

laires  $DD''$  et  $CC''$  sur la charnière  $AQ$ , on verra bien que la ligne  $(ACD, A'C'D')$  se rabat suivant  $AD''$ , et que le point  $C$  se transporte en  $C''$ . Alors, dans le plan horizontal où toutes les données sont maintenant rabattues, sans que leurs positions respectives aient changé, nous pourrions abaisser sur  $AB''$  la perpendiculaire  $C''M''$ , et ce sera la plus courte distance cherchée dans sa véritable grandeur. Ce résultat est ordinairement le seul qui intéresse; cependant, si l'on veut aussi fixer la position de la plus courte distance, il n'y a qu'à relever tout le système : le point  $M''$  se ramènera en  $M$  par une perpendiculaire sur la charnière  $AQ$ , et la projection verticale  $M'$  s'en déduira (n° 10); de sorte qu'enfin la distance en question sera projetée sur  $CM$  et  $C'M'$ .

38. Ce mode de solution serait indispensable, si l'on avait voulu trouver sur la droite  $(AB, A'B')$  un point qui fût distant de  $(C, C')$  d'une quantité donnée  $\delta$ . Car, après avoir rabattu comme ci-dessus la droite et le point donnés suivant  $AB''$  et  $C''$ , on décrirait avec un rayon  $C''N'' = \delta$  un arc de cercle qui couperait  $AB''$  en  $N''$ , et ce serait là le point demandé en rabattement : puis, en relevant tout le système autour de la charnière  $AQ$ , le point  $N''$  se ramènerait en  $N$ , et aurait pour ses deux projections  $N$  et  $N'$ . On sent bien qu'il y aura généralement une seconde solution, puisque l'arc décrit avec le rayon  $\delta$  coupera ordinairement la droite  $AB''$  en deux points  $N''$  et  $n''$ .

Par des moyens semblables, on pourrait trouver le centre et le rayon d'un cercle passant par trois points donnés dans l'espace. Il faudrait construire (n° 22) les traces du plan déterminé par ces trois points, et puis rabattre ce plan autour de sa trace horizontale, comme dans la fig. 14, en cherchant d'ailleurs les positions que prennent, après ce rabattement, les trois points primitifs, ainsi que nous l'avons fait dans cette figure pour le point  $(C, C')$ .

39. (Fig. 18.) Trouver l'angle de deux droites données  $(AB, A'B')$  et  $(BC, b'c')$ .

On entend par l'angle de deux droites, qui souvent ne se rencontrent pas, l'angle que comprendraient entre elles deux droites respectivement parallèles aux premières, et qui seraient menées par un même point de l'espace. Commençons donc par examiner si les lignes proposées se coupent réellement. Or, si elles ont un point commun, on voit bien qu'il devra être projeté horizontalement en  $B$ , et verticalement en  $b'$ ; mais, pour que ces points-là fussent les projections d'un même point de l'espace, il faudrait (n° 10) que la droite  $Bb'$  se trouvât perpendiculaire à la ligne de terre, condition qui n'est pas remplie ici; par conséquent, les droites proposées ne se coupent pas. Alors, nous allons mener une parallèle à la droite  $(BC, b'c')$  par un point quelconque de l'autre droite; et pour simplifier, nous choisirons le point qui est projeté en  $B$  et  $B'$ . Cette parallèle aura ainsi pour projection horizontale la droite  $BC$  déjà donnée, et pour projection verticale la droite  $B'C'$  parallèle à  $b'c'$ ; de sorte que le problème sera réduit à trouver l'angle formé par les deux droites  $(AB, A'B')$  et  $(BC, B'C')$  que nous regarderons comme les données immédiates de la question.

En construisant les traces horizontales  $A$  et  $C$  de ces droites, la ligne  $AC$  sera la

base d'un triangle ayant pour sommet le point  $(B, B')$ , où se coupent les droites proposées, et dont l'angle situé à ce sommet sera celui que l'on cherche. Dès lors on pourrait construire ce triangle en cherchant les longueurs de ses trois côtés, qui sont connus par leurs projections; mais il vaut mieux employer la hauteur de ce triangle. Or cette hauteur est évidemment l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui aurait pour base la perpendiculaire  $BH$  abaissée sur  $AC$ , et pour hauteur la verticale qui projette le sommet en  $B$ , laquelle est égale à  $B'K$ ; conséquemment, si l'on prend  $KH'' = BH$ , et que l'on tire  $B'H''$ , cette ligne sera la hauteur du triangle primitif. Maintenant, si l'on rabat sur le plan horizontal, autour de sa base  $AC$ , le sommet ne sortira pas du plan vertical  $HB$  perpendiculaire à cette base; donc, en portant la hauteur  $B'H''$  de  $H$  en  $B''$ , le triangle cherché se trouvera rabattu suivant  $AB''C$ , et l'angle de même nom sera celui que formaient dans l'espace les deux droites  $(AB, A'B')$  et  $(BC, B'C')$ .

