en général, *prolongez la projection verticale de la droite jusqu'à la ligne de terre; et, à ce point, élevez sur cette dernière ligne une perpendiculaire indéfinie qui, par sa rencontre avec la projection horizontale, déterminera la trace horizontale de la droite en question.*

14. Réciproquement, si l'on donnait les deux traces D et C′ d'une droite, il serait facile d'en conclure les projections; car, comme le point C′ appartient à la droite même, la perpendiculaire C′C abaissée sur la ligne de terre donnera un point C de la projection horizontale, et celle-ci sera évidemment DC. De même, le point D qui appartient à la droite, étant projeté verticalement sur la ligne de terre, donnera un point D′ de la projection verticale qui sera D′C′.

On fera bien de s'exercer à résoudre ces deux questions réciproques l'une de l'autre, sur des droites diversement situées; telles que sont, dans la *fig.* 3, la ligne (EF, E′F′), dont la trace horizontale est en F et la trace verticale en G′; et la ligne (HK, H′K′), dont K′ est la trace verticale et L la trace horizontale.

15. En terminant ces notions préliminaires, nous établirons quelques règles essentielles à observer dans le tracé de toutes les épures. Ces dessins, en effet, devant servir à représenter exactement la forme des objets, il faut que les divers modes de ponctuation qu'on y emploiera offrent une sorte de langage intelligible aux yeux; c'est-à-dire qu'ils manifestent clairement la situation relative des différentes parties, distinguent celles qui sont cachées de celles qui sont visibles pour l'observateur, et fassent discerner les résultats d'un problème d'avec les lignes qui n'ont servi que de moyens auxiliaires pour y arriver; c'est pourquoi nous adopterons constamment les règles suivantes :

1° Les lignes PRINCIPALES, c'est-à-dire celles qui représentent *les données* ou *les résultats* d'un problème, seront marquées *par un trait plein* et continu, lorsqu'elles seront *visibles;* mais si ces lignes principales sont *invisibles*, elles seront *ponctuées*, c'est-à-dire tracées en points ronds. On voit des exemples de ces deux modes de tracé dans les lignes ABCD et EFGH de la *fig.* 3 *bis*.

2° Les lignes AUXILIAIRES, c'est-à-dire toutes celles qui ne rentreront pas dans la classe précédente, et qui ne seront employées que comme des moyens d'arriver à la solution du problème, seront *pointillées* ou composées de petits traits interrompus; telle est la ligne P dans la *fig.* 3 *bis*. Quant à ces lignes auxiliaires, il n'y aura jamais lieu de distinguer si elles sont visibles ou non, parce qu'elles sont censées n'exister que dans l'imagination du géomètre qui les conçoit pour parvenir au résultat demandé.

3° Lorsque, parmi ces lignes *auxiliaires*, il s'en trouvera quelqu'une qui offrira plus d'importance, et sur laquelle on voudra appeler l'attention d'une manière particulière, on pourra la représenter par *une ligne mixte*, composée de petits traits séparés par un ou deux points ronds, comme dans les droites M et N de la *fig.* 3 *bis*. Cependant on doit se garder de trop multiplier ce mode de ponctuation, et consulter sur cela le bon goût et des modèles bien choisis; d'ailleurs il ne faut jamais

employer ces lignes mixtes pour les droites qui réunissent simplement les deux projections d'un même point.

16. Il reste maintenant à expliquer comment, parmi les lignes *principales* de chaque question, on discernera celles qui sont visibles et que l'on doit marquer en trait plein, d'avec celles qui sont invisibles et que l'on doit ponctuer. Des règles complètes sur ce sujet ne pourront être données qu'après avoir parlé des surfaces courbes et de leurs plans tangents; mais comme dans les premiers problèmes qui vont nous occuper il ne se rencontrera que des droites et des plans, il nous suffira pour l'instant de poser les conventions suivantes :

