en d'', et d''SB sera alors la grandeur de la troisième face inconnue. Il y aura donc deux angles solides différents que l'on pourra composer avec les données α, β et B; résultat tout à fait analogue avec ce qui arrive dans la construction d'un triangle rectiligne où l'on connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

Il n'est pas besoin d'ajouter que si l'arc décrit avec le rayon FD′ ne faisait que toucher la droite MR′, il n'y aurait plus qu'une solution; et que le problème serait impossible, si cet arc ne rencontrait pas du tout la droite MR′.

Cependant il importe d'observer que la deuxième solution devrait être rejetée, si le point g tombait sur MR′ *au-dessous* de MF, c'est-à-dire au-dessous du plan horizontal (nous supposons ici qu'on aura soin de construire l'angle donné B, aigu ou obtus, toujours *au-dessus* du plan de projection). En effet, l'angle solide qu'on obtiendrait alors se trouverait évidemment composé avec les faces α, β, et un angle dièdre supplémentaire de B : or, comme ce dernier est ici donné graphiquement, et non pas par la valeur de son *sinus*, il ne peut y avoir d'ambiguïté sur sa grandeur, et, par conséquent, il n'est pas permis d'adopter indifféremment B ou $180° - B$.

Par la même raison, il faudrait rejeter les deux solutions et déclarer le problème impossible avec les données actuelles, si les points G et g tombaient l'un et l'autre au-dessous de l'horizontale MF; ce qui, au reste, ne pourra arriver que quand l'angle dièdre B sera obtus.

Remarque. Quoique les trois derniers problèmes du n° **55** puissent être ramenés aux trois premiers par le moyen d'un angle solide supplémentaire, ainsi que nous l'avons montré au n° **58**, il est intéressant et quelquefois utile d'en avoir une solution directe. Nous allons donc l'exposer, en prévenant toutefois les lecteurs qui commencent à étudier la Géométrie descriptive, que cette solution suppose la connaissance des plans tangents aux surfaces courbes; ainsi ils feront bien de différer la lecture de ce qui suit, jusqu'à ce qu'ils aient étudié au moins les chapitres II et III du livre second.

65. Quatrième cas. *Étant donnés deux angles dièdres* A *et* B *d'un angle solide, avec une des faces opposées* β, *trouver les autres parties.*

(*Pl.* 8, *fig*, 1.) Adoptons pour plan horizontal celui de la face inconnue γ, et traçons-y le rabattement ASC″ de la face donnée β; ensuite, perpendiculairement à l'arête SA, menons le plan vertical D″EF, sur lequel nous tracerons l'angle D′ED égal au dièdre A donné par la question. Alors, si nous faisons tourner la face ASC″ autour de AS jusqu'à ce qu'elle vienne se placer dans le plan SED′, le point D″ se transportera en D′ qui se projette horizontalement en D; et pour composer l'angle solide, il n'y aura plus qu'à conduire par l'arête (SD, ED′) un plan qui forme avec le plan horizontal un angle égal au dièdre B. A cet effet, dans le plan vertical EF, tirons la droite D′F qui fasse l'angle D′FD = B; puis, après avoir fait tourner cette droite autour de la verticale D′D pour engendrer un cône de révolution dont la base sera le cercle DF, menons ce cône à un plan tangent qui passe par l'arête (SD; ED′). Ce plan aura pour trace la droite SGB tirée du point S tangentiellement au cercle du rayon DF, laquelle sera la troisième arête de l'angle solide en question, et déterminera la face ASB = γ. Quant à la troisième face α, qui est rabattue ici suivant BSC‴, on verra aisément qu'elle se construit en prenant sur la perpendiculaire DG une longueur GD‴ égale à la génératrice D′F du cône auquel cette face est tangente.

