FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Maria. 29 de [illegible] de 1889

TRAITÉ
DE
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

LIVRE PREMIER.
DES DROITES ET DES PLANS.

CHAPITRE PREMIER.
NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

17 - 9bre - 1889.

1. A chaque pas que l'on fait dans les sciences ou dans les arts, on éprouve le besoin de transmettre aux autres hommes la connaissance exacte des formes qu'affectent les corps, soit pour manifester les rapports géométriques que l'on y a découverts, soit pour guider l'artiste chargé de reproduire ces objets dans des dimensions assignées d'avance. Or, de tous les moyens, le plus efficace et quelquefois le seul capable d'atteindre complétement ce but, c'est *la description graphique* des corps; et tel est aussi le premier objet de la Géométrie descriptive, dont les méthodes générales deviendront ensuite, par leur fécondité, des moyens de recherche propres à découvrir de nouvelles propriétés de l'étendue, et fourniront d'ailleurs les procédés nécessaires pour résoudre les divers problèmes de perspective, de stéréotomie, de fortification, etc.

2. Mais ici se présentent deux genres de difficultés. En premier lieu, les corps offrent toujours trois dimensions non comprises dans un même plan; ce qui semble devoir entraîner des opérations graphiques à effectuer dans l'espace, chose fort incommode, sinon impraticable. Par conséquent, il faut trouver des méthodes qui permettent de rapporter tous les points de l'espace à un seul et même plan, ou du moins qui ramènent toutes les opérations graphiques à s'exécuter dans ce plan unique.

3. En second lieu, ces méthodes devant servir, non à établir des théories purement spéculatives, mais bien à effectuer des opérations réelles, il faut qu'elles offrent une précision complète dans la manière d'exprimer les données et les résultats graphiques de chaque question; et c'est en cela surtout qu'elles différeront essentiellement des procédés employés dans la géométrie ordinaire, du moins quand on considère les trois dimensions de l'espace. Là, en effet, les figures n'étant destinées qu'à guider l'esprit dans la suite des raisonnements nécessaires pour démontrer la vérité d'un théorème, ne sont tracées que d'une manière vague, ou d'après certaines conventions tacites qui renferment toujours beaucoup d'arbitraire. Pour s'en convaincre, il suffira de se rappeler comment on résout le problème de la plus courte distance de deux droites non situées dans le même plan; ou bien encore celui où il s'agit de trouver le centre et le rayon d'une sphère qui doit passer par quatre points donnés. On verra aisément que, dans ces questions, la géométrie ordinaire indique bien la série d'opérations qu'il faudrait exécuter pour arriver à la solution du problème; mais elle ne donne pas les moyens d'effectuer réellement ces constructions, et d'obtenir un résultat déterminé pour la grandeur et la position de la plus courte distance, non plus que pour la longueur du rayon et la position du centre de la sphère (*voyez* n^{os} **50** et **500**). Il est donc indispensable d'adopter, en Géométrie descriptive, un mode de construction qui ne laisse rien d'arbitraire dans la représentation des données et des résultats, et qui permette aussi d'effectuer toutes les opérations graphiques sur un seul et même plan : or ces deux avantages nous seront fournis par la *Méthode des projections* dont nous allons exposer les principes.

4. (*Fig.* 1). Si d'un point a situé dans l'espace, on abaisse sur un plan fixe VXY une perpendiculaire aA, le pied A de cette droite est dit *la projection* du point a sur le plan en question. De même, en abaissant des perpendiculaires de tous les points de la droite abd,..., la suite des points A, B, D,..., forme ce qu'on appelle *la projection* de la droite abd sur le plan fixe ; et cette projection est nécessairement rectiligne, puisque toutes ces perpendiculaires étant évidemment contenues dans le plan mené par l'une d'entre elles aA et par la droite ad, c'est l'intersection du *plan projetant* Aad avec le *plan de projection* VXY, qui fournit la projection ABD.

Généralement, la projection d'une courbe quelconque mnp est la suite des pieds des perpendiculaires mM, nN, pP,..., abaissées de ces divers points sur le plan fixe, et cette projection MNP... est une ligne dont la courbure diffère ordinairement de celle de la courbe donnée dans l'espace. D'ailleurs, l'ensemble de ces perpendiculaires compose une surface cylindrique dans le sens général de ce mot, et on la nomme le *cylindre projetant* de la courbe mnp.