40. Lorsqu'une de ces droites, par exemple la seconde, sera parallèle au plan horizontal, le triangle dont nous nous sommes servis n'existera plus; mais la trace horizontale du plan des deux droites proposées, qui était  $AC$  dans le cas général, deviendra une parallèle à  $BC$  menée par le point  $A$ ; de sorte qu'en rabattant, comme ci-dessus, ce plan autour de sa trace horizontale, on obtiendra encore l'angle demandé.

Nous ne parlerons pas du cas où les droites seraient toutes deux parallèles au plan horizontal, puisque alors l'angle qu'elles formeraient dans l'espace, serait égal à celui que comprendraient leurs projections.

41. Si l'on proposait de diviser en deux parties égales l'angle de deux droites qui se coupent, on opérerait cette division après avoir rabattu cet angle sur le plan horizontal, comme ci-dessus; puis, on relèverait l'angle  $AB''C$  et la droite bissectrice, en observant que le point où cette dernière ligne va couper la trace horizontale  $AC$  du plan des droites données, demeure immobile pendant ce mouvement de rotation. De même, étant donnée une droite située dans un plan connu, on pourra tracer dans ce plan une seconde droite qui fasse avec la première un angle donné. Nous conseillons au lecteur de s'exercer sur les opérations indiquées aux n°s 40 et 41.

42. (Fig. 19.) Trouver l'angle formé par une droite  $(AB, A'B')$  avec un plan  $PQR$ .

L'angle d'une droite avec un plan serait une grandeur indéterminée, si l'on ne convenait pas d'entendre par là l'angle que forme la droite proposée avec sa projection orthogonale sur le plan; et ce choix est fondé sur ce que ce dernier angle est évidemment le plus petit de tous ceux que fait la droite avec les diverses lignes tracées par son pied dans le plan dont il s'agit. Il suit de là que, si l'on abaisse d'un point de cette droite une perpendiculaire sur le plan proposé, l'angle compris entre cette perpendiculaire et la droite primitive se trouvera le complément de celui qu'on veut obtenir, et suffira pour en déduire ce dernier.

Menons donc par le point  $(B, B')$ , choisi arbitrairement sur la droite donnée, une perpendiculaire  $BC, B'C'$  au plan  $PQR$ ; puis, construisons l'angle formé par les deux droites  $(AB, A'B')$  et  $(BC, B'C')$ . En appliquant ici la méthode du n° 39, on

verra qu'il faut abaisser la perpendiculaire BH sur AC, prendre  $KH'' = BH$ , et porter l'hypoténuse  $B'H''$  de H en  $B''$ ; alors  $AB''C$  sera l'angle des deux droites. Ensuite on construira son complément en traçant la droite  $B''D$  perpendiculaire sur  $CB''$ ; et enfin  $AB''D$  sera l'angle formé par la droite  $(AB, A'B')$  avec le plan  $PQR'$ .

43. (Fig. 15 bis.) Trouver les angles que forme une droite avec les deux plans de projection.

Ce problème pourrait être traité comme un cas particulier du précédent; mais il sera plus court de le résoudre directement, en observant que, d'après ce que nous avons dit au n° 42, l'angle de la droite  $(CD, C'D')$  avec le plan horizontal n'est autre chose que l'angle compris entre cette droite et sa projection CD. Or il est évident que ce dernier angle appartient au triangle rectangle qui aurait pour base CD, et pour hauteur  $CC'$ ; si donc on rabat ce triangle sur le plan vertical, suivant  $CM'C'$ , l'angle de même nom sera celui qu'on demandait.

Semblablement, l'angle de la droite  $(CD, C'D')$  avec le plan vertical fait partie d'un triangle rectangle qui aurait pour côtés  $DD'$  et  $D'C'$ ; si donc on rabat ce triangle sur le plan horizontal, suivant  $D'ND$ , l'angle de même nom sera l'angle de la droite avec le plan vertical de projection.