66. Cinquième cas. *Étant donnés deux angles dièdres* A *et* B *d'un angle solide, avec la face comprise* γ, *trouver les autres parties.*

(*Pl.* 8, *fig*. 2.) Après avoir tracé sur le plan horizontal un angle ASB = γ pour représenter la face con-

nue, menons un plan vertical EF perpendiculaire à l'arête SA, et traçons-y l'angle F′EF égal au dièdre A: semblablement, dans un plan perpendiculaire à l'arête SB, construisons l'angle G′KG = B. Alors les plans SEF′ et SKG′ seront ceux des faces inconnues; et pour obtenir un second point D de la projection SDC de leur intersection, il suffira de les couper par un même plan horizontal quelconque. On prendra donc les hauteurs égales EH′ = KL′; puis en menant des droites H′F′, L′G′, respectivement parallèles aux deux lignes de terre EF, KG, on obtiendra les deux sections horizontales F′D, G′D, qui par leur rencontre feront connaître le point cherché D. Enfin, pour rabattre les deux faces qui se coupent suivant SDC, on prendra les perpendiculaires MD″ = EF′, ND‴ = KG′, et ces deux faces auront évidemment pour vraies grandeurs ASC″ et BSC‴.

67. Sixième cas. *Étant donnés les trois angles dièdres* A, B, C *d'un angle solide, trouver les trois faces*

(*Pl.* 8, *fig*. 3.) Sur le plan horizontal que nous supposons coïncider avec celui de la face inconnue γ, marquons la droite arbitraire DA pour représenter une des arêtes de cette face, et sur un plan vertical perpendiculaire à DA, traçons l'angle Y′AX égal au dièdre donné A : le plan Y′AD sera ainsi celui qui contient la face β. Ensuite, d'un point T′ choisi arbitrairement dans l'intérieur de l'angle Y′AX, abaissons sur les faces γ et β les perpendiculaires T′O, T′I′, et traçons les angles T′FO = B, T′G′I′ = C; alors, si nous faisons tourner ces angles autour des axes T′O et T′I′, ils produiront deux cônes de révolution auxquels la face inconnue α devra évidemment être tangente; de sorte que la question est réduite à mener un plan qui touche à la fois ces deux cônes, dont le sommet commun est en T′ et dont les bases sont les cercles décrits avec les rayons OF et I′G′. La solution directe consisterait à chercher la trace *horizontale* du second cône I′T′G′, et à mener une *tangente commune* à cette courbe et au cercle du rayon OF; mais on peut éviter le tracé approximatif d'une courbe par points, en recourant aux considérations suivantes.

Inscrivons une sphère au cône T′OF le long du cercle horizontal MFN : le centre ω' de cette sphère s'obtiendra en tirant la droite Fω' normale au cône dont il s'agit; et pour avoir une seconde sphère, égale à celle-là, et inscrite pareillement dans l'autre cône T′I′G′, il faudra mener à angle droit sur T′G′ la ligne T′H′ = ω'F, et achever le parallélogramme T′H′K′φ' qui fournira le centre φ' et le rayon φ'K′ de cette nouvelle sphère. Cela posé, imaginons un cylindre qui soit circonscrit à ces deux sphères : il les touchera suivant deux grands cercles perpendiculaires à son axe qui est la droite $\varphi'\omega'$; or le plan qui touchait les deux cônes à la fois se trouvait nécessairement tangent aux deux sphères : donc il est aussi tangent au cylindre actuel, et la question se réduit à mener par le point T′ un plan qui soit *tangent à cette surface unique.*

