abaissons d'un point (D, D′) de la deuxième droite, une perpendiculaire (DF, D′F′) sur le plan AQB′, et cherchons (n° **30**), au moyen du plan projetant DRR′, le point (F, F′) où cette perpendiculaire rencontre le plan AQB′. Maintenant il faudra mener par le pied (F, F′), et parallèlement à (CD, C′D′), une droite (FG, F′G′) qui devra nécessairement (n° **49**) couper (AB, A′B′); par conséquent les deux points G et G′ devront être sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. Ensuite, du point (G, G′), nous mènerons parallèlement à (DF, D′F′) la ligne (GH, G′H′); et comme elle doit aussi rencontrer la droite (CD, C′D′), il faudra encore que H et H′ se correspondent sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. Alors GH et G′H′ seront les projections de la plus courte distance demandée; puis, pour en obtenir la grandeur absolue, on prendra (n° **17**) sur l'horizontale menée par le point G′, une partie KG″ = GH, et l'on tirera la droite G″H′ qui sera enfin la vraie longueur de la distance en question.

On pourrait encore résoudre le même problème, en cherchant l'intersection de deux plans perpendiculaires à AQB′, et passant l'un par la droite (AB, A′B′), l'autre par la droite (CD, C′D′). D'ailleurs ces plans se détermineraient en abaissant une perpendiculaire sur AQB′ par un point de chacune des droites proposées; mais nous laisserons au lecteur le soin d'exécuter ces constructions.

51. Si les deux droites proposées étaient parallèles entre elles, leur distance serait partout la même, et pour l'obtenir, il suffirait de chercher *la plus courte distance de la première droite à un point de la deuxième*, par exemple, à la trace horizontale de celle-ci; or c'est là un problème dont nous avons donné la solution dans les n^{os} **36** et **37**.

Les diverses questions que nous venons de parcourir renferment tous les éléments nécessaires pour résoudre les problèmes où il n'y aura à combiner que des droites avec des plans, et l'on en trouvera des applications utiles dans le chapitre suivant. Ici, nous ferons seulement observer qu'étant données les projections de tous les sommets d'un polyèdre, on saura déterminer la position et la longueur de chacune de ses arêtes, l'inclinaison de chaque face sur le plan horizontal ou l'angle de deux faces entre elles; on pourra aussi construire en rabattement, et dans ses vraies dimensions, le polygone qui forme une quelconque de ces faces, puis trouver la section que produirait dans le polyèdre un plan dont la position serait assignée. Réciproquement, si la situation du polyèdre est définie par d'autres conditions en nombre suffisant, on pourra en conclure ses deux projections : mais, comme les procédés varieront nécessairement avec le choix des données, nous ne citerons qu'un exemple qui suffira pour indiquer la marche à suivre dans d'autres cas.

52. *Un parallélipipède rectangle repose, par sa base, sur un plan qui est incliné à l'horizon d'une quantité* ω, *et qui a pour trace horizontale* PQ (*fig.* 22); *une des arêtes de cette base est projetée horizontalement suivant* AB, *tandis que les deux autres arêtes contiguës avec celles-là, ont des longueurs données* l′ *et* l″ : *on demande de construire les projections horizontale et verticale de ce corps.*

Par le sommet B, imaginons un plan de profil PRR′ perpendiculaire à la trace

PQ : il coupera le plan donné suivant une droite qui formera avec PR l'angle ω; par conséquent, si l'on rabat ce profil autour de PR, et que l'on construise l'angle RPR″ = ω, puis que l'on ramène le point R″ sur la verticale RR′, la droite R′Q sera (n° **45**) la trace verticale du plan donné où repose la base du parallélipipède. D'ailleurs, si nous rabattons ce dernier plan autour de PQ, le point projeté en B, et qui est situé en B″ sur le profil, se transportera évidemment en *b*; de sorte que A*b* sera le rabattement et la vraie longueur de l'arête projetée en AB sur le plan horizontal. Alors, en tirant la droite A*d* égale à *l*′ et perpendiculaire sur A*b*, on obtiendra deux des côtés de la base rabattue; puis, en relevant cette face, on verra aisément que ces deux côtés sont projetés suivant AB et AD, et le parallélogramme ABCD sera la projection horizontale de la base du parallélipipède. Cela posé, l'arête perpendiculaire à cette base et qui part de l'angle B, est projetée horizontalement (n° **33**) sur la droite indéfinie BP perpendiculaire à PQ, tandis que sur le profil, cette arête est représentée dans sa véritable grandeur par la ligne B″F″, égale à *l*″ et menée à angle droit sur PR″; par conséquent, si l'on projette l'extrémité F″ en F, BF sera la projection horizontale de l'arête en question : puis, en formant le parallélogramme ABFE, et achevant les autres faces par le moyen de diverses parallèles, on obtiendra aisément la projection complète ABCDHEFG de tout le corps sur le plan horizontal.