On admet toujours que l'observateur, qui considère la projection d'un objet sur le plan *horizontal*, est placé *au-dessus de ce plan et à une distance infinie sur la verticale* qui passe par un quelconque des points de cet objet, mais en avant du plan vertical; et cette convention, qui simplifiera, comme nous le verrons plus loin, le tracé du contour apparent des surfaces courbes, a été d'ailleurs suggérée par la manière dont on projette les points de l'espace sur un plan. En effet, les rayons visuels menés de l'œil de l'observateur à tous les points d'un corps, approchent d'autant plus d'être perpendiculaires au plan horizontal, que l'observateur s'élève davantage en restant sur la même verticale; de sorte que quand le point de vue est à une distance infinie, ces rayons deviennent parallèles, et coïncident avec les droites qui servent à projeter les points du corps. D'où il suit que *la projection horizontale d'un objet n'est autre chose qu'*UNE VUE *de cet objet, prise d'un point infiniment éloigné sur la verticale;* résultat qui justifie suffisamment la convention énoncée plus haut.

Par une raison semblable, toute projection *verticale* est censée vue par un observateur placé *à une distance infinie sur une perpendiculaire au plan vertical, élevée en avant de ce plan et au-dessus du plan horizontal.*

D'après cela, toute ligne ou portion de ligne *principale* qui se trouvera au-dessous du plan horizontal, ou derrière le plan vertical, sera réputée invisible; et, comme telle, *ponctuée* en points ronds. Si, de plus, il se trouve dans la question quelque plan réellement existant, et qu'une portion de ligne principale soit située derrière ce plan ou au-dessous, par rapport à l'observateur, cette portion devra aussi être *ponctuée;* mais il faudra se souvenir que ces distinctions ne regardent nullement les *lignes auxiliaires*, par la raison citée (n° **15**, 2°). On pourra reconnaître déjà l'application de ces règles dans la *fig.* 3, et nous aurons soin de les rappeler dans la plupart des problèmes que nous allons résoudre.

CHAPITRE II.

PROBLÈMES SUR LES LIGNES DROITES ET LES PLANS.

17. *Construire la droite qui passe par deux points donnés* (A, A′) *et* (M, M′) (*fig.* 4); *puis, trouver la véritable distance de ces deux points* (*).

(*) Avant de construire une épure, il est essentiel d'observer les précautions suivantes. On trace d'a-

D'après les définitions établies au n° **4**, il est évident que la projection horizontale de la droite cherchée passera par les points A et M, tandis que la projection verticale passera par A′ et M′; donc cette droite indéfinie est projetée suivant AMB et A′M′B′, et par là elle se trouve complétement déterminée de position (n° **6**). D'ailleurs on peut construire ses traces (n° **15**), qui seront les points (B, B′) et (C, C′).

Quant à la distance des deux points donnés, elle est mesurée dans l'espace par la portion de droite projetée sur AM et A′M′; mais il est facile de voir qu'une droite finie est toujours plus longue que sa projection sur un plan, excepté quand la première se trouve parallèle au plan sur lequel on la projette, car *alors la droite dans l'espace est évidemment de même longueur que sa projection*. D'après cette remarque, imaginons que la ligne (AM, A′M′) tourne autour de la verticale projetée en A, sans changer d'inclinaison avec cette dernière; par là l'extrémité (A, A′) demeurera immobile, tandis que l'autre extrémité (M, M′) restera à une hauteur constante, en décrivant seulement un arc de cercle horizontal autour de l'axe de rotation. Or, si l'on continue ce mouvement jusqu'à ce que la droite mobile soit devenue *parallèle au plan vertical*, ce qui arrivera quand la projection AM aura pris la situation AP parallèle à la ligne de terre XY, alors l'extrémité M venue en P se trouvera projetée verticalement (n° **10**) quelque part sur PIP′ perpendiculaire à XY; et comme elle doit être à la même hauteur que M′, si l'on mène l'horizontale M′P′, le point P′ sera la projection verticale de l'extrémité mobile de la droite en question. D'ailleurs, puisque l'autre extrémité (A, A′) est demeurée invariable, il s'ensuit que la droite (AM, A′M′) se trouve actuellement projetée suivant AP et A′P′; et sa véritable longueur est précisément la projection verticale A′P′, d'après la remarque faite au commencement de cet article. De là on conclut la règle suivante, qu'il faut se rendre très-familière :