5. Cela posé, je dis qu'un point, une droite, ou une courbe, sont complétement déterminés de position, quand on assigne leurs projections sur deux plans fixes dont la situation est connue, et qui ne sont pas parallèles. Soient, en effet, VXY et XYZ deux plans de ce genre, A et A′ les projections données d'un certain point dans l'espace. Si par le point A vous élevez une perpendiculaire indéfinie Aa au plan VXY, cette droite passera nécessairement par le point demandé : ce point devra aussi se trouver sur la droite $A'a$ élevée perpendiculairement au plan XYZ; donc il ne pourra occuper dans l'espace qu'*une position unique*, déterminée par l'intersection de ces deux perpendiculaires. A la vérité, si les deux droites Aa et $A'a$ ne se rencontraient pas, il n'existerait aucun point de l'espace qui eût pour projection A et A′; mais cela prouve seulement que les deux projections d'un point ne doivent pas être prises d'une manière tout à fait arbitraire, et qu'il y a entre elles une dépendance que nous expliquerons bientôt (n° **10**).

6. (*Fig.* 1). Soient maintenant AD et A′D′ les projections d'une droite inconnue, sur les deux plans fixes VXY et XYZ. En imaginant par la première un plan indéfini DAa perpendiculaire à VXY, ce plan renfermera évidemment la droite demandée; elle sera aussi dans le plan $D'A'a$ mené par D′A′, perpendiculairement à XYZ; donc la ligne inconnue se trouvera nécessairement à l'intersection de ces deux plans, qui est une droite unique et *déterminée*. Il n'y aurait d'exception que dans le cas où les deux plans projetants DAa et $D'A'a$ se confondraient en un seul, ce qui supposerait que la droite dans l'espace, ainsi que ses deux projections, se trouveraient précisément *perpendiculaires à l'intersection* XY des deux plans fixes : alors deux projections de ce genre ne suffiraient plus pour définir la droite en question, et il faudrait demander une troisième projection faite sur un autre plan fixe, non parallèle à l'intersection des deux premiers.

7. Enfin, si l'on donne les projections MNP et M′N′P′ d'une courbe inconnue, on imaginera par la première un cylindre perpendiculaire au plan VXY, et par la seconde un autre cylindre perpendiculaire au plan XYZ; la courbe demandée devra évidemment se trouver située sur chacune de ses surfaces, et, par conséquent, sa position et sa forme seront déterminées par leur intersection mnp, qui pourra bien être une *courbe gauche* ou *courbe à double courbure* (*), c'est-à-dire telle, que tous ses points ne soient pas compris dans un même plan.

Ce sera donc dorénavant par ses deux projections que nous définirons graphiquement un point ou une ligne; et quand nous dirons que tel point ou telle ligne est donné, il faudra entendre que ce sont les projections qui sont connues. Quant aux surfaces, nous verrons plus loin (n° **93**) comment il faut modifier l'emploi des projections pour les représenter commodément.

8. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les projections s'exécutaient au moyen de droites abaissées perpendiculairement sur le plan fixe. Quelquefois, il est vrai, on emploie des droites *obliques* au plan, quoique toujours parallèles à une direction donnée, et les conséquences que nous avons établies dans les n^{os} **5**, **6** et **7** subsistent également; mais il faut de graves motifs pour faire adopter ce genre de projections, parce qu'en général il est moins simple et offre moins d'exactitude dans les résultats graphiques, attendu que des droites qui se coupent obliquement, laissent plus d'incertitude sur la position précise de leur point de rencontre. Ainsi, à moins que nous n'avertissions expressément du contraire, les projections seront toujours *orthogonales*.

Par des motifs semblables, on choisit ordinairement les plans de projection VXY,

(*) Cette dénomination ne vient pas, comme on l'a dit faussement, de ce qu'une telle courbe participe à la courbure des deux surfaces dont elle est l'intersection; car, d'abord, une surface n'admet pas une courbure unique; et ensuite une même courbe peut être l'intersection d'une infinité de surfaces très-différentes. Mais cette expression veut dire qu'une courbe qui n'est point plane, présente deux sortes de courbures, l'une par rapport à sa tangente, l'autre par rapport à son plan osculateur, comme nous l'expliquerons plus loin (n° 654). La première est proprement la seule et véritable *courbure* de la courbe; la seconde est une espèce de *torsion* ou de *cambrure :* c'est pourquoi la dénomination de *courbe gauche* ou *courbe cambrée* serait à la fois plus exacte et plus simple.

