m^2 et m^3 du point (M, M') sur les plans P^2 et P^3 rabattus autour de leur ligne de terre xy^2.

IV. On voit assez, par ces détails, qu'il n'y a pas là de théorie nouvelle ; d'ailleurs nous avions déjà maintes fois employé des procédés analogues dans les épures qui précèdent. Ainsi, dans la *fig.* 9, le plan de profil qui nous a servi est vraiment un nouveau plan vertical ayant pour ligne de terre la droite VX. Il en est de même dans la *fig.* 16, où le plan vertical PRR' rabattu suivant PRR'' peut être appelé un nouveau plan vertical sur lequel la trace du plan sécant est $A''B$. Encore, dans la *fig.* 14, le plan $A\varphi B'$ mené par la droite et le point donné, et que nous avons rabattu suivant $A\psi B''$, peut être considéré comme un nouveau plan de projection, ayant pour ligne de terre $A\varphi$, et sur lequel la solution $C''M''$ du problème se trouve immédiatement, puis se ramène ensuite sur les deux plans primitifs. Voyez aussi la *fig.* 60, où la seconde solution équivaut à projeter les arêtes du cylindre sur un plan vertical auxiliaire BB'' parallèle à ces arêtes.

Ajoutons enfin que, dans la *fig.* 12, la distance cherchée peut s'obtenir plus vite en regardant le plan vertical ACC' mené par le point (A, A') perpendiculairement à PQ, comme un nouveau plan vertical que l'on rabattra autour de sa ligne de terre AC; alors, en cherchant la position A^2 que prendra le point (A, A') sur ce plan rabattu, et la nouvelle position DC^2 que prendra la droite d'intersection qui réunit les points de l'espace D et C', il suffira d'abaisser du point A^2 une perpendiculaire sur DC^2. Nous engageons le lecteur à exécuter cette construction, qui est fort simple.

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DE L'ANGLE TRIÈDRE.

53. Dans un angle solide à trois faces SABC (*fig.* 23), le sommet offre trois *angles plans* et trois *angles dièdres :* les premiers sont les angles rectilignes formés par les arêtes entre elles, les autres sont les inclinaisons mutuelles des faces. De ces six angles, trois quelconques étant donnés, il s'agit de trouver les autres, ce qui offre six problèmes distincts ; car, en désignant par A, B, C les angles dièdres qui ont respectivement pour arêtes SA, SB, SC, et par α, β, γ les angles plans ou *faces* qui sont opposés à ces angles dièdres, on peut donner :

1° Les trois faces ou angles plans . . . . α, β, γ
2° Deux faces et l'angle dièdre compris . . . . α, β, C
3° Deux faces et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles. . . . α, β, B
4° Deux angles dièdres et une des faces opposées. . . . . . A, B, β
5° Deux angles dièdres et la face comprise . . . . A, B, γ
6° Les trois angles dièdres. . . . . A, B, C

Ce sont là évidemment les seules combinaisons vraiment distinctes ; et même les trois derniers cas peuvent se ramener aux trois autres par le secours d'un angle trièdre *supplémentaire*.

54. D'un point quelconque S' pris *dans l'intérieur* de l'angle solide S, abaissons une perpendiculaire sur chacune de ses faces ; et pour fixer les idées, regardons le plan BSC comme horizontal, et l'arête SA comme située au-dessus de ce plan. Nous formerons ainsi un second angle trièdre S' ayant pour arêtes la verticale $S'A'$, avec les deux droites $S'B'$, $S'C'$, respectivement perpendiculaires sur les faces ASC, ASB ; et ce nouvel angle solide est dit *supplémentaire* du premier, parce que les faces et les angles dièdres de l'un sont les suppléments des angles dièdres et des faces de l'autre. Mais, avant de démontrer ces relations réciproques, observons qu'il n'est pas indifférent, pour former le nouvel angle solide, d'abaisser les perpendiculaires de tel ou tel point de l'espace ; car trois droites ou trois plans qui se coupent en un même point S', et qui sont prolongés de part et d'autre de ce point, déterminent toujours huit angles trièdres différents, parmi lesquels il n'y en a que deux (symétriques l'un de l'autre et opposés par le sommet) qui soient vraiment supplémentaires de l'angle donné SABC. Aussi, pour ne pas commettre d'erreur dans la manière de prolonger les perpendiculaires, nous avons recommandé de les abaisser sur les faces, à partir d'un point pris dans l'intérieur de l'angle solide proposé ; ensuite on pourra transporter où l'on voudra dans l'espace l'angle S' ainsi formé.

