ou un hyperboloïde gauche, qui soit <i>osculateur</i> de la surface proposée.....	696
Des lignes de courbure d'une surface. On démontre d'abord qu'au sommet d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde gauche, il n'existe que deux lignes de courbure.....	699
Sur une surface générale, on prouve aussi qu'il n'existe pour chaque point que deux lignes de courbure, lesquelles sont rectangulaires puisqu'elles se trouvent tangentes aux deux sections principales.....	702
Exemples divers des lignes de courbure et des sections principales, sur les surfaces de révolution, sur les cylindres, les cônes, les surfaces développables et les surfaces gauches.....	707
Des deux nappes qui contiennent les centres des deux courbures d'une surface quelconque.....	714
De la ligne des courbures sphériques.....	721
Remarques sur les applications de ces théories à certains arts.....	723
Détermination graphique des lignes de courbure.....	725
Dans les surfaces non convexes, les plans normaux <i>limites</i> ont pour traces sur le plan tangent, les tangentes à l'intersection de ce plan avec la surface.....	730
Application à la recherche des tangentes au point multiple de la section du tore par son plan tangent.....	734
Construction des lignes de courbure sur un ellipsoïde.....	735
Application de ces résultats, proposée par Monge.....	741
Construction de l'hyperboloïde qui est osculateur d'une surface gauche, tout le long d'une génératrice.....	744

## LIVRE IX.

## ADDITIONS.

CHAPITRE I<sup>er</sup>. — *Théorèmes divers.*

Lorsqu'un cylindre pénètre dans une sphère par une courbe plane, la courbe de sortie est aussi plane, et égale à la courbe d'entrée.....	745
Dans l'intersection d'un cône avec une sphère, si la courbe d'entrée est plane, la courbe de sortie l'est pareillement; et elle se trouve la section antiparallèle du cône.....	746
Lorsque deux cylindres du second degré se coupent suivant une courbe plane, la courbe de sortie est aussi plane.....	748
Lorsque deux surfaces du second degré ont un <i>axe commun</i> , ou deux plans tangents communs, elles ne peuvent se couper que suivant deux courbes planes.....	750
Démonstration directe pour le cas de deux berceaux cylindriques, qui ont le même plan de naissance et la même montée.....	753

	N <sup>os</sup> .
Remarque sur la tangente à l'intersection de deux surfaces, pour le point particulier où elles se touchent.....	754
Théorèmes sur les tangentes conjuguées.....	755

CHAPITRE II. — *Méthode des Plans cotés.*

Utilité de ce mode de représentation dans certains arts.....	759
Définition graphique d'un point et d'une droite; construction de l'échelle de pente de cette ligne; problèmes divers sur les droites.....	761
Représentation graphique d'une courbe.....	769
Représentation graphique d'un plan limité, ou indéfini.....	770
Problèmes divers sur les plans et les droites.....	773
Les surfaces courbes se représentent par des sections de niveau équidistantes, et cotées; éléments des lignes de plus grande pente.....	789
Trouver la cote d'un point situé sur une surface connue, et donné par sa projection horizontale, ou réciproquement.....	793
Construire le plan tangent pour un point donné sur une surface connue.....	795
Remarques sur la position du plan tangent par rapport à la surface.....	797
Sur une surface connue, tracer l'axe d'un chemin dont la pente soit constante.....	800
Trouver l'intersection d'un plan avec une surface.....	801
Trouver l'intersection d'une droite avec une surface.....	803
Intersection de deux surfaces, ou d'une surface avec une courbe.....	804

CHAPITRE III. — *Notions préliminaires sur les engrenages.*

Définition de la vitesse angulaire.....	805
Principe fondamental de tous les engrenages.....	806
Les profils conjugués de deux dents doivent être <i>enveloppes</i> l'un de l'autre.....	810
La normale de l'enveloppe passe toujours par le point de contact du cercle mobile.....	811
Des centres de courbure de l'enveloppe. Construction graphique.....	813
Il y a toujours frottement dans un engrenage.....	817
Enveloppe d'un point mobile. Développée de l'épicycloïde.....	819
Développée de la cycloïde ordinaire.....	822
Enveloppe d'un cercle. Points de rebroussement.....	823
Enveloppe d'un rayon du cercle mobile.....	826
L'enveloppe d'une épicycloïde est une autre épicycloïde.....	828
Enveloppe d'une développante de cercle.....	829
Lieu des contacts sur le plan fixe des deux cercles.....	831
Limites correspondantes sur les profils conjugués.....	832