XYZ, perpendiculaires entre eux; et pour se les représenter plus aisément, on suppose que le premier est *horizontal* et l'autre *vertical*. Leur intersection XY, qui est une ligne importante à remarquer, se nomme la *ligne de terre*.

9. Voilà donc une méthode suffisante pour exprimer graphiquement les données d'un problème sans aucune indétermination; il reste à la modifier de manière que les constructions puissent toutes s'exécuter sur un plan unique. Pour atteindre ce but, on imagine, après avoir projeté les points et les lignes dont il est question sur les plans rectangulaires VXY et XYZ, que ce dernier a tourné autour de la ligne de terre XY pour se rabattre sur le plan horizontal, et ne former avec lui qu'un seul et même plan VZ'; et c'est sur ce dernier que l'on trace effectivement toutes les constructions que l'on aurait dû faire sur les deux plans primitifs. Néanmoins, il ne faut pas perdre de vue que ce rabattement n'est admis que comme moyen d'exécution : et toutes les fois que l'on veut se rendre compte d'une opération par des considérations géométriques, on doit, par la pensée, relever le plan vertical, et se le figurer toujours dans une situation perpendiculaire au plan horizontal.

10. (*Fig.* 1.) Après le rabattement des plans fixes, il existe entre les deux projections d'un même point de l'espace une dépendance très-importante à observer. En effet, les deux droites A*a* et A'*a*, qui projettent le point *a* en A et en A', sont perpendiculaires, l'une au plan horizontal, l'autre au plan vertical : ainsi le plan A*a*A', mené par ces deux droites, se trouvera perpendiculaire aux deux plans de projection, et, par suite, à leur intersection XY; donc le plan A*a*A' coupera ceux-ci suivant des droites AF, A'F, perpendiculaires sur XY, et aboutissant au même point F de cette ligne de terre. Cela posé, quand le plan vertical XYZ tourne autour de XY, il entraîne avec lui la droite A'F qui, pendant ce mouvement, demeure perpendiculaire à la charnière XY; par conséquent, après le rabattement du plan vertical, la droite FA' prendra une position FA'' qui sera évidemment le prolongement de FA. Ainsi *les deux projections* A *et* A'' *d'un même point de l'espace doivent toujours se trouver sur une même droite perpendiculaire à la ligne de terre* XY, lorsque les plans de projection sont rabattus l'un sur l'autre : de sorte que, si l'on prend à volonté une de ces projections, A par exemple, il faudra mener la droite indéfinie AF perpendiculaire à XY, et placer quelque part sur le prolongement de AF la deuxième projection A''.

11. Quant à la droite *ad*, si l'on rabat semblablement le point D' en D'', la projection verticale A'D' deviendra en rabattement A''D''; mais celle-ci n'aura, avec la projection horizontale AD, aucune dépendance nécessaire, de sorte que l'on peut tracer *arbitrairement* les lignes AD et A''D'' pour représenter les deux projections d'une même droite dans l'espace. Il faut toutefois excepter le seul cas où AD serait *perpendiculaire* à la ligne de terre XY : alors la projection verticale devrait aussi être le prolongement de AD; mais nous avons déjà dit (nº **6**) que, dans ce cas tout particulier, deux projections de ce genre laisseraient la droite indéterminée de position.