55. Cela posé, en désignant par A', B', C' les angles dièdres compris entre les faces qui se coupent suivant $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$, et par α', β', γ' les faces opposées à ces arêtes, on voit que le plan $A'S'B'$, perpendiculaire aux deux faces BSC, ASC, les coupera suivant deux droites $A'E$, $B'E$, qui seront elles-mêmes perpendiculaires sur SC ; et par conséquent l'angle $A'EB'$ sera la mesure de l'angle dièdre C. Or le quadrilatère plan $S'A'EB'$ a deux de ses angles qui sont évidemment droits, savoir : A' et B' ; donc les deux autres sont supplémentaires, et l'on a

$A'S'B' + A'EB' = 180^\circ$, ou bien . . . . $\gamma' + C = 180^\circ$;
on prouvera de même que . . . . $\beta' + B = 180^\circ$,
$\alpha' + A = 180^\circ$,

en considérant les quadrilatères $S'A'DC'$ et $S'C'FB'$ formés par les sections que produisent les faces $A'S'C'$ et $B'S'C'$ dans l'angle solide S. Donc *les faces de l'angle solide* S' sont bien les *suppléments des angles dièdres de* S.

56. Maintenant, considérons les angles dièdres de S' ; les deux faces $B'S'A'$ et $C'S'A'$ coupent le plan BSC auquel chacune est perpendiculaire, suivant les droites $A'E$ et $A'D$; donc l'angle rectiligne $DA'E$ est la mesure de l'angle dièdre A'. Mais dans le quadrilatère $SDA'E$, les angles D et E sont évidemment droits, puisque la face $A'S'B'$ est perpendiculaire sur SC, et $A'S'C'$ sur SB ; par conséquent, les deux autres angles de ce quadrilatère sont supplémentaires, et l'on a

$DA'E + DSE = 180^\circ$, ou bien. . . . . $A' + \alpha = 180^\circ$;
on prouvera de même que. . . . . $B' + \beta = 180^\circ$,
$C' + \gamma = 180^\circ$,

au moyen des quadrilatères $SEB'F$ et $SDC'F$. Donc *les angles dièdres de* S' sont les *suppléments des faces de* S; et l'on peut dire que ce dernier angle solide est à son tour *supplémentaire de l'angle* S′.

57. Remarquons ici qu'en décrivant, du point S comme centre, une sphère d'un rayon quelconque SA, elle serait coupée par les faces de l'angle solide S, suivant trois arcs de grands cercles AB, BC, CA, lesquels formeraient un *triangle sphérique*, dont les côtés mesureraient les angles plans α, β, γ, et dont les angles ne seraient autre chose que les inclinaisons A, B, C des faces de l'angle solide. Par conséquent, la construction de ce dernier, d'après la connaissance de trois de ses éléments, revient à la solution graphique des problèmes que traite par le calcul la trigonométrie sphérique. D'ailleurs, si l'on transportait au centre S l'angle solide S′, ses faces couperaient la même sphère suivant un autre triangle qui serait le triangle *supplémentaire* ou *polaire* de ABC, et dont on fait usage aussi dans la trigonométrie sphérique (*).

58. Revenons maintenant aux six problèmes que nous avons énoncés n° 53, et observons que, quand on donne les trois angles dièdres A, B, C, on peut trouver tout de suite leurs suppléments, qui seront (n° 55) les faces α', β', γ' d'un autre angle solide S′; or si, par le premier cas du n° 53, on sait déduire de ces nouvelles données les angles dièdres A′, B′, C′ de cet angle S′, il n'y aura plus qu'à prendre les suppléments de ceux-ci pour obtenir (n° 56) les faces α, β, γ de l'angle solide primitif S. On voit par là que le sixième cas se ramène au premier; et de même on réduira le cinquième au deuxième, et le quatrième au troisième. Nous allons donc nous occuper seulement de la résolution des trois premiers problèmes.

59. Premier cas. *Étant données les trois faces* α, β, γ (*fig.* 24) *d'un angle solide, trouver les trois angles dièdres* A, B, C.