44. Par un point donné p mener une droite qui fasse l'angle  $\alpha$  avec le plan horizontal, et l'angle  $\epsilon$  avec le plan vertical.

(Fig. 15 bis.) Prenons d'abord un point arbitraire  $(C, C')$  dans le plan vertical, et traçons-y la droite  $C'M'$  qui fasse avec la ligne de terre un angle égal à  $\alpha$ ; puis, faisons tourner cette droite autour de la verticale  $C'C$ , de sorte que son pied décrive un cercle  $M'M$  du rayon  $CM$ . Dans toutes ces positions, la droite mobile formera toujours l'angle  $\alpha$  avec le plan horizontal; mais il reste à choisir celle où elle aura en même temps l'inclinaison  $\epsilon$  sur le plan vertical. Or, si, après avoir construit l'angle  $M'C'd$  égal à  $\epsilon$ , nous abaissons sur la droite indéfinie  $C'd$  la perpendiculaire  $M'd$ , le triangle rectangle  $M'C'd$  représentera évidemment celui qui doit être formé par la droite inconnue avec sa projection verticale. Donc, en décrivant l'arc de cercle  $dD'$  avec le rayon  $C'd$ , et en élevant sur la ligne de terre la perpendiculaire  $D'D$  jusqu'à sa rencontre avec le cercle  $M'M$ , on déterminera les projections  $C'D'$  et  $CD$  d'une droite qui aura bien les inclinaisons  $\alpha$  et  $\epsilon$  sur les deux plans de projection.

Ensuite, il n'y aura plus qu'à conduire, par le point  $p$  donné primitivement dans l'espace, une droite qui soit parallèle à  $(CD, C'D')$ .

45. (Fig. 15.) Trouver les angles que forme un plan donné  $PQR'$  avec les deux plans de projection.

On sait que, pour mesurer l'inclinaison de deux plans, il suffit de les couper par un troisième plan qui soit perpendiculaire à leur intersection, et que les deux droites tracées par ce plan sécant forment entre elles un angle qui exprime l'inclinaison cherchée. D'après cela, coupons le plan  $PQR'$  et le plan horizontal par un plan qui soit perpendiculaire à la trace  $PQ$ . Ce plan sécant, qui sera vertical, aura pour traces une ligne  $AD$  perpendiculaire à  $PQ$ , et la verticale  $DD'$ : par conséquent

il coupera le plan donné suivant une droite qui, dans l'espace, réunirait le point A avec  $D'$ , et serait l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés  $AD$  et  $DD'$ . Si donc on fait tourner ce triangle autour de  $DD'$  pour le rabattre sur le plan vertical, il deviendra  $D'A''D$ ; et l'angle de même nom mesurera l'inclinaison du plan  $PQR'$  sur le plan horizontal.

Pour obtenir l'angle du plan  $PQR'$  avec le plan vertical, on les coupera par un plan quelconque  $CDB'$  perpendiculaire à la trace verticale  $QR'$ , et cela fournira un triangle rectangle ayant pour côtés  $CD$  et  $DB'$ ; par conséquent ce triangle, après avoir été rabattu autour de  $CD$ , deviendra  $DB''C$  dans lequel l'angle  $B''$  exprimera l'inclinaison demandée (\*).

46. Par un point donné, mener un plan qui fasse un angle  $\alpha$  avec le plan horizontal, et un angle  $\epsilon$  avec le plan vertical.

Observons d'abord que, dans le problème précédent, les deux plans sécants  $D'DA$  et  $B'DC$  (fig. 15) devaient se couper eux-mêmes suivant une droite perpendiculaire au plan  $PQR'$ , et qui mesurait la plus courte distance de ce plan au point D de la ligne de terre. D'ailleurs, comme cette perpendiculaire, rabattue tour à tour avec les deux triangles, se trouve évidemment représentée par les droites  $DF$  et  $Df$  menées à angle droit sur les hypoténuses, il s'ensuit que, quel que soit le plan  $PQR'$ , on doit avoir la relation  $DF = Df$ . Cela posé, si sans connaître le plan  $PQR'$  que nous supposons avoir sur les plans fixes les inclinaisons  $\alpha$  et  $\epsilon$ , on construit à volonté sur la ligne de terre un triangle rectangle  $D'DA''$  dans lequel l'angle  $A''$  soit égal à  $\alpha$ ; puis, qu'avec la perpendiculaire  $DF$  on décrive un arc de cercle, et qu'on lui mène une tangente  $B''fC$  qui fasse l'angle  $B''$  égal à  $\epsilon$ ; cette tangente (\*\*), déterminera, par sa rencontre avec le prolongement de la verticale  $D'D$ , un point C de la trace du plan  $PQR'$ . Alors, en tirant la droite  $CQ$  tangente à l'arc de cercle décrit avec le rayon  $DA''$ , puis joignant les points Q et  $D'$ , on obtiendra les traces d'un plan  $CQD'$  qui aura sur les plans fixes les inclinaisons  $\alpha$  et  $\epsilon$ ; ensuite, pour résoudre le problème primitif, il restera à conduire par le point donné un plan parallèle à  $CQD'$ .