Quant à l'autre projection, on observera que les côtés AD et CD se trouvent dans le plan PQR′, et qu'ainsi (n° **25**) leurs projections verticales sont A′K′ et M′N′ qui, par leur rencontre, déterminent le point D′, projection verticale de l'angle D (*). Si, de plus, on projette le sommet C en C′ sur M′N′, on pourra achever le parallélogramme A′D′C′B′; et après avoir mené par les quatre angles de cette base, des perpendiculaires à la trace QR′, il suffira de projeter sur ces droites indéfinies les points E, F, G, H, en E′, F′, G′, H′, ce qui d'ailleurs devra fournir des droites respectivement parallèles aux côtés de la base inférieure A′B′C′D′.

Il restera enfin à discerner quelles sont les arêtes visibles sur chacun des plans de projection, en observant les règles établies n^{os} **15** et **16**; et l'on devra se rappeler que le *point de vue* étant différent pour le plan vertical et pour le plan horizontal (n° **16**), une même arête, telle qu'ici (AD, A′D′), peut être visible sur un des plans et invisible sur l'autre.

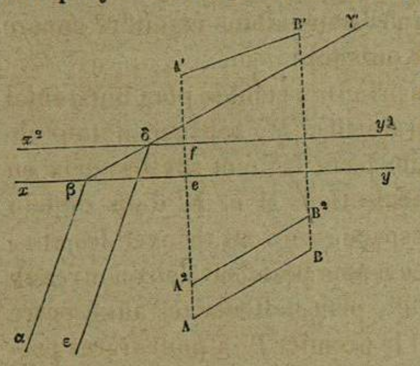
Théorie du changement de plans de projection.

52 (*bis*). Il arrive quelquefois, dans une épure de coupe de pierre ou de charpente, que pour trouver certaines parties du problème, on a recours à des plans de projection auxiliaires, différents de ceux qui ont servi à exprimer les données de la question. Ce passage d'un système de plans à un autre système s'explique et se

(*) On pourrait aussi trouver les points D′, C′, B′, d'après leurs projections horizontales et leurs hauteurs au-dessus de la ligne de terre, car ces hauteurs seraient fournies par le profil où les points en question sont projetés tous sur la droite PR″.

justifie dans chaque exemple par des considérations fort simples, qui ne méritent pas qu'on les regarde comme formant une théorie nouvelle. Toutefois, pour satisfaire aux programmes des services publics, nous allons donner ici quelques règles générales.

I. Si les plans primitifs, que je désignerai, pour abréger, par P et P′, ont pour ligne de terre xy, et qu'on veuille substituer au plan P un autre plan horizontal P^2 qui ait pour ligne de terre x^2y^2, autour de laquelle le plan P^2 sera rabattu sur le plan P′, suivant l'usage ordinaire, il est évident qu'un point de l'espace qui avait pour projection horizontale A et pour projection verticale A′, devra conserver cette

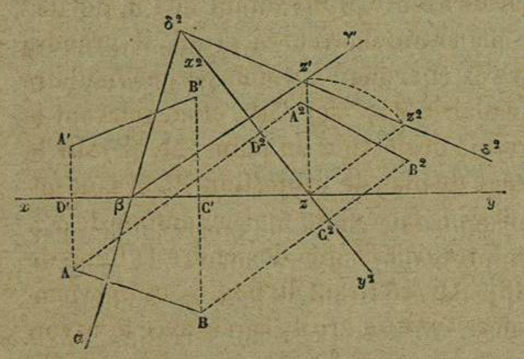


dernière projection A′, et quant à sa nouvelle projection A^2 sur le plan horizontal P^2, on l'obtiendra manifestement en prenant sur la droite AA′ une distance fA^2 égale à eA. De même, le point de l'espace (B, B′) aura pour nouvelles projections B^2 et B′; et enfin la droite (AB, A′B′) aura pour projection verticale A′B′, et pour nouvelle projection horizontale la droite A^2B^2 parallèle à AB.