Pour trouver la distance de deux points (A, A′) *et* (M, M′) (*fig.* 4), *formez un triangle rectangle* A′H′P′, *dont un côté* A′H′ *soit la différence des hauteurs* A′R *et* M′K *de ces deux points* au-dessus du plan horizontal, *et dont l'autre côté* H′P′ *soit égal à l'intervalle* AM *des deux projections horizontales : l'hypoténuse* A′P′ *sera la distance demandée.*

18. On arriverait au même but en construisant, sur le plan horizontal, *un*

bord, avec le crayon, une droite indéfinie vers le milieu de la feuille de dessin, et à peu près parallèle à sa longueur : puis, on trace une seconde droite exactement perpendiculaire sur la première, *en se servant d'arcs de cercle*; car l'équerre n'est pas un instrument dont la précision soit assez sûre pour qu'on l'emploie à mener des perpendiculaires qui doivent avoir une longueur un peu considérable. Mais, du moins, l'équerre peut servir à mener des parallèles par un procédé très-exact et très-expéditif, *lequel consiste à la faire glisser le long d'une règle fixe*; aussi c'est par ce moyen que l'on doit tracer, dans chaque épure, la ligne de terre et toutes les droites qui lui sont parallèles, ou perpendiculaires, en se dirigeant sur les deux droites rectangulaires que nous avons recommandé de construire d'abord, et qui forment ce que les praticiens appellent *le trait carre*.

Ajoutons en outre que, quelque importante que soit la ligne de terre, il faut se garder de la former avec un trait plus gros que les lignes principales; car il en résulterait souvent beaucoup d'inexactitude dans la situation des points où elle serait rencontrée par les autres droites de l'épure.

triangle rectangle ADQ *dont un côté* AD *égalerait la différence des distances* AR *et* MK *des deux points donnés au plan vertical, et dont l'autre côté* DQ *serait l'intervalle* A′M′ *des deux projections verticales; l'hypoténuse* AQ *exprimerait encore la distance des deux points dans l'espace*, et devrait se trouver identique avec A′P′. Pour se rendre compte de cette nouvelle construction, il suffira d'imaginer que la droite proposée a tourné autour de l'horizontale qui est projetée verticalement en A′, sans danger d'inclinaison par rapport à cette dernière, jusqu'à ce que cette droite mobile soit devenue *parallèle au plan horizontal*.

19. On aurait pu aussi *rabattre* la droite (AM, A′M′) sur le plan horizontal, en faisant tourner autour de AM, comme charnière, le trapèze invariable formé par la droite proposée et par les verticales qui projettent ses extrémités en A et en M. Par là ces deux verticales seraient demeurées perpendiculaires à la charnière AM, et auraient pris les positions AA″ = RA′, MM″ = KM′; de sorte qu'en traçant la droite A″M″, on aurait encore obtenu la véritable distance des deux points (A, A′) et (M, M′). D'ailleurs il se présente ici une de ces vérifications qu'il ne faut pas négliger dans les opérations graphiques; c'est que la ligne A″M″ prolongée doit aller aboutir en B. En effet, ce dernier point étant la trace horizontale de la droite primitive, il se trouvait situé sur la charnière AMB; et, comme tel, il a dû rester immobile pendant la révolution de la droite.

20. *Réciproquement, si l'on donnait la droite indéfinie* (AB, A′B′) *avec un de ses points* (A, A′), *et qu'on voulût trouver sur cette ligne un autre point* (M, M′) *qui fût éloigné du premier d'une quantité donnée* δ, on rabattrait comme précédemment la droite proposée sur le plan horizontal, en faisant AA″ = RA′, et tirant A″B. Ensuite, on prendrait sur cette dernière ligne un intervalle A″M″ égal à δ : puis, en relevant la droite rabattue A″B, le point M″ se ramènerait en M par une perpendiculaire sur la charnière AB; et enfin, de la projection horizontale M, on conclurait (n° **10**) l'autre projection M′, ce qui déterminerait complétement le point demandé.

On aurait pu aussi résoudre cette question en opérant d'une manière analogue sur le rabattement (AP, A′P′), avec le soin de chercher ce que devenait la trace horizontale (B, B′) après la rotation imprimée à la droite primitive.