Soient A″SB, BSC, CSA′ les trois angles donnés, supposés rabattus sur le plan de la face BSC, que nous regarderons comme le *plan horizontal* de l'épure; il est clair que, pour recomposer l'angle solide, il suffirait de faire tourner les deux faces latérales A″SB, A′SC autour des droites SB et SC, comme charnières, jusqu'à ce que les deux lignes SA″ et SA′ vinssent coïncider l'une avec l'autre; et leur position commune dans l'espace serait celle de la troisième arête, dont nous désignerons la projection inconnue par SA. Pour la déterminer, prenons sur les droites rabattues SA′ et SA″ deux distances quelconques, mais égales, SD′ = SD″; alors les points D′ et D″ devront évidemment se réunir dans la formation de l'angle solide; puis, comme en tournant autour des droites SC, SB, ils ne sortiront pas des plans verticaux D′FD,

(*) A la rigueur, pour avoir le triangle polaire de ABC dans la situation où on l'emploie ordinairement dans la trigonométrie, il faudrait adopter l'angle solide symétrique de S′A′B′C′, lequel s'obtiendrait en prolongeant les trois arêtes au delà du point S′; c'est-à-dire qu'il eût fallu, dès le commencement, élever par le sommet S trois perpendiculaires aux faces de cet angle solide, l'une sur BSC et située du même côté de cette face que l'arête SA; l'autre sur CSA et du même côté que l'arête SB; enfin, la troisième sur ASB et du même côté que SC. L'angle solide ainsi construit aurait coupé la sphère précisément suivant le triangle polaire de ABC; mais la figure eût été peu intelligible sans le secours des triangles sphériques: c'est pourquoi nous avons préféré la construction du n° 54; d'autant plus qu'ici, où il ne s'agit que d'angles solides, ceux qui sont symétriques l'un de l'autre se trouvent composés avec les mêmes éléments disposés seulement dans un autre ordre, et que les *relations supplémentaires* sont également vraies.

D″ED, perpendiculaires à ces dernières, il s'ensuit que les points rabattus en D′ et D″ iront coïncider avec le point de l'espace qui est projeté horizontalement en D, et, par conséquent, la troisième arête de l'angle solide aura pour projection SDA.

D'ailleurs le plan vertical FD, perpendiculaire à SC, devra couper les deux faces qui passent par cette arête, suivant les droites FD et FD′ qui, étant relevées, comprendront entre elles un angle égal à l'inclinaison de ces faces, et qui formeront un triangle rectangle avec la verticale D; par conséquent, si l'on rabat ce triangle autour de FD, en élevant sur cette base une perpendiculaire indéfinie DG′ que l'on terminera par un rayon FG′ = FD′, on obtiendra ainsi l'angle rectiligne G′FD pour la mesure de l'angle dièdre C qu'il s'agissait de trouver.

De même le plan vertical ED coupera les deux faces passant par SB, suivant des droites ED et ED″ qui, étant relevées, comprendront entre elles la mesure de l'angle dièdre B; et comme ces droites forment aussi avec la verticale D un triangle rectangle dont elles sont la base et l'hypoténuse, on pourra aisément construire le rabattement G″ED de ce triangle, et l'angle B sera mesuré par DEG″. On observera d'ailleurs que les deux verticales DG′ et DG″ devront se trouver *égales*, puisque l'une et l'autre expriment la hauteur du point unique de l'arête SA, qui est projeté en D.

Pour obtenir le troisième angle dièdre A, on mènera un plan sécant perpendiculaire à SA par le point de cette arête qui est projeté en D, et rabattu en D′ d'une part, et en D″ de l'autre. Ce plan coupera les faces latérales suivant des droites D′N et D″M, respectivement perpendiculaires à SA′ et SA″; et conséquemment son intersection avec la face BSC sera la droite MN qui devra évidemment se trouver (n° 35) perpendiculaire sur la projection horizontale SA de la troisième arête. Si donc avec les trois lignes D″M, MN, ND′, on construit le triangle PMN, l'angle au sommet P sera précisément la mesure de l'angle dièdre qui a pour arête SA.