La méthode directe serait donc de tracer, dans le plan ω'V′ perpendiculaire à l'axe $\varphi'\omega'$, un cercle avec un rayon égal à ω'F; puis, de mener à ce cercle une tangente par le point où aboutirait sur ce plan la parallèle à l'axe mené par le point T′. Tout cela pourrait s'exécuter en rabattement sur le plan horizontal; mais il y a encore un moyen bien plus court. En effet, le plan cherché devant être tangent à la fois au cylindre, à la sphère ω' et au cône T′FO, son point de contact avec la sphère doit être situé : 1° sur le cercle horizontal MFN qui est la ligne de contact de la sphère et du cône; 2° sur le grand cercle contenu dans le plan ω'V′, et qui est la ligne de contact de la sphère avec le cylindre. Or ces deux cercles se coupent évidemment suivant une corde qui est projetée verticalement au point M′, et représentée en vraie position par MM′N sur le plan horizontal; donc M est le point de contact et BMS la trace horizontale du plan tangent demandé : sa trace verticale, qui doit passer par le sommet T′, sera dès lors BT′C′.

Maintenant que nous connaissons la grandeur ASB = γ de la face horizontale et la projection SC de l'arête suivant laquelle se coupent les deux plans SAC′, SBC′, il n'y a plus qu'à rabattre ces deux derniers autour des charnières AS, BS, et l'on obtiendra aisément les deux faces ASC″ = β, BSC‴ = α. On observera que l'arête rabattue suivant SC″ devra être tangente au cercle décrit du point I″ avec un rayon égal à I′G′; car ce cercle est la base du second cône T′I′G′ auquel le plan SBC′ est aussi tangent.

CHAPITRE IV.

DES POLYÈDRES RÉGULIERS.

68. Un polyèdre est dit *régulier* lorsque toutes ses faces sont des polygones réguliers égaux, et que tous ses angles solides sont aussi égaux entre eux. On sait qu'il n'existe que cinq genres de polyèdres qui remplissent ces conditions, savoir : 1° *le tétraèdre*, formé par quatre triangles équilatéraux, assemblés trois à trois autour d'un même sommet; 2° *l'octaèdre*, formé par huit triangles équilatéraux, assemblés quatre à quatre; 3° *l'icosaèdre*, formé par vingt triangles équilatéraux, assemblés cinq à cinq; 4° *l'hexaèdre ou cube*, formé par six carrés réunis trois à trois; 5° *le dodécaèdre*, composé de douze pentagones réguliers, assemblés trois à trois. Il ne saurait y en avoir d'autres, attendu qu'un plus grand nombre de triangles, de carrés ou de pentagones réguliers, que l'on voudrait réunir autour d'un même point, donnerait lieu à une somme d'angles plans qui égalerait ou surpasserait 360 degrés; et pour prouver l'existence de ces cinq corps réguliers, nous allons apprendre à les construire.

DU TÉTRAÈDRE. (*Pl.* 9, *fig.* 1.) Avec le côté donné l du polyèdre, on construira sur le plan horizontal un triangle équilatéral ABC; et au centre S du cercle circonscrit, on élèvera une verticale (S, S'H') dont la grandeur sera fournie par le côté SK d'un triangle rectangle ASK construit sur AS comme base, et avec une hypoténuse AK égale à AB. Alors, en joignant le point (S, S') avec les trois sommets primitifs, on obtiendra un corps formé par quatre triangles évidemment égaux et réguliers. Les angles trièdres sont aussi manifestement égaux.

OCTAÈDRE. (*Pl.* 9, *fig.* 2.) Avec le côté l, formons dans un plan horizontal quelconque un carré (ABCD, A'C'); puis, par le centre (S, H') élevons une verticale que nous prolongerons, au-dessus et au-dessous, d'une quantité S'H' ou S''H' égale à la demi-diagonale SB. Alors, en joignant les points (S', S) et (S'', S) avec les quatre angles du carré, nous formerons un corps composé de deux pyramides quadrangulaires, dont les huit faces seront évidemment des triangles équilatéraux : car cela revient à faire faire au carré ABCD un quart de révolution autour de sa diagonale AC ou BD. D'ailleurs les angles solides en (S, S'), (A, A'), (B, B'),... seront aussi égaux, puisque chacun d'eux appartiendra à une pyramide quadrangulaire identique avec la première (SABCD, S'A'B'C'D').