12. Dorénavant nous placerons les plans de projection rabattus, de manière que

la ligne de terre XY ait la position indiquée (*fig.* 2); et comme alors la partie VXY de la feuille de dessin représentera en même temps la portion *antérieure* du plan horizontal et la portion *inférieure* du plan vertical qui est venue se confondre avec la première, tandis que la partie XYZ comprendra la portion *supérieure* du plan vertical et la portion *postérieure* du plan horizontal, il ne suffira pas, pour déterminer graphiquement un point de l'espace, de donner indistinctement ses deux projections A et A'. Il faudra encore énoncer si le point A est la projection horizontale, ou bien s'il est la projection verticale; car l'une et l'autre de ces hypothèses peuvent être admises, et elles produiraient une très-grande différence quant à la position réelle du point dans l'espace. Afin donc de rappeler aux yeux le plan auquel est relative chacune des projections, nous conviendrons de noter ordinairement, par des lettres sans accent, les projections *horizontales* des points ou des droites, et par des lettres accentuées les projections *verticales*. Ainsi le point (A, A') (*fig.* 2) désignera le point de l'espace qui est projeté horizontalement en A et verticalement en A' : le point (B, B') désignera celui qui a pour projection horizontale B et pour projection verticale B', et il en sera de même du point (C, C') ou du point (D, D'); mais le lecteur fera bien d'exercer son imagination à se représenter les positions diverses de ces points-là, au-dessus et au-dessous, en avant ou en arrière du plan de projection, afin de pouvoir dorénavant reconnaître avec facilité dans lequel des quatre angles dièdres, formés par ces deux plans, se trouve situé un point défini par ses projections.

13. (*Fig.* 3.) Les mêmes conventions devront être appliquées aux lignes; ainsi la droite (AB, A'B') sera celle qui a pour projection horizontale AB, et pour projection verticale A'B'. Mais comme d'ailleurs une droite est déterminée de position par la connaissance de deux de ses points, nous allons donner le moyen général de trouver *les traces d'une droite*, c'est-à-dire les points où elle va rencontrer les deux plans de projection.

La trace verticale de la droite (AB, A'B') étant un point commun au plan vertical et à la droite, elle doit être projetée horizontalement sur la ligne de terre XY, et aussi sur la ligne AB indéfiniment prolongée; donc cette trace a pour projection horizontale le point C, et conséquemment elle sera placée quelque part sur la verticale CC'. Mais cette même trace doit être évidemment située sur la projection verticale A'B' indéfinie; donc elle est au point C'. De là résulte cette règle générale dont il faut se rendre l'application très-familière : *Prolongez la projection horizontale de la droite jusqu'à la ligne de terre, et à ce point élevez une verticale indéfinie qui, par sa rencontre avec la projection verticale, donnera la trace verticale de la droite proposée.*

La trace horizontale de la même droite étant un point situé à la fois dans le plan horizontal et sur la ligne proposée, se trouvera projetée verticalement sur la ligne de terre XY et sur A'B' indéfinie; donc cette trace aura pour projection verticale le point D', et conséquemment elle sera placée quelque part sur la perpendiculaire D'D à la ligne de terre. Mais d'ailleurs cette trace doit nécessairement se trouver sur la projection horizontale AB indéfinie; donc elle est au point D. Ainsi, en général, *prolongez la projection verticale de la droite jusqu'à la ligne de terre; et, à ce point, élevez sur cette dernière ligne une perpendiculaire indéfinie qui, par sa rencontre avec la projection horizontale, déterminera la trace horizontale de la droite en question.*

14. Réciproquement, si l'on donnait les deux traces D et C′ d'une droite, il serait facile d'en conclure les projections; car, comme le point C′ appartient à la droite même, la perpendiculaire C′C abaissée sur la ligne de terre donnera un point C de la projection horizontale, et celle-ci sera évidemment DC. De même, le point D qui appartient à la droite, étant projeté verticalement sur la ligne de terre, donnera un point D′ de la projection verticale qui sera D′C′.

On fera bien de s'exercer à résoudre ces deux questions réciproques l'une de l'autre, sur des droites diversement situées; telles que sont, dans la *fig.* 3, la ligne (EF, E′F′), dont la trace horizontale est en F et la trace verticale en G′; et la ligne (HK, H′K′), dont K′ est la trace verticale et L la trace horizontale.

15. En terminant ces notions préliminaires, nous établirons quelques règles essentielles à observer dans le tracé de toutes les épures. Ces dessins, en effet, devant servir à représenter exactement la forme des objets, il faut que les divers modes de ponctuation qu'on y emploiera offrent une sorte de langage intelligible aux yeux; c'est-à-dire qu'ils manifestent clairement la situation relative des différentes parties, distinguent celles qui sont cachées de celles qui sont visibles pour l'observateur, et fassent discerner les résultats d'un problème d'avec les lignes qui n'ont servi que de moyens auxiliaires pour y arriver; c'est pourquoi nous adopterons constamment les règles suivantes :