Remarquons en outre que ce triangle, avant d'être rabattu autour de MN, avait son sommet P situé au point de l'arête SA qui est projeté en D. Mais puisque cette charnière MN est perpendiculaire, comme nous venons de le dire, au plan vertical SA, le point P n'aura pas dû sortir de ce plan; et, par conséquent, il faudra qu'il se trouve rabattu sur le prolongement de la droite SDA, ce qui est une vérification essentielle à observer.

60. Les constructions précédentes sont pareillement applicables au cas où les trois angles α, β, γ, ou bien quelques-uns d'entre eux, se trouvent obtus : seulement, pour que le problème soit possible, il faut toujours, 1° que les trois angles α, β, γ, fassent une somme moindre que quatre droits; 2° qu'en outre le plus grand de ces angles soit moindre que la somme des deux autres. En effet, si ces conditions n'étaient pas remplies par les données de la question, il est facile de voir que les opérations graphiques fourniraient pour la construction des triangles FDG′ et EDG″, des hypoténuses plus courtes que les bases : tandis que ces triangles seront possibles, si les deux conditions ci-dessus énoncées sont satisfaites, et, par suite, l'angle solide pourra être composé avec les données du problème.

61. *Réduire un angle à l'horizon.* Ce problème, qui est utile dans la levée des plans, a pour objet de trouver la projection horizontale d'un angle α qui est connu de grandeur, et dont les côtés font, avec la verticale abaissée du sommet, des angles donnés β et γ. Or, si l'on imagine un angle solide ayant pour ses trois arêtes cette verticale et les deux côtés de l'angle proposé α, on connaîtra les faces α, β, γ de cet angle solide, et la projection demandée sera évidemment l'angle rectiligne qui mesure l'angle dièdre A compris entre les deux faces verticales; par conséquent, ce problème rentre dans celui du n° 59, et pourrait être résolu de la même manière, si la supposition qu'une des arêtes est ici verticale, ne permettait de donner à la figure une disposition plus commode.

(*Fig.* 25.) Dans un plan quelconque, formons, avec la verticale SA, les angles ASB $= \gamma$, ASC $= \beta$; puis, en laissant invariable la grandeur de ce dernier, faisons-le tourner autour de SA jusqu'à ce que le côté mobile SC forme, dans l'espace, un angle α avec le côté fixe SB : par là nous obtiendrons l'angle donné, exactement dans la situation que lui assigne le problème, et ensuite il nous sera facile d'en déduire la projection horizontale. Or, dans ce mouvement de révolution autour de SA, le pied C du côté mobile décrira un arc de cercle CC′, dont le centre sera en A, et il s'arrêtera sur cet arc en un point C′ tel, que sa distance au point fixe B sera évidemment la base d'un triangle qui aura pour côtés des droites égales à SB et SC, tandis que l'angle compris égalera α. Si donc on construit sur le plan vertical un angle BSC″ $= \alpha$, et que l'on prenne SC″ = SC, la droite BC″ sera la distance dont nous parlions; puis, en la rapportant par un arc de cercle de B en C′, on connaîtra la position C′ où doit s'arrêter le pied du côté mobile SC, et, par suite, cette droite se trouvera projetée horizontalement suivant AC′. D'ailleurs, le côté fixe SB étant projeté sur AB, on en conclura que l'angle α, dans l'espace, a pour projection horizontale BAC′; ainsi ce dernier angle, qui peut être plus grand ou plus petit que α, est celui qu'il faut employer sur une carte topographique où tous les objets doivent être représentés par leurs projections.

62. Deuxième cas. *Étant données deux faces α, β d'un angle solide, avec l'angle dièdre compris* C, *trouver les autres parties.*

(*Fig.* 26.) Soient BSC $= \alpha$, CSA′ $= \beta$ les deux faces données rabattues sur le plan horizontal; en faisant tourner la seconde autour de SC jusqu'à ce qu'elle forme avec BSC l'angle dièdre C, on obtiendra deux faces de l'angle solide dans leur véritable situation. Or, pendant ce mouvement de rotation, un point D′ pris à volonté sur l'arête mobile ne sortira pas du plan vertical D′FM perpendiculaire à la charnière; si donc, dans ce plan rabattu autour de FM, on construit l'angle MFK = C, et que l'on prenne la distance FG′ = FD′, il est évident que le point D′ viendra coïncider avec G′, et, par suite, qu'il sera projeté horizontalement en D, lorsque la face mobile ASC aura pris l'inclinaison assignée par la question. Maintenant, le point de l'espace qui a pour projection D et G′ appartient à la troisième face inconnue, et si on la conçoit rabattue autour de SB, le point (D, G′) ne sortira pas du plan vertical DED″ perpendiculaire à cette charnière; donc, comme ce point doit aussi reste à une distance du sommet égale à SD′, si l'on décrit avec cette distance un arc de

cercle, il coupera la droite indéfinie DE au point D″ qui déterminera l'angle D″SB pour la troisième face inconnue. Alors les trois faces de l'angle solide étant trouvées, on rentrera dans le problème du n° 59, qui a enseigné à construire les angles dièdres.