On pourrait aussi résoudre ce problème en menant d'abord, comme au n° 44, une droite qui fit avec les plans de projection des angles

$$\alpha' = 90^\circ - \alpha, \quad \epsilon' = 90^\circ - \epsilon;$$

(\*) Dans certains arts, on définit souvent un plan par sa trace horizontale  $PQ$  et par son inclinaison  $\alpha$  sur le plan horizontal. Avec ces données, il est toujours facile de trouver sa trace verticale au moyen du plan de profil  $AD$  perpendiculaire à  $PQ$ , et qui contient l'angle  $\alpha$ ; car, en rabattant  $DA$  suivant  $DA''$  et formant l'angle  $DA''D' = \alpha$ , le côté  $A''D'$  prolongé ira couper la verticale  $DD'$  au point  $D'$  par lequel on doit mener la trace  $QD'R'$ . Quelquefois même on évite d'employer le plan vertical de projection, et l'on rabat le profil autour de  $AD$  en formant l'angle  $DA\delta = \alpha$ , ce qui représente d'une manière suffisamment claire la position du plan proposé, et permet d'en déduire les conséquences dont on a besoin. Au fond, le plan du profil  $DA\delta$  tient lieu du plan vertical de projection.

(\*\*) Comme il est évident que l'angle  $CDf = B'' = \epsilon$ , on pourra, au lieu de mener cette tangente, construire le triangle rectangle  $CDf$  sur la base  $DF$ ; puis, rapporter son hypoténuse de  $D$  en  $C$  sur le prolongement de la verticale  $D'D$ .

et ensuite, on conduirait par le point donné un plan perpendiculaire à cette droite.

47. (Fig. 16.) Construire l'angle compris entre deux plans donnés PQR' et PSR'.

Il faut, comme nous l'avons dit précédemment, couper ces deux plans par un troisième qui soit perpendiculaire à leur intersection. Or cette droite, projetée (n° 27) suivant PR et P'R', est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés PR et RR', et qui, rabattu sur le plan horizontal, deviendra PRR". Si donc, par un point arbitraire A" de cette hypoténuse, je lui mène une perpendiculaire A"B, et qu'ensuite je relève le triangle R"RP dans la situation verticale PR, il est évident qu'alors la ligne A"B se trouvera dans le plan sécant que je dois mener perpendiculairement à l'intersection par ce point A"; puis, comme A"B ira percer le plan horizontal en B, la droite CBD, perpendiculaire à la projection PR, sera (n° 53) la trace horizontale de ce plan sécant. Maintenant, on doit voir que ce dernier plan coupera les plans proposés suivant deux droites partant du point A" relevé, et qui, aboutissant en C et D, formeront un triangle dont la base sera CD, et dont l'angle au sommet A" sera celui que l'on cherche; ainsi il ne s'agit plus que de construire ce triangle. Or sa hauteur est précisément A"B, puisque cette droite relevée se trouve dans le plan vertical PR qui est perpendiculaire sur la base CD; d'ailleurs, si l'on rabat ce triangle autour de CD comme charnière, le sommet A" ne sortira pas du plan vertical PR perpendiculaire à cette charnière: donc, en portant sur PR la distance BA = BA", on obtiendra CAD pour le triangle demandé, et l'angle de même nom mesurera l'inclinaison des plans PQR' et PSR'.

On aurait pu rabattre sur le plan vertical l'intersection des plans proposés; cette droite eût été représentée par R'P", et en lui menant une perpendiculaire A'B', dont le pied B' devrait être rapporté en B, on en aurait fait le même usage que ci-dessus.