Pour un plan quelconque π qui aurait été défini sur les plans primitifs par ses traces $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$, la trace verticale restera évidemment la même $\beta\gamma$; et quant à sa nouvelle trace horizontale sur le plan P^2, elle partira nécessairement du point δ sur x^2y^2, et sera la droite $\delta\varepsilon$ parallèle à $\alpha\beta$.

On agirait semblablement si l'on voulait déplacer le plan vertical P′, en le laissant parallèle à sa première direction.

II. Supposons maintenant que des deux plans primitifs P et P′ qui ont pour ligne de terre xy, on veuille garder le plan horizontal P, et remplacer P′ par un plan P^2 aussi vertical, mais ayant pour ligne de terre sur le plan P, la droite quelconque x^2y^2, autour de laquelle il faudra concevoir que le plan P^2 a tourné pour se rabattre



sur P. Alors, une droite qui avait pour projections primitives AB et A′B′, conservera nécessairement la même projection horizontale AB. Quant à sa nouvelle projection verticale sur P^2, il suffira évidemment d'abaisser des points A et B des perpendiculaires sur la nouvelle ligne de terre x^2y^2; puis, en prenant les hauteurs

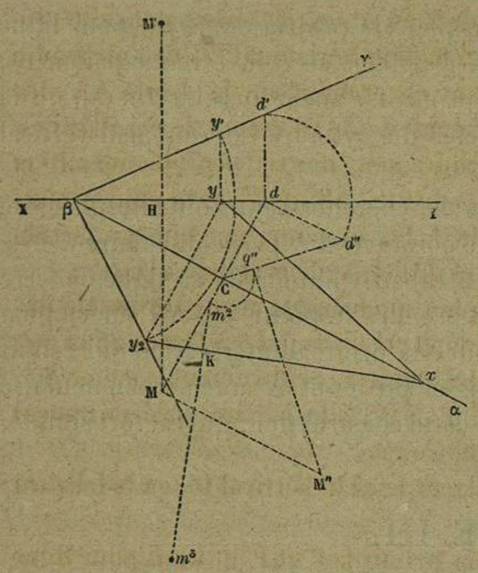
$$D^2A^2 = D'A', \quad C^2B^2 = C'B',$$

on obtiendra la nouvelle projection A^2B^2 sur le plan rabattu P^2.

Pour un plan quelconque π dont les traces primitives étaient $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$, la trace horizontale $\alpha\beta$ restera nécessairement la même, et en la prolongeant jusqu'à ce qu'elle coupe la nouvelle ligne de terre x^2y^2 en un point δ^2, ce dernier point appar-

tiendra à la trace verticale du plan π sur le plan P^2. D'ailleurs ce plan P^2, relevé dans sa position verticale, coupe le plan vertical primitif P′ suivant la verticale zz' qui allait rencontrer le plan π au point z'; donc, quand on rabattra le plan P^2 autour de x^2y^2, cette verticale zz' deviendra la droite zz^2 perpendiculaire à la charnière x^2y^2, et le point z^2 appartiendra à l'intersection des plans π et P^2; c'est-à-dire que z^2 sera un point de la trace de π sur le plan P^2, et conséquemment cette trace cherchée sera $\delta^2z^2\varepsilon^2$.

III. Le cas qui précède est le seul vraiment utile; mais, pour montrer que la



question est susceptible d'une solution tout à fait générale, nous allons résoudre encore le problème suivant.

Les plans primitifs étant le plan horizontal P et le plan vertical P′, rabattus autour de leur ligne de terre XY, et sur lesquels on donne les projections M et M′ d'un certain point de l'espace : on veut trouver les projections de ce même point sur deux nouveaux plans P^2 et P^3, perpendiculaires aussi entre eux, et dont le premier P^2 a pour traces primitives $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$, tandis que leur ligne de terre ou leur intersection mutuelle est une droite projetée horizontalement sur xy. Nous n'avons pas besoin d'assigner sa projection verticale que l'on trouverait aisément, puisque cette ligne de terre est dans le plan connu $\alpha\beta\gamma$.