On pouvait aussi employer la distance MG′ qui égale évidemment MD″, pour décrire un arc de cercle dont la rencontre avec le premier aurait déterminé le point D″.

63. Troisième cas. *Étant données deux faces α, β d'un angle solide, avec l'angle dièdre* B *opposé à l'une d'elles, trouver les autres parties.*

(*Fig.* 27.) Soient encore BSC $= \alpha$, CSA′ $= \beta$ les deux faces données rabattues sur le plan horizontal. Si, dans un plan vertical EF perpendiculaire sur l'arête SB, on construit l'angle REF = B, et que l'on imagine un plan indéfini passant par SE et ER, ce plan indiquera la position de la face inconnue; de sorte que, pour composer l'angle solide, il ne restera plus qu'à faire tourner la face A′SC autour de CS, jusqu'à ce que l'arête SA′ vienne se placer dans le plan SER. Pendant ce mouvement de rotation, le point D′ de l'arête mobile ne sortira pas du plan vertical D′FM, mené par le point F perpendiculairement à la charnière CS; et, par conséquent, ce point D′ s'arrêtera sur l'intersection du plan vertical FM avec le plan indéfini SER. Or cette intersection est une droite qui part de M, et vient rencontrer la verticale F au même point évidemment que la droite ER relevée; si donc, pour trouver cette hauteur, on tire la ligne FR perpendiculaire à EF, puis qu'on reporte FR à angle droit sur FM de F en R′, la ligne MR′ sera l'intersection dont nous avons parlé, et c'est sur cette droite que devra s'arrêter le point D′ de l'arête mobile SA′. Ainsi, en décrivant avec le rayon D′F un arc de cercle qui coupe MR′ en G, on obtiendra, dans le plan vertical FM, la position G d'un point de la troisième arête SA, et il sera facile d'en déduire la projection horizontale D.

Maintenant observons que ce point G, situé dans le plan vertical MF, appartient à la face inconnue: et que quand on rabattra celle-ci autour de l'arête SB, il ne changera pas de distance par rapport aux points M et S situés sur la charnière. Or ces distances sont évidemment MG et SD′; si donc, avec ces droites pour rayons, on décrit deux arcs de cercle, leur rencontre D″ déterminera le rabattement du point G (*), et par suite la face inconnue sera D″SB. Une fois cette face trouvée, on retombera sur le cas du n° 59, et l'on saura construire les autres parties de l'angle solide.

64. Remarquons que l'arc de cercle décrit avec le rayon FD′ ED′ coupera généralement la droite MR′ en deux points G et g : de sorte que la face A′SC, en tournant autour de CS, pourra prendre deux positions dans chacune desquelles l'arête SA′ se trouvera située dans le plan indéfini SER ou SMR′; pour l'une de ces positions, le point D′ s'arrête en G, et pour l'autre il vient en g. Par conséquent, si l'on rabat ce dernier point autour de SB, comme on l'a fait pour le premier, il se transportera

(*) On pouvait aussi trouver le rabattement D″, en combinant un de ces deux arcs avec la droite DD″ menée perpendiculairement à la charnière SB, par la projection horizontale D du point G.

en d'', et d''SB sera alors la grandeur de la troisième face inconnue. Il y aura donc deux angles solides différents que l'on pourra composer avec les données α, β et B; résultat tout à fait analogue avec ce qui arrive dans la construction d'un triangle rectiligne où l'on connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

Il n'est pas besoin d'ajouter que si l'arc décrit avec le rayon FD' ne faisait que toucher la droite MR', il n'y aurait plus qu'une solution; et que le problème serait impossible, si cet arc ne rencontrait pas du tout la droite MR'.