21. (*Fig.* 5.) *Par un point donné* (D, D′) *mener une droite qui soit parallèle à une droite connue* (AB, A′B′).

Lorsque deux droites sont parallèles, les plans qui les projettent sont évidemment parallèles entre eux; et, par conséquent, les intersections de ceux-ci avec le plan de projection, c'est-à-dire les projections des droites, sont nécessairement parallèles l'une à l'autre. Réciproquement, lorsque les projections horizontales de deux droites sont parallèles, et qu'il en est de même de leurs projections verticales, les quatre plans projetants sont parallèles deux à deux; d'où il suit que leurs intersections mutuelles, c'est-à-dire les droites dans l'espace, sont parallèles entre elles. D'après cela, si par le point D on mène une parallèle DE à AB, et par le point D′ une parallèle D′E′ à A′B′, la droite demandée aura pour projection DE et D′E′;

elle sera donc ainsi complétement déterminée, et d'ailleurs les traces de cette droite, qui seront en F et en E', se construiront comme on l'a dit au nº **13**.

21. (*Fig.* 6.) *Construire le plan qui passerait par trois points donnés* (A, A'), (B, B') *et* (C, C').

Observons d'abord que pour déterminer graphiquement la position d'un plan, il suffit d'assigner ses *deux traces*, c'est-à-dire les intersections de ce plan avec les plans de projection. Ces deux traces devront toujours couper la ligne de terre au même point; mais l'angle qu'elles comprendront entre elles sur les plans de projection rabattus, ne sera pas égal à celui qu'elles forment dans l'espèce. En outre, il est bien évident que, quand une droite est située dans un plan, les traces de cette droite (nº **13**) doivent être situées quelque part sur les traces du plan.

Cela posé, joignons les points donnés deux à deux par des droites (AB, A'B'), (BC, B'C'), (AC, A'C'), lesquelles ayant chacune deux points dans le plan cherché, y seront contenues tout entières; puis construisons, comme au nº **13**, les traces verticales E', F' et G' de ces droites. Alors ces trois points, qui doivent évidemment appartenir à l'intersection du plan inconnu avec le plan vertical de projection, se trouveront nécessairement en ligne droite, et seront plus que suffisants pour déterminer *la trace verticale* E'F'G' du plan demandé. De même, *la trace horizontale* DHK de ce plan s'obtiendra en construisant les traces horizontales D, H et K des trois droites auxiliaires; d'ailleurs les deux lignes E'G' et DH ainsi obtenues, devront aller rencontrer la ligne de terre XY en un même point Q, ce qui offrira une nouvelle vérification des constructions antérieures.

Si l'on voulait *faire passer un plan par une droite et un point donnés*, on joindrait ce point avec un de ceux de la droite, ou bien on mènerait une parallèle à celle-ci par le point donné; alors on connaîtrait ainsi deux droites situées dans le plan cherché, et leurs traces suffiraient pour déterminer celles de ce plan.

23. (*Fig.* 7.) *Par un point donné* (A, A') *mener un plan qui soit parallèle à un autre plan dont la trace horizontale est* ST *et la trace verticale* TV'.

Il est évident que deux plans parallèles doivent avoir leurs traces respectivement parallèles; ainsi il suffira de trouver un point de chacune des traces du plan demandé. Pour cela, imaginons par le point donné (A, A') *une droite auxiliaire* qui soit située dans le plan inconnu; le choix le plus simple sera de mener cette droite *parallèlement à la trace horizontale* de ce même plan, c'est-à-dire parallèlement à ST. Si donc on tire dans cette direction la ligne AB, et qu'on mène A'B' parallèle à la ligne de terre, ce seront là évidemment les deux projections de la droite auxiliaire renfermée dans le plan inconnu. Cela posé, en construisant (nº **13**) le point B' où elle va percer le plan vertical, ce point appartiendra nécessairement à la trace du plan cherché, laquelle sera par conséquent la droite B'Q parallèle à V'T; l'autre trace devant passer par le point Q, sera la ligne PQ parallèle à TS.