Par le point (M, M′) menons un plan de profil perpendiculaire à $\alpha\beta$, et conséquemment vertical; il aura pour traces horizontale et verticale MCd et dd', et coupera le plan $\alpha\beta\gamma$ suivant une droite qui, rabattue avec le profil autour de Cd, deviendra évidemment Cd''. Quant au point (M, M′) entraîné avec ce profil, il prendra une position M″ qui s'obtient en élevant sur la charnière Cd une perpendiculaire $MM'' = HM'$. Alors, en abaissant la perpendiculaire $M''q''$ sur Cd'', et en relevant le profil, on doit bien voir que le point q'' serait la projection du point (M, M′) sur le plan $\alpha\beta\gamma$ ou P^2. Mais, comme, pour faire usage du plan de projection P^2, il faut nécessairement le rabattre sur notre feuille de dessin, faisons-le tourner autour de $\alpha\beta$, et le point q'' viendra se placer en m^2. Il reste à trouver ce que deviendra la ligne de terre projetée sur xy, et située dans le plan $\alpha\beta\gamma$. Or, en tirant du point y une perpendiculaire indéfinie sur la charnière $\alpha\beta$, et en décrivant un arc de cercle avec le rayon $\beta y'$, on voit bien que y^2 sera le rabattement du point (y, y'); ainsi la nouvelle ligne de terre sera rabattue suivant xy^2. Enfin, si l'on conçoit le plan P^3 rabattu aussi autour de xy^2, il suffira de mener par m^2 une perpendiculaire indéfinie sur xy^2, et de prendre la distance Km^3 égale à $M''q''$, pour obtenir les deux projections

m^2 et m^3 du point (M, M′) sur les plans P^2 et P^3 rabattus autour de leur ligne de terre xy^2.

IV. On voit assez, par ces détails, qu'il n'y a pas là de théorie nouvelle ; d'ailleurs nous avions déjà maintes fois employé des procédés analogues dans les épures qui précèdent. Ainsi, dans la *fig.* 9, le plan de profil qui nous a servi est vraiment un nouveau plan vertical ayant pour ligne de terre la droite VX. Il en est de même dans la *fig.* 16, où le plan vertical PRR′ rabattu suivant PRR″ peut être appelé un nouveau plan vertical sur lequel la trace du plan sécant est A″B. Encore, dans la *fig.* 14, le plan AφB′ mené par la droite et le point donné, et que nous avons rabattu suivant AψB″, peut être considéré comme un nouveau plan de projection, ayant pour ligne de terre Aφ, et sur lequel la solution C″M″ du problème se trouve immédiatement, puis se ramène ensuite sur les deux plans primitifs. Voyez aussi la *fig.* 60, où la seconde solution équivaut à projeter les arêtes du cylindre sur un plan vertical auxiliaire BB″ parallèle à ces arêtes.

Ajoutons enfin que, dans la *fig.* 12, la distance cherchée peut s'obtenir plus vite en regardant le plan vertical ACC′ mené par le point (A, A′) perpendiculairement à PQ, comme un nouveau plan vertical que l'on rabattra autour de sa ligne de terre AC ; alors, en cherchant la position A^2 que prendra le point (A, A′) sur ce plan rabattu, et la nouvelle position DC^2 que prendra la droite d'intersection qui réunit les points de l'espace D et C′, il suffira d'abaisser du point A^2 une perpendiculaire sur DC^2. Nous engageons le lecteur à exécuter cette construction, qui est fort simple.

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DE L'ANGLE TRIÈDRE.