Cependant il importe d'observer que la deuxième solution devrait être rejetée, si le point g tombait sur MR' *au-dessous* de MF, c'est-à-dire au-dessous du plan horizontal (nous supposons ici qu'on aura soin de construire l'angle donné B, aigu ou obtus, toujours *au-dessus* du plan de projection). En effet, l'angle solide qu'on obtiendrait alors se trouverait évidemment composé avec les faces α, β, et un angle dièdre supplémentaire de B : or, comme ce dernier est ici donné graphiquement, et non pas par la valeur de son *sinus*, il ne peut y avoir d'ambiguïté sur sa grandeur, et, par conséquent, il n'est pas permis d'adopter indifféremment B ou $180° - B$.

Par la même raison, il faudrait rejeter les deux solutions et déclarer le problème impossible avec les données actuelles, si les points G et g tombaient l'un et l'autre au-dessous de l'horizontale MF; ce qui, au reste, ne pourra arriver que quand l'angle dièdre B sera obtus.

Remarque. Quoique les trois derniers problèmes du n° 53 puissent être ramenés aux trois premiers par le moyen d'un angle solide supplémentaire, ainsi que nous l'avons montré au n° 58, il est intéressant et quelquefois utile d'en avoir une solution directe. Nous allons donc l'exposer, en prévenant toutefois les lecteurs qui commencent à étudier la Géométrie descriptive, que cette solution suppose la connaissance des plans tangents aux surfaces courbes; ainsi ils feront bien de différer la lecture de ce qui suit, jusqu'à ce qu'ils aient étudié au moins les chapitres II et III du livre second.

65. Quatrième cas. *Étant donnés deux angles dièdres* A *et* B *d'un angle solide, avec une des faces opposées* β, *trouver les autres parties.*

(*Pl.* 8, *fig*, 1.) Adoptons pour plan horizontal celui de la face inconnue γ, et traçons-y le rabattement ASC'' de la face donnée β; ensuite, perpendiculairement à l'arête SA, menons le plan vertical D''EF, sur lequel nous tracerons l'angle D'ED égal au dièdre A donné par la question. Alors, si nous faisons tourner la face ASC'' autour de AS jusqu'à ce qu'elle vienne se placer dans le plan SED', le point D'' se transportera en D' qui se projette horizontalement en D; et pour composer l'angle solide, il n'y aura plus qu'à conduire par l'arête (SD, ED') un plan qui forme avec le plan horizontal un angle égal au dièdre B. A cet effet, dans le plan vertical EF, tirons la droite D'F qui fasse l'angle D'FD = B; puis, après avoir fait tourner cette droite autour de la verticale D'D pour engendrer un cône de révolution dont la base sera le cercle DF, menons ce cône à un plan tangent qui passe par l'arête (SD; ED'). Ce plan aura pour trace la droite SGB tirée du point S tangentiellement au cercle du rayon DF, laquelle sera la troisième arête de l'angle solide en question, et déterminera la face ASB = γ. Quant à la troisième face α, qui est rabattue ici suivant BSC''', on verra aisément qu'elle se construit en prenant sur la perpendiculaire DG une longueur GD''' égale à la génératrice D'F du cône auquel cette face est tangente.

66. Cinquième cas. *Étant donnés deux angles dièdres* A *et* B *d'un angle solide, avec la face comprise* γ, *trouver les autres parties.*

(*Pl.* 8, *fig.* 2.) Après avoir tracé sur le plan horizontal un angle ASB = γ pour représenter la face con-

nue, menons un plan vertical EF perpendiculaire à l'arête SA, et traçons-y l'angle F'EF égal au dièdre A: semblablement, dans un plan perpendiculaire à l'arête SB, construisons l'angle G'KG = B. Alors les plans SEF' et SKG' seront ceux des faces inconnues; et pour obtenir un second point D de la projection SDC de leur intersection, il suffira de les couper par un même plan horizontal quelconque. On prendra donc les hauteurs égales EH' = KL'; puis en menant des droites H'F', L'G', respectivement parallèles aux deux lignes de terre EF, KG, on obtiendra les deux sections horizontales F'D, G'D, qui par leur rencontre feront connaître le point cherché D. Enfin, pour rabattre les deux faces qui se coupent suivant SDC, on prendra les perpendiculaires MD'' = EF', ND''' = KG', et ces deux faces auront évidemment pour vraies grandeurs ASC'' et BSC'''.