On peut aussi, comme vérification, construire directement un point de la trace horizontale du plan inconnu. Pour cela, on imaginera par le point (A, A') une droite auxiliaire qui soit *parallèle à la trace verticale* de ce plan; et elle aura évi-

demment pour projections AC parallèle à la ligne de terre, et A'C' parallèle à V'T. Si donc on cherche (nº **13**) le point C où cette auxiliaire va percer le plan horizontal, ce point appartiendra nécessairement à la trace du plan demandé; ainsi il faudra que la droite PQ, déjà construite, passe par le point C.

24. Observons que, dans l'épure actuelle, on n'a pas regardé les deux plans STV' et PQR' comme existant réellement; car alors le premier aurait rendu l'autre invisible, et il eût fallu (nº **15**, 1º) *ponctuer* en totalité les traces de ce dernier, ce qui aurait multiplié beaucoup les points ronds, et surtout aurait eu le grave inconvénient de ne plus laisser discerner les parties des traces situées en deçà des plans de projection d'avec celles qui sont au delà. C'est pourquoi l'on suppose ici qu'il s'agissait de *trouver seulement les traces* d'un plan parallèle à celui qui aurait lui-même pour traces ST et TV', sans construire effectivement aucun de ces deux plans. Cette restriction, dont le but est de répandre plus de clarté dans les dessins, a été aussi admise dans les épures 8, 9 et 16.

25. (*Fig.* 6.) Les considérations employées dans les nºs **22** et **23** peuvent servir à résoudre la question suivante : *Étant donnée la projection horizontale* AB *d'une droite que l'on sait être située dans le plan connu* PQR', *trouver l'autre projection.* La droite inconnue percera le plan vertical en un point qui doit être projeté horizontalement en E (nº **13**); d'ailleurs cette trace ne pouvant être hors de la trace verticale QR' du plan qui renferme cette droite, sera nécessairement située en E', et c'est là un des points de la projection demandée. Ensuite, par des motifs semblables, on voit que la droite en question va percer le plan horizontal en D; donc, si l'on projette D en D' sur la ligne de terre XY, D'E' sera la projection verticale de la droite proposée. On sent bien qu'il serait aussi aisé de trouver la projection DE, en se donnant seulement la projection verticale D'E' avec le plan PQR' qui renferme la droite.

Si la projection AB assignée sur le plan horizontal se trouvait, comme dans la *fig.* 7, parallèle à la trace PQ du plan donné, on obtiendrait d'abord, comme ci-dessus, la trace verticale B' de la droite inconnue; mais ensuite la trace horizontale de cette droite n'existant plus, puisque AB ne rencontre pas PQ, il en faudrait conclure que la ligne demandée est parallèle au plan horizontal, et qu'ainsi sa projection verticale est la droite B'A' parallèle à la ligne de terre XY.

On verra de même que si la projection horizontale donnée est la ligne AC parallèle à XY, la droite dans l'espace est parallèle au plan vertical, et que sa projection sur ce dernier plan est la ligne C'A' parallèle à la trace QR'.

26. (*Fig.* 6.) Voici encore une question analogue : *Connaissant la projection horizontale* A *d'un point que l'on sait être situé sur un plan donné* PQR', *trouver l'autre projection.* On mènera par le point donné A une droite quelconque DAE, que l'on regardera comme la projection horizontale d'une ligne située dans le plan PQR'; il sera facile de construire, comme ci-dessus, la projection verticale D'E' de cette droite, et alors il n'y aura plus qu'à ramener le point A en A' sur cette projection,

Fernando Reales – 4ª Compª
1889

au moyen d'une perpendiculaire à la ligne de terre (nº **10**). On trouverait aussi aisément la projection A, si l'on avait donné A'.

Parmi les diverses directions que l'on peut donner à cette droite auxiliaire DAE, la plus commode ordinairement est une parallèle à la trace horizontale PQ, comme la ligne AB dans la *fig.* 7.

27. *Trouver l'intersection de deux plans qui auraient pour traces, l'un* PQ *et* QR', *l'autre* ST *et* TV'.

(*Fig.* 8.) Si l'on prolonge les deux traces horizontales jusqu'à ce qu'elles se coupent en B, ce point, évidemment commun aux deux plans, appartiendra à leur intersection; et, puisqu'il est dans le plan horizontal, ce sera sur la trace horizontale de la droite cherchée. De même, le point A' où se couperont les traces verticales des plans donnés, sera la trace verticale de cette droite. Connaissant ainsi les deux traces de la commune section, on en déduira immédiatement (nº **14**) les projections qui seront AB et A'B'.