ICOSAÈDRE. (*Pl.* 9, *fig.* 3.) Avec le côté donné l, et dans un plan horizontal quelconque, construisons un pentagone régulier (ABCDE, B'A'E'); et sur son axe vertical, cherchons un point (S, S') tel, qu'en le joignant avec les sommets du pentagone, on obtienne cinq triangles équilatéraux. Pour cela, il suffit évidemment de former sur SD, comme base, un triangle rectangle DSH dont l'hypoténuse DH soit égale à l ou DE; de sorte que le côté SH de ce triangle fournira la hauteur inconnue A'S' de la pyramide pentagonale (SABCDE, S'B'E'). Dans un autre plan horizontal Q'M', dont nous fixerons plus tard la distance au plan B'E', traçons un second pentagone LMNPQ égal et concentrique avec ABCDE, mais tourné de manière que ses sommets L, M, N,... soient placés aux milieux des arcs que sous-tendraient les côtés CD, DE, EA,... dans le cercle circonscrit; puis, en prenant la distance L'S'' égale à A'S', formons la pyramide pentagonale (SLMNPQ', S''Q'M') évidemment égale à la précédente. Maintenant, joignons par des droites chaque sommet du pentagone supérieur avec les deux sommets voisins du pentagone inférieur, comme (C, C') avec

(Q, Q') et (L, L'), (D, D') avec (L, L') et (M, M'),..., et nous obtiendrons ainsi une zone intermédiaire de *dix* triangles déjà isocèles, mais qu'il faut tâcher de rendre *équilatéraux*, en choisissant convenablement l'intervalle B'Q' des deux pentagones, intervalle que nous avons laissé ci-dessus indéterminé. Or, pour que la droite (CL, C'L') soit égale à LQ, il suffit de construire le triangle LCK avec une hypoténuse LK égale à LQ, et le côté CK donnera la différence de niveau qui doit exister entre C' et L', ou bien l'intervalle B'Q' qu'il fallait mettre entre les deux pentagones parallèles. On aura donc ainsi formé un corps composé de *vingt* triangles équilatéraux, assemblés cinq à cinq; et les angles solides seront aussi égaux entre eux, parce qu'à chaque sommet (C, C'), (L, L'),... on pourra concevoir une pyramide pentagonale identique avec la première (SABCDE, S'B'E').

HEXAÈDRE. (*Pl.* 9, *fig.* 4.) Après avoir construit le carré ABCD, on élèvera par ses quatre angles des verticales (A, A'A''), (B, B'B''),... égales à AB; et en réunissant leurs extrémités supérieures par un autre carré, on obtiendra immédiatement le solide demandé, lequel n'est autre chose qu'un cube.

DODÉCAÈDRE. (*Pl.* 9, *fig.* 5.) Dans un plan horizontal quelconque B'A'E', traçons un pentagone régulier ABCDE dont les côtés soient égaux à la longueur l assignée pour les arêtes du polyèdre; puis à chaque sommet (A, A'), (B, B'), (C, C'),... ajoutons deux autres pentagones égaux au premier, et inclinés de manière à former cinq angles trièdres. Par là, nous obtiendrons une calotte composée de six pentagones, et terminée au contour (KRSTUVXYZW, K'R'S'T'U'V'X'Z'W') dont nous enseignerons tout à l'heure à trouver les projections. Traçons encore, dans le plan horizontal, un pentagone LMNPQ égal et concentrique avec ABCDE, mais tourné de manière que ses angles soient aux milieux des arcs que sous-tendraient les côtés AB, BC,... dans le cercle circonscrit; puis, sur ce pentagone LMNPQ, construisons une calotte concave identique avec la précédente, et élevons cette dernière le long de la verticale (O, L'A'), jusqu'à ce que ses angles saillants et rentrants aillent coïncider avec les angles rentrants et les angles saillants de la première calotte. Tout cela est manifestement possible, puisqu'il ne s'agit que de réunir, à chaque sommet du contour, trois pentagones identiques avec ceux qui ont déjà formé les angles trièdres (A, A'), (B, B''),...; mais il restera à savoir quelle est la distance verticale G'H'' qui séparera les deux pentagones horizontaux. D'ailleurs, par la réunion de ces deux calottes, on aura produit un polyèdre composé de *douze* pentagones égaux, et où les angles solides seront aussi égaux entre eux, puisque chacun sera formé par trois pentagones identiques.