1° Les lignes PRINCIPALES, c'est-à-dire celles qui représentent *les données* ou *les résultats* d'un problème, seront marquées *par un trait plein* et continu, lorsqu'elles seront *visibles;* mais si ces lignes principales sont *invisibles,* elles seront *ponctuées,* c'est-à-dire tracées en points ronds. On voit des exemples de ces deux modes de tracé dans les lignes ABCD et EFGH de la *fig.* 3 *bis.*

2° Les lignes AUXILIAIRES, c'est-à-dire toutes celles qui ne rentreront pas dans la classe précédente, et qui ne seront employées que comme des moyens d'arriver à la solution du problème, seront *pointillées* ou composées de petits traits interrompus; telle est la ligne P dans la *fig.* 3 *bis.* Quant à ces lignes auxiliaires, il n'y aura jamais lieu de distinguer si elles sont visibles ou non, parce qu'elles sont censées n'exister que dans l'imagination du géomètre qui les conçoit pour parvenir au résultat demandé.

3° Lorsque, parmi ces lignes *auxiliaires,* il s'en trouvera quelqu'une qui offrira plus d'importance, et sur laquelle on voudra appeler l'attention d'une manière particulière, on pourra la représenter par *une ligne mixte,* composée de petits traits séparés par un ou deux points ronds, comme dans les droites M et N de la *fig.* 3 *bis.* Cependant on doit se garder de trop multiplier ce mode de ponctuation, et consulter sur cela le bon goût et des modèles bien choisis; d'ailleurs il ne faut jamais

employer ces lignes mixtes pour les droites qui réunissent simplement les deux projections d'un même point.

16. Il reste maintenant à expliquer comment, parmi les lignes *principales* de chaque question, on discernera celles qui sont visibles et que l'on doit marquer en trait plein, d'avec celles qui sont invisibles et que l'on doit ponctuer. Des règles complètes sur ce sujet ne pourront être données qu'après avoir parlé des surfaces courbes et de leurs plans tangents; mais comme dans les premiers problèmes qui vont nous occuper il ne se rencontrera que des droites et des plans, il nous suffira pour l'instant de poser les conventions suivantes :

On admet toujours que l'observateur, qui considère la projection d'un objet sur le plan *horizontal,* est placé *au-dessus de ce plan et à une distance infinie sur la verticale* qui passe par un quelconque des points de cet objet, mais en avant du plan vertical; et cette convention, qui simplifiera, comme nous le verrons plus loin, le tracé du contour apparent des surfaces courbes, a été d'ailleurs suggérée par la manière dont on projette les points de l'espace sur un plan. En effet, les rayons visuels menés de l'œil de l'observateur à tous les points d'un corps, approchent d'autant plus d'être perpendiculaires au plan horizontal, que l'observateur s'élève davantage en restant sur la même verticale; de sorte que quand le point de vue est à une distance infinie, ces rayons deviennent parallèles, et coïncident avec les droites qui servent à projeter les points du corps. D'où il suit que *la projection horizontale d'un objet n'est autre chose qu'*UNE VUE *de cet objet, prise d'un point infiniment éloigné sur la verticale;* résultat qui justifie suffisamment la convention énoncée plus haut.

Par une raison semblable, toute projection *verticale* est censée vue par un observateur placé *à une distance infinie sur une perpendiculaire au plan vertical, élevée en avant de ce plan et au-dessus du plan horizontal.*

D'après cela, toute ligne ou portion de ligne *principale* qui se trouvera au-dessous du plan horizontal, ou derrière le plan vertical, sera réputée invisible; et, comme telle, *ponctuée* en points ronds. Si, de plus, il se trouve dans la question quelque plan réellement existant, et qu'une portion de ligne principale soit située derrière ce plan ou au-dessous, par rapport à l'observateur, cette portion devra aussi être *ponctuée;* mais il faudra se souvenir que ces distinctions ne regardent nullement les *lignes auxiliaires,* par la raison citée (n° **15**, 2°). On pourra reconnaître déjà l'application de ces règles dans la *fig.* 3, et nous aurons soin de les rappeler dans la plupart des problèmes que nous allons résoudre.

CHAPITRE II.

PROBLÈMES SUR LES LIGNES DROITES ET LES PLANS.

17. *Construire la droite qui passe par deux points donnés* (A, A′) *et* (M, M′) (*fig.* 4); *puis, trouver la véritable distance de ces deux points* (*).

(*) Avant de construire une épure, il est essentiel d'observer les précautions suivantes. On trace d'a-