28. Si deux des traces se trouvaient parallèles, comme il arrive pour les plans R'Qp et V'TS, le point B s'éloignerait indéfiniment, et, par suite, l'intersection des deux plans deviendrait une *horizontale* ayant pour projections A'b' parallèle à la ligne de terre, et Ab parallèle à TS : résultat qui était facile à prévoir, puisque alors les plans donnés passeraient par deux droites parallèles Qp et TS, et qu'ainsi ils devraient se couper suivant une droite parallèle à celles-là.

29. (*Fig.* 9.) Lorsque les traces seront respectivement parallèles sur les deux plans de projection à la fois, les plans donnés seront évidemment parallèles entre eux, et il n'y aura plus d'intersection; à moins que ces traces ne soient en même temps parallèles à la ligne de terre, comme PQ et P'Q' pour l'un des plans, TS et T'S' pour l'autre : car deux plans ainsi placés peuvent encore se couper suivant une droite parallèle à XY, mais la méthode précédente ne suffit plus pour obtenir cette intersection.

Dans ce cas, menons à volonté un plan sécant auxiliaire $\alpha\delta\gamma'$. Il coupera le plan [PQ, P'Q'] suivant la droite (CD, C'D'), qui se construit par la méthode générale, et le plan [TS, T'S'] suivant la droite (EF, E'F'); alors ces deux lignes fourniront, par leur rencontre, un point (M, M') qui sera évidemment commun aux deux plans [PQ, P'Q'], [TS, T'S']; et, par conséquent, ceux-ci auront pour intersection la droite (AMB, A'M'B') menée parallèlement à XY.

On pourrait encore employer ici un *plan de profil* mené perpendiculairement à XY (*fig.* 9); ce plan couperait les plans de projection primitifs suivant les deux droites XV et XZ, dont la dernière prendra évidemment la position XZ'', lorsque l'on rabattra le profil sur le plan horizontal, autour de VX comme charnière. Cela posé, le plan de profil rencontrait les traces verticales des plans proposés aux points P' et T' qui deviennent en rabattement P'' et T''; donc PP'' et TT'' sont les traces de ces plans sur le profil rabattu suivant Z''XV; et comme ces traces se coupent en A'', c'est là un point de l'intersection demandée. Si donc on projette horizontalement ce point A'' en A, on en conclura que l'intersection cherchée a pour projection horizontale la droite AB parallèle à XY. D'ailleurs, si l'on relève le profil, le point A'' se projettera verticalement en A'; et A'B' parallèle à XY sera la seconde projection de l'intersection des plans proposés.

Si les traces de ces plans, sans être parallèles entre elles, passaient toutes quatre par le même point de la ligne de terre, il faudrait encore recourir à l'un des plans auxiliaires que nous venons d'employer; et nous engageons le lecteur à construire l'épure relative à ce cas particulier.

30. (*Fig.* 10.) *Construire le point d'intersection d'une droite* (AB, A'B') *avec un plan donné* PQR'.

Pour y parvenir, il faut mener par la droite donnée, et dans une direction quelconque, un plan sécant; construire l'intersection de celui-ci avec le plan PQR'; et comme cette ligne passera nécessairement par le point cherché, ce point sera déterminé par la rencontre de cette intersection avec la droite donnée.

Adoptons d'abord pour plan sécant le plan vertical qui projette la droite donnée suivant AB : cette dernière ligne sera elle-même la trace horizontale de ce plan, et sa trace verticale sera la droite CC' perpendiculaire sur la ligne de terre. Cela posé, le plan ACC' coupe le plan donné PQR' suivant une droite qui est projetée (nº **27**) sur C'D' et CD; et comme cette intersection rencontre la droite donnée (A'B', AB) au point M', c'est là la projection verticale du point demandé. La seconde projection de ce point n'est pas fournie immédiatement, parce qu'ici les deux droites que nous combinons sont projetées l'une et l'autre suivant ADBC; mais on la déduira de M' en abaissant (nº **10**) la perpendiculaire M'M sur la ligne de terre. Ainsi le point (M, M') est celui où la droite (AB, AB') perce le plan PQR'.