Pour construire les projections de ce corps avec plus de clarté, commençons par la calotte inférieure dont nous placerons la base LMNPQ dans un plan horizontal G'Q'M' choisi à volonté; puis rabattons sur ce plan les trois faces de l'angle trièdre (Q, Q'), en traçant les deux pentagones PxyzQ, Q$z'wk$L, identiques avec LMNPQ. Alors, en opérant comme pour chercher les angles dièdres (n° 59), il faudra mener par les points rabattus z et z' deux plans verticaux, l'un $z\alpha$ perpendiculaire à PQ, l'autre $z'\mathcal{E}$ perpendiculaire à QL; ces plans se coupant suivant la verticale Z, c'est sur cette droite que viendront se réunir les points z et z' lorsqu'on recomposera l'angle solide, et conséquemment Z est la projection horizontale d'un des sommets du polyèdre, tandis qu'une de ses arêtes sera projetée sur ZQ qui doit évidemment converger vers le centre O. Quant à la projection verticale Z', on observera que le sommet en question appartient à un triangle rectangle qui a pour base $Z\alpha$ et pour hypoténuse αz : si donc on construit ainsi le triangle $\alpha Z\delta$, le côté $Z\delta$ indiquera la hauteur G'H' qu'il faut porter sur le plan vertical pour obtenir la projection Z', d'où l'on déduira l'arête Z'Q'. On aurait pu aussi remarquer que, connaissant la projection horizontale ZQ de l'arête en question, et sa grandeur absolue qui égale PQ, on obtiendra la différence de niveau G'H' en construisant un triangle rectangle dont la base soit ZQ et l'hypoténuse PQ.

Pour le sommet rabattu en y, il est certain que pendant le relèvement de la face xyzQP, ce sommet ne sortira pas du plan vertical $y\gamma$O perpendiculaire à la charnière PQ; et que sa plus courte distance $y\gamma$ finira par prendre une position parallèle à $\alpha\delta$. Si donc on prolonge cette dernière jusqu'à ce que $\alpha\varepsilon$ soit égale à $y\gamma$, et qu'on abaisse la verticale $\varepsilon\lambda$, le pied λ devra être rapporté sur $y\gamma$ pour fournir la projection horizontale Y du sommet en question. Quant à la projection verticale Y', on l'obtiendra en remarquant qu'elle doit être à une hauteur G'H'' égale à $\lambda\varepsilon$. On aurait pu obtenir le point Y en observant que, par suite de la symétrie des deux calottes, la distance BY doit égaler QZ qui est déjà trouvée; et la hauteur G'H'' se déduirait de cette considération, que la droite projetée sur $Y\gamma$ a pour vraie grandeur γOM.

Enfin, la hauteur H''M''' de la calotte supérieure doit manifestement être prise égale à G'H', ce qui permettra de tracer les projections verticales A', B', C', D', E', correspondantes à A, B, C, D, E; et on agira semblablement pour W', K', R'..., après avoir tracé sur le plan horizontal les longueurs CW, LK, DR,..., égales toutes à la distance QZ, que nous avons enseigné à déterminer.

LIVRE II.