53. Dans un angle solide à trois faces SABC (*fig.* 23), le sommet offre trois *angles plans* et trois *angles dièdres :* les premiers sont les angles rectilignes formés par les arêtes entre elles, les autres sont les inclinaisons mutuelles des faces. De ces six angles, trois quelconques étant donnés, il s'agit de trouver les autres, ce qui offre six problèmes distincts ; car, en désignant par A, B, C les angles dièdres qui ont respectivement pour arêtes SA, SB, SC, et par α, β, γ les angles plans ou *faces* qui sont opposés à ces angles dièdres, on peut donner :

1° Les trois faces ou angles plans . . . . α, β, γ
2° Deux faces et l'angle dièdre compris . . . . α, β, C
3° Deux faces et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles. . . . α, β, B
4° Deux angles dièdres et une des faces opposées. . . . . . A, B, β
5° Deux angles dièdres et la face comprise . . . . A, B, γ
6° Les trois angles dièdres. . . . . A, B, C

Ce sont là évidemment les seules combinaisons vraiment distinctes ; et même les trois derniers cas peuvent se ramener aux trois autres par le secours d'un angle trièdre *supplémentaire*.

54. D'un point quelconque S′ pris *dans l'intérieur* de l'angle solide S, abaissons une perpendiculaire sur chacune de ses faces ; et pour fixer les idées, regardons le plan BSC comme horizontal, et l'arête SA comme située au-dessus de ce plan. Nous formerons ainsi un second angle trièdre S′ ayant pour arêtes la verticale S′A′, avec les deux droites S′B′, S′C′, respectivement perpendiculaires sur les faces ASC, ASB ; et ce nouvel angle solide est dit *supplémentaire* du premier, parce que les faces et les angles dièdres de l'un sont les suppléments des angles dièdres et des faces de l'autre. Mais, avant de démontrer ces relations réciproques, observons qu'il n'est pas indifférent, pour former le nouvel angle solide, d'abaisser les perpendiculaires de tel ou tel point de l'espace ; car trois droites ou trois plans qui se coupent en un même point S′, et qui sont prolongés de part et d'autre de ce point, déterminent toujours huit angles trièdres différents, parmi lesquels il n'y en a que deux (symétriques l'un de l'autre et opposés par le sommet) qui soient vraiment supplémentaires de l'angle donné SABC. Aussi, pour ne pas commettre d'erreur dans la manière de prolonger les perpendiculaires, nous avons recommandé de les abaisser sur les faces, à partir d'un point pris dans l'intérieur de l'angle solide proposé ; ensuite on pourra transporter où l'on voudra dans l'espace l'angle S′ ainsi formé.

55. Cela posé, en désignant par A′, B′, C′ les angles dièdres compris entre les faces qui se coupent suivant S′A′, S′B′, S′C′, et par α', β', γ' les faces opposées à ces arêtes, on voit que le plan A′S′B′, perpendiculaire aux deux faces BSC, ASC, les coupera suivant deux droites A′E, B′E, qui seront elles-mêmes perpendiculaires sur SC ; et par conséquent l'angle A′EB′ sera la mesure de l'angle dièdre C. Or le quadrilatère plan S′A′EB′ a deux de ses angles qui sont évidemment droits, savoir : A′ et B′ ; donc les deux autres sont supplémentaires, et l'on a

A′S′B′ + A′EB′ = 180°, ou bien . . . . $\gamma' + C = 180°$;
on prouvera de même que . . . . $\beta' + B = 180°$,
$\alpha' + A = 180°$,

en considérant les quadrilatères S′A′DC′ et S′C′FB′ formés par les sections que produisent les faces A′S′C′ et B′S′C′ dans l'angle solide S. Donc *les faces de l'angle solide* S′ sont bien les *suppléments des angles dièdres de* S.

56. Maintenant, considérons les angles dièdres de S′ ; les deux faces B′S′A′ et C′S′A′ coupent le plan BSC auquel chacune est perpendiculaire, suivant les droites A′E et A′D ; donc l'angle rectiligne DA′E est la mesure de l'angle dièdre A′. Mais dans le quadrilatère SDA′E, les angles D et E sont évidemment droits, puisque la face A′S′B′ est perpendiculaire sur SC, et A′S′C′ sur SB ; par conséquent, les deux autres angles de ce quadrilatère sont supplémentaires, et l'on a

DA′E + DSE = 180°, ou bien. . . . . $A' + \alpha = 180°$;
on prouvera de même que. . . . . $B' + \beta = 180°$,
$C' + \gamma = 180°$,

au moyen des quadrilatères SEB′F et SDC′F. Donc *les angles dièdres de* S′ sont les