CHAPITRE IV. — *Tracé des engrenages plans ou cylindriques.*

Tracé des cercles primitifs. Détermination des bases, des creux et du <i>jeu</i> pour les dents des deux roues.....	835
Engrenage à flancs, symétrique et réciproque.....	838
Limites des entailles. Échanfrinement des dents.....	841
Engrenage à flancs, non réciproque.....	849

	N <sup>os</sup> .
Crémaillère mue par une roue dentée.....	851
Engrenage à flancs, intérieur. Il ne peut pas être réciproque.....	854
Engrenage à lanterne.....	857
Crémaillère à fuseaux.....	861
Engrenage à développante. Il offre l'avantage de pouvoir changer la distance des axes.....	863
Des cames et pilons.....	868
Des excentriques.....	872
Remarques diverses qui prouvent que les dents ne doivent pas entrer en prise avant la ligne des centres.....	875
Limite inférieure du nombre des dents, pour chaque genre d'engrenage.....	880

CHAPITRE V. — *Des engrenages coniques.*

Détermination des cercles primitifs.....	881
Principe général pour former les surfaces conjuguées de deux dents.....	882
Si l'une d'elles est un <i>flanc</i> formé par un plan méridien, l'autre se trouve être un cône épicycloïdal.....	883
Limites correspondantes du flanc et de la dent.....	884
Tracé de l'épure.....	886
Limites des flancs.....	892
Limites des entailles.....	893
Développement des panneaux.....	895
Méthode approximative, employée ordinairement.....	898

NOTES de M. E. Martelet. — (Sur les changements de plan de projection et sur les mouvements de rotation.)..... 355

ATLAS (71 planches).

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Marie - 29 de Janvier 1889.

# TRAITÉ

DE

## GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

### LIVRE PREMIER.

DES DROITES ET DES PLANS.

### CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

17 - 26 - 1889.

1. A chaque pas que l'on fait dans les sciences ou dans les arts, on éprouve le besoin de transmettre aux autres hommes la connaissance exacte des formes qu'affectent les corps, soit pour manifester les rapports géométriques que l'on y a découverts, soit pour guider l'artiste chargé de reproduire ces objets dans des dimensions assignées d'avance. Or, de tous les moyens, le plus efficace et quelquefois le seul capable d'atteindre complètement ce but, c'est *la description graphique* des corps; et tel est aussi le premier objet de la Géométrie descriptive, dont les méthodes générales deviendront ensuite, par leur fécondité, des moyens de recherche propres à découvrir de nouvelles propriétés de l'étendue, et fourniront d'ailleurs les procédés nécessaires pour résoudre les divers problèmes de perspective, de stéréotomie, de fortification, etc.

2. Mais ici se présentent deux genres de difficultés. En premier lieu, les corps offrent toujours trois dimensions non comprises dans un même plan; ce qui semble devoir entraîner des opérations graphiques à effectuer dans l'espace, chose fort incommode, sinon impraticable. Par conséquent, il faut trouver des méthodes qui permettent de rapporter tous les points de l'espace à un seul et même plan, ou du moins qui ramènent toutes les opérations graphiques à s'exécuter dans ce plan unique.

3. En second lieu, ces méthodes devant servir, non à établir des théories purement spéculatives, mais bien à effectuer des opérations réelles, il faut qu'elles offrent une précision complète dans la manière d'exprimer les données et les résultats graphiques de chaque question; et c'est en cela surtout qu'elles différeront essentiellement des procédés employés dans la géométrie ordinaire, du moins quand on considère les trois dimensions de l'espace. Là, en effet, les figures n'étant destinées qu'à guider l'esprit dans la suite des raisonnements nécessaires pour démontrer la vérité d'un théorème, ne sont tracées que d'une manière vague, ou d'après certaines conventions tacites qui renferment toujours beaucoup d'arbitraire. Pour