On peut aussi employer pour plan sécant le plan projetant de la droite sur le plan vertical, lequel aura pour traces A'B' et B'F perpendiculaire à XY. Ce plan auxiliaire A'B'F coupera PQR' suivant la droite (FG, B'G'), qui, par sa rencontre avec AB, devra donner le même point M déjà obtenu par la première construction; ainsi les deux procédés employés simultanément se serviront de vérification.

Observons ici que le plan donné PQR' est une grandeur *principale* (nº **15**) qui existe réellement, et qui rend invisible la portion de la droite (AB, A'B') située au-dessous du point de section; c'est pourquoi la partie (MB, M'B') a été *ponctuée*. Quant au prolongement BC, il n'est regardé que comme une *ligne auxiliaire* relative au plan sécant qui sert de moyen de solution.

31. Quoique les deux procédés employés nº **30** soient les plus commodes, il sera bon, pour nous exercer à la combinaison des plans avec les droites, de résoudre encore le même problème en nous servant d'un plan sécant quelconque : toutefois, comme ce plan devra renfermer la droite donnée (AB, A'B') dont les traces sont B et C' (*fig.* 11), il faudra faire passer par ces points les traces du plan sécant que nous adopterons. Menons donc par le point B la droite arbitraire SBT, et par les points T et C' la droite C'TV'; ce seront là les traces d'un plan auxiliaire qui contiendra la ligne (AB, A'B'). Cela posé, les plans STV' et PQR' se coupent (nº **27**) suivant la ligne (SV, S'V'); et comme celle-ci rencontre (AB, A'B') en (M, M'), ce point est celui où la droite donnée perce le plan PQR' : mais il faudra s'assurer, pour vérifier les constructions, que la droite MM' qui réunit ces deux projections est exactement perpendiculaire (nº **10**) sur la ligne de terre.

32. *Par un point donné conduire une droite qui rencontre deux droites données de position.*

Nous indiquerons seulement la solution de ce problème, que nous proposons ici au lecteur comme un exercice propre à le familiariser avec les méthodes précédentes. Par le point donné a et la première droite d_1, on conduira un premier plan; puis un second par le même point a et la seconde droite d_2; alors, en cherchant l'intersection de ces deux plans, on obtiendra une droite qui satisfera évidemment aux conditions énoncées.

On peut aussi n'employer que le premier des plans dont nous venons de parler, puis chercher (nº **30**) le point où il coupe la seconde droite; alors, en joignant ce dernier point avec le point donné, on obtiendra une droite qui résoudra le problème.

Il n'y aura en général qu'une solution, à moins que les deux droites proposées ne se trouvent dans un même plan avec le point donné. Si ces deux droites se coupaient ou étaient parallèles, il serait bien facile d'assigner d'avance le résultat des opérations.

33. THÉORÈME. *Lorsqu'une droite* (AB, A'B') (*fig.* 12) *est perpendiculaire à un plan* PQR', *les projections de cette ligne sont respectivement perpendiculaires sur les traces du plan.*

En effet, le plan qui projette la droite suivant AB est, par sa définition, perpendiculaire au plan horizontal : il l'est aussi au plan donné PQR', puisqu'il passe par une droite qui est supposée perpendiculaire à ce dernier; donc ce plan projetant est perpendiculaire à la fois sur les deux autres, et par suite à leur intersection qui est la trace horizontale PQ; par conséquent, cette trace sera elle-même perpendiculaire sur la projection AB, qui se trouve dans le plan projetant. On démontrerait, d'une manière toute semblable, que la trace verticale R'Q est perpendiculaire sur la projection A'B'.

Réciproquement, *si les* DEUX *projections* AB *et* A'B' *d'une droite sont respectivement perpendiculaires aux traces* QP *et* QR' *d'un plan, ce plan et la droite sont perpendiculaires l'un sur l'autre.* En effet, le plan projetant qui a pour trace AB est évidemment perpendiculaire sur la droite PQ, et par suite au plan PQR' qui contient cette ligne : de même, le plan projetant qui a pour trace A'B' est perpendiculaire à la droite QR', et par suite au plan PQR'. Donc ce dernier se trouve perpendiculaire à la fois sur les deux plans projetants; et dès lors il sera aussi perpendiculaire sur leur intersection qui n'est autre chose que la droite donnée dans l'espace.