48. Lorsque les plans proposés ont leurs traces parallèles sur un seul des deux plans de projection, comme R'QP et R'ST (fig. 17), la construction précédente exige une légère modification qui rend même la solution plus simple; car on sait (n° 28) qu'alors l'intersection est la droite horizontale (R'V', RV) parallèle aux traces horizontales. Par conséquent, si l'on mène un plan vertical R'RC perpendiculaire à cette intersection, il coupera les plans proposés suivant deux droites qui formeront avec CD un triangle ayant pour sommet le point R', et pour hauteur la verticale R'R: de sorte qu'en rabattant ce triangle sur le plan horizontal autour de sa base CD, le sommet R' viendra en R", et l'angle CR"D sera la mesure de l'inclinaison des plans proposés.

Enfin, si les traces étaient toutes parallèles à la ligne de terre, comme dans la fig. 9, on couperait les plans donnés par le plan de profil ZXV déjà employé au n° 29; et par le rabattement dont nous nous sommes servis dans ce numéro, on obtiendrait l'angle PA'T pour l'inclinaison des plans en question.

En renversant les opérations du n° 47, il sera facile de résoudre le problème suivant: Par une droite donnée dans un plan connu par ses traces, conduire un autre plan qui fasse avec le premier un angle déterminé  $\omega$ .

49. Construire la position et la grandeur de la ligne qui mesure la plus courte distance entre deux droites non situées dans le même plan.

On sait que, dans l'espace, deux droites peuvent ne pas se rencontrer, sans être parallèles; alors il y a lieu de chercher, parmi toutes les lignes qui réunissent deux quelconques de leurs points, quelle est la plus courte; mais, afin de faire mieux saisir la série d'opérations à effectuer pour résoudre ce problème, nous allons d'abord les indiquer sur une figure en perspective, où AB et CD (fig. 20) représenteront les deux droites proposées. Si, par un point quelconque B de la première, nous menons une droite BE parallèle à CD, et que nous imaginions le plan ABE, ce plan se trouvera lui-même parallèle à la ligne CD; ainsi, en abaissant d'un point de cette dernière une perpendiculaire DE sur le plan ABE, la distance cherchée ne saurait être moindre que DF. Mais pour faire voir qu'une droite égale à DF peut effectivement réunir deux points des lignes proposées, menons par le pied F de cette perpendiculaire une parallèle FG à CD; cette ligne FG rencontrera nécessairement AB en un certain point G, sans quoi AB serait parallèle à CD, ce qui est contraire à l'hypothèse admise. Or, si du point G nous élevons la perpendiculaire GH sur le plan ABE, elle se trouvera évidemment contenue dans le plan CDFG déjà perpendiculaire sur ABE, et par conséquent GH rencontrera CD. Cette ligne GH, égale et parallèle à DF, mesurera donc la plus courte distance des droites AB et CD; et l'on voit qu'elle se trouvera perpendiculaire à toutes deux en même temps, puisqu'elle l'est sur le plan ABE parallèle à ces droites.

Pour confirmer à *posteriori* la première de ces deux conséquences, il suffit d'observer qu'en joignant deux points quelconques  $m$  et  $n$  des lignes proposées, la droite  $mn$  sortira du plan CDFG, toutes les fois que le point  $n$  sera différent de G; dès lors  $mn$  sera une oblique par rapport au plan ABE, et conséquemment elle sera plus longue que la perpendiculaire  $mp$  qui égale GH. Quant au cas où le point  $n$  coïnciderait avec G, la droite  $mG$  serait oblique par rapport à CD, et par conséquent plus longue que la perpendiculaire GH, qui demeure ainsi la plus courte de toutes les lignes qui peuvent réunir deux points quelconques des droites proposées.

50. Réalisons maintenant les constructions que nous n'avons fait qu'indiquer ci-dessus, et l'on reconnaîtra (comme nous l'avons annoncé n° 5) la différence essentielle qui existe entre les procédés vagues de la Géométrie ordinaire et les méthodes précises par lesquelles la Géométrie descriptive obtient les résultats *complètement déterminés*, pour la solution des problèmes relatifs aux trois dimensions de l'espace.

Soient donc (AB, A'B') et (CD, C'D') (fig. 21) les deux droites données: on s'assure qu'elles ne se trouvent pas dans un même plan, en remarquant d'abord qu'elles ne sont point parallèles, et qu'ensuite les points où leurs projections verticales et horizontales se coupent, ne sont pas situés (n° 59) sur la même perpendiculaire à la ligne de terre. Cela posé, choisissons le point (B, B') de la première droite pour mener une parallèle (BE, B'E') à la seconde, et construisons les traces AEQ et QB' du plan qui contiendrait les lignes (AB, A'B') et (BE, B'E'); puis,