DES SURFACES ET DE LEURS PLANS TANGENTS.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA GÉNÉRATION DES SURFACES, ET DE LEUR REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

69. Pour représenter graphiquement une surface, nous avons annoncé (nº 7) qu'il ne faudrait pas, comme pour les lignes, chercher à construire sur deux plans fixes les projections des différents points de ce lieu géométrique; en effet, attendu que sur une surface, et à partir d'un point donné, on peut cheminer dans une infinité de directions, le moyen précédent n'aurait d'autre résultat que de charger

les plans fixes d'une multitude de points et de lignes dont on n'apercevrait pas la liaison, et dont l'ensemble surtout ne peindrait nullement, à l'œil du spectateur, la forme de la surface, sa courbure plus ou moins prononcée, et le nombre de ses nappes. Nous emploierons donc un autre procédé (nº **93**), déduit de la nature même de cette grandeur, dont il faut, avant tout, établir une définition précise.

70. Par le mot *surface* on ne doit pas entendre simplement une série de points ou de courbes aussi rapprochés qu'on voudra les uns des autres, mais n'ayant entre eux aucune dépendance fixe; il faut encore que ces points ou ces lignes soient soumis à quelque liaison commune et continue, dont l'expression analytique ne serait autre chose que l'équation de la surface, et dont la définition géométrique doit être énoncée ainsi :

Une surface est le lieu de toutes les positions que prend successivement, dans l'espace, une ligne mobile qui change de situation, et souvent même de forme d'après une loi déterminée et continue.

La ligne mobile se nomme la GÉNÉRATRICE, et par ces mots, *une loi déterminée*, il faut entendre des conditions telles, que, pour chaque point donné de l'espace, elles ne laissent plus rien d'arbitraire dans la forme ni dans la position de la génératrice. Or le moyen le plus commode ordinairement pour exprimer (du moins en partie) la loi de ce mouvement, c'est d'assigner une ou plusieurs lignes fixes, nommées DIRECTRICES, sur lesquelles devra constamment s'appuyer la génératrice dans toutes ses positions : de sorte que pour définir complétement une surface particulière, il faut indiquer la nature de la génératrice, la manière dont elle se meut, et les directrices sur lesquelles elle doit glisser pendant son mouvement (*). Lorsqu'on change seulement ces directrices, on obtient diverses surfaces qui appartiennent toutes à *une même famille*; et d'ailleurs on doit sentir que chaque surface individuelle est susceptible d'une infinité de modes de génération. Nous allons en citer plusieurs exemples, tant pour éclaircir la définition générale, que pour acquérir

(*) C'est effectivement par la traduction en analyse de ce mode de génération, ou d'une propriété équivalente, que l'on obtient toujours l'équation de la surface. (Voyez l'*Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions*, chap. XIV.) Réciproquement, lorsqu'un lieu géométrique est défini immédiatement par l'équation $F(x, y, z) = 0$, si l'on coupe cette surface par divers plans, horizontaux par exemple, on obtient les courbes

$$\begin{array}{lcl} (1)\ z=\alpha & \text{et} & F(x,y,\alpha)=0,\ (2) \\ z=\alpha' & \text{et} & F(x,y,\alpha')=0, \\ z=\alpha'' & \text{et} & F(x,y,\alpha'')=0, \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \end{array}$$

dont une quelconque est ce que devient la première quand on attribue à la constante α les valeurs successives α', α'', par conséquent, ces diverses courbes sont les positions successives que prendrait la courbe (1) et (2) si on la faisait mouvoir dans des plans parallèles, en changeant d'ailleurs ses dimensions d'après une loi qui dépendrait de la manière dont la constante α entrera dans l'équation (2) : aussi, en éliminant ce paramètre entre (1) et (2), on retombe évidemment sur l'équation $F(x, y, z) = 0$, qui se trouve donc le lieu de toutes les positions de la première courbe mobile. Ajoutons d'ailleurs que, comme on peut adopter une infinité de directions pour les plans sécants parallèles, ou même employer d'autres surfaces sécantes, il doit exister pour chaque surface une infinité de modes de génération.