67. Sixième cas. *Étant donnés les trois angles dièdres* A, B, C *d'un angle solide, trouver les trois faces*

(*Pl.* 8, *fig.* 3.) Sur le plan horizontal que nous supposons coïncider avec celui de la face inconnue γ, marquons la droite arbitraire DA pour représenter une des arêtes de cette face, et sur un plan vertical perpendiculaire à DA, traçons l'angle Y'AX égal au dièdre donné A : le plan Y'AD sera ainsi celui qui contient la face β. Ensuite, d'un point T' choisi arbitrairement dans l'intérieur de l'angle Y'AX, abaissons sur les faces γ et β les perpendiculaires T'O, T'I', et traçons les angles T'FO = B, T'G'I' = C; alors, si nous faisons tourner ces angles autour des axes T'O et T'I', ils produiront deux cônes de révolution auxquels la face inconnue α devra évidemment être tangente; de sorte que la question est réduite à mener un plan qui touche à la fois ces deux cônes, dont le sommet commun est en T' et dont les bases sont les cercles décrits avec les rayons OF et I'G'. La solution directe consisterait à chercher la trace *horizontale* du second cône I'T'G', et à mener une *tangente commune* à cette courbe et au cercle du rayon OF; mais on peut éviter le tracé approximatif d'une courbe par points, en recourant aux considérations suivantes.

Inscrivons une sphère au cône T'OF le long du cercle horizontal MFN : le centre ω' de cette sphère s'obtiendra en tirant la droite Fω' normale au cône dont il s'agit; et pour avoir une seconde sphère, égale à celle-là, et inscrite pareillement dans l'autre cône T'I'G', il faudra mener à angle droit sur T'G' la ligne T'H' = ω'F, et achever le parallélogramme T'H'K'φ' qui fournira le centre φ' et le rayon φ'K' de cette nouvelle sphère. Cela posé, imaginons un cylindre qui soit circonscrit à ces deux sphères : il les touchera suivant deux grands cercles perpendiculaires à son axe qui est la droite $\varphi'\omega'$; or le plan qui touchait les deux cônes à la fois se trouvait nécessairement tangent aux deux sphères : donc il est aussi tangent au cylindre actuel, et la question se réduit à mener par le point T' un plan qui soit *tangent à cette surface unique*.

La méthode directe serait donc de tracer, dans le plan ω'V' perpendiculaire à l'axe $\varphi'\omega'$, un cercle avec un rayon égal à ω'F; puis, de mener à ce cercle une tangente par le point où aboutirait sur ce plan la parallèle à l'axe mené par le point T'. Tout cela pourrait s'exécuter en rabattement sur le plan horizontal; mais il y a encore un moyen bien plus court. En effet, le plan cherché devant être tangent à la fois au cylindre, à la sphère ω' et au cône T'FO, son point de contact avec la sphère doit être situé : 1° sur le cercle horizontal MFN qui est la ligne de contact de la sphère et du cône; 2° sur le grand cercle contenu dans le plan ω'V', et qui est la ligne de contact de la sphère avec le cylindre. Or ces deux cercles se coupent évidemment suivant une corde qui est projetée verticalement au point M', et représentée en vraie position par MM'N sur le plan horizontal; donc M est le point de contact et BMS la trace horizontale du plan tangent demandé : sa trace verticale, qui doit passer par le sommet T', sera dès lors BT'C'.

Maintenant que nous connaissons la grandeur ASB = γ de la face horizontale et la projection SC de l'arête suivant laquelle se coupent les deux plans SAC', SBC', il n'y a plus qu'à rabattre ces deux derniers autour des charnières AS, BS, et l'on obtiendra aisément les deux faces ASC'' = β, BSC''' = α. On observera que l'arête rabattue suivant SC'' devra être tangente au cercle décrit du point I'' avec un rayon égal à I'G'; car ce cercle est la base du second cône T'I'G' auquel le plan SBC' est aussi tangent.

CHAPITRE IV.

DES POLYÈDRES RÉGULIERS.

68. Un polyèdre est dit *régulier* lorsque toutes ses faces sont des polygones réguliers égaux, et que tous ses angles solides sont aussi égaux entre eux. On sait qu'il