34. Observons toutefois que ce théorème ne serait plus vrai, s'il s'agissait de projections *obliques* (nº **8**); et d'ailleurs il faut se garder de croire qu'une relation semblable existe entre deux droites qui sont perpendiculaires entre elles; car leurs projections orthogonales, sur un même plan, ne formeront pas un angle droit, à

moins que l'une des lignes proposées ne se trouve *parallèle* au plan de projection.

35. (*Fig.* 12.) *Trouver la plus courte distance d'un point* (A, A') *à un plan donné* PQR'.

On abaissera d'abord du point (A, A') une perpendiculaire indéfinie sur le plan, en menant (nº **33**) les projections AB et A'B' respectivement perpendiculaires sur les traces PQ et QR'; puis on cherchera le point (M, M') où cette droite rencontre le plan, ce qui s'exécutera comme au nº **30**, dont tous les raisonnements s'appliquent à la figure actuelle où nous avons d'ailleurs conservé les mêmes notations. Alors AM et A'M' seront évidemment les projections de la plus courte distance demandée; et la grandeur absolue de cette distance s'obtiendra (nº **17**) en menant l'horizontale HM'M'' égale à AM, et tirant la droite A'M'' qui sera la vraie distance du point au plan.

36. (*Fig.* 13.) *Trouver la plus courte distance d'un point* (C, C') *à une droite donnée* (AB, A'B').

Menons d'abord *par le point* (C, C') *un plan perpendiculaire à la droite proposée;* ses traces seront perpendiculaires (nº **33**) aux projections AB et A'B'; et, pour déterminer un de leurs points, j'imaginerai dans ce plan *une horizontale* partant de (C, C'). Cette droite, qui sera nécessairement parallèle à la trace horizontale cherchée, aura pour projections CD perpendiculaire à AB, et C'D' parallèle à XY; ainsi, elle ira percer le plan vertical en (D, D') : si donc je mène D'Q perpendiculaire sur A'B', et QP perpendiculaire sur AB, ce seront les traces du plan cherché PQD'. Cela posé, en construisant (nº **30**) le point (M, M') où ce plan rencontre la droite (AB, A'B'), et en le joignant avec (C, C'), la ligne (CM, C'M') sera évidemment contenue dans le plan D'QP, et dès lors elle se trouvera perpendiculaire sur (AB, A'B'); par conséquent cette droite (CM, C'M') mesurera la plus courte distance demandée, dont la grandeur absolue C'M'' se déduira des projections CM et C'M' par la règle générale exposée nº **17**.

Dans cette épure, le plan D'QP n'est ni une donnée, ni un résultat du problème primitif; c'est seulement un moyen de parvenir à la solution cherchée, et par conséquent on devra marquer ses traces comme des lignes *auxiliaires* (nº **15**). La même remarque s'applique à la *fig.* 14, dont nous allons donner l'explication.

37. (*Fig.* 14.) *Autre solution.* Faisons passer un plan par le point (C, C') et par la droite donnée (AB, A'B'); il suffira de joindre (C, C') avec (A, A'), et de chercher les traces verticales des deux droites (AB, A'B') et (AC, A'C') : alors B'D'Q et QA seront les traces du plan auxiliaire dont nous venons de parler. Cela posé, rabattons ce plan B'QA autour de sa trace horizontale AQ, et supposons qu'il entraîne avec lui la droite et le point donnés. Dans ce mouvement de révolution, le point (B, B') ne sortira pas du plan vertical BF perpendiculaire à la charnière AQ; d'ailleurs la distance B'Q de ce point au point fixe Q restera invariable; par conséquent, si l'on décrit avec le rayon QB' un arc de cercle qui coupe BF en B'', ce point sera le rabattement de (B, B'), et la droite proposée ainsi que la trace QB' se trouveront rabattues suivant AB'' et QB''. De même, en tirant les perpendicu-