même plan vertical; mais comparons AD avec une droite quelconque B_2D_2 de l'autre système. Ces deux lignes sont encore projetées sur les tangentes au cercle de gorge DT et D_2T, et puisque celles-ci se coupent en T, la verticale TS′ ira nécessairement rencontrer les droites en question AD et B_2D_2; mais cette rencontre aura lieu pour chacune d'elles au-dessous du cercle de gorge, attendu que DA est inclinée à gauche du méridien ZOD, et D_2B_2 à droite du méridien ZOD_2, tandis que le point T se trouve entre deux. D'ailleurs, d'après la forme de la méridienne, il est évident qu'une droite comme TS′, qui est parallèle à l'axe OZ, ne peut percer la surface qu'en deux points, dont *un seul* S′ sera sur la nappe inférieure au cercle de gorge; par conséquent, ce point unique devra coïncider avec ceux où la verticale TS′ a déjà rencontré les génératrices DA et D_2B_2 qui sont sur cette nappe; donc ces génératrices se coupent effectivement au point S′.

Il faut seulement observer que quand on comparera deux droites appartenant l'une au système A, l'autre au système B, et passant par les extrémités d'un même diamètre du cercle de gorge, ces droites auront les projections parallèles, et elles seront elles-mêmes dans l'espace *parallèles l'une à l'autre;* de sorte que leur rencontre n'aura plus lieu qu'à une distance infinie, mais du moins ces deux génératrices seront encore dans un même plan.

On démontrera d'une manière analogue que chaque génératrice du système B coupe, sans changer de position, toutes les génératrices du système A, ou du moins se trouve dans un même plan avec chacune d'elles.

145. On désigne sous le nom général de SURFACE GAUCHE, toute surface engendrée par *une droite qui se meut de telle sorte que ses positions consécutives ne se trouvent pas deux à deux dans un même plan*. Or, en considérant l'hyperboloïde actuel, soit comme le lieu des diverses positions A, A_2, A_3,... que prend la génératrice AD dans son mouvement de révolution autour de OZ, soit comme le lieu des diverses droites B, B_2, B_3,... de l'autre système, on voit (nº **145**) qu'il satisfera à la définition précédente; par conséquent l'hyperboloïde de révolution à une nappe appartient à cette classe générale de surfaces que l'on nomme *gauches*, et dont nous nous occuperons d'une manière spéciale au livre VII.

146. (*Fig.* 47.) Si par le centre O de l'hyperboloïde, on mène, parallèlement aux génératrices DA et DB, deux droites Oa et Ob, celles-ci formeront des angles égaux avec la verticale OZ, et par conséquent elles décriront, en tournant autour de OZ, un seul et même cône droit dont toutes les arêtes seront respectivement *parallèles aux génératrices* A, A_2, A_3,... et B, B_2, B_3,... de l'hyperboloïde. Ce sera le *cône asymptotique* de cette dernière surface; car, pour le déduire de celle-ci, il suffit évidemment de poser

$$\text{OD} = \delta = 0, \quad \text{dans} \quad \alpha^2 x^2 - z^2 = \alpha^2 \delta^2$$

qui représentait (nº **140**) le méridien de l'hyperboloïde : or, par cette hypothèse, on obtient pour le méridien du cône droit, $z = \pm \alpha x$; c'est-à-dire deux droites qui sont bien les asymptotes de l'hyperbole précédente.

147. D'ailleurs, lorsque l'on fait varier la distance δ, sans changer α ou l'inclinaison de la génératrice AD, on obtient successivement divers hyperboloïdes qui ont pour méridiens des courbes *semblables;* car les axes de l'hyperbole sont δ et $\alpha\delta$, et leur rapport est α, quantité indépendante de la distance δ. Il résulte de là que tous ces hyperboloïdes sont des surfaces semblables et concentriques; et comme cette similitude doit s'étendre aussi au cône asymptotique pour lequel δ est nulle, on pourra affirmer que, quand un même plan coupera l'hyperboloïde et le cône asymptotique, les sections faites ainsi dans ces deux surfaces seront *des courbes semblables* et *concentriques* (*). Cette remarque nous sera utile plus tard.

148. Après avoir fait connaître la nature et les principales propriétés de l'hyperboloïde engendré par la révolution d'une droite, occupons-nous maintenant de la représentation exacte de cette surface au moyen de deux plans de projection. Nous regarderons toujours l'axe fixe comme vertical, et alors ses projections seront O et I′O′Z′ (*fig.* 46); quant à la droite mobile, prenons-la dans une situation quelconque où elle sera projetée suivant ADB et A′D′ϐ; puis construisons d'abord la méridienne de la surface, en cherchant les points dans lesquels le plan vertical OG est rencontré par les positions successives de la droite (AB, A′ϐ). Or, déjà dans la situation actuelle, cette droite perce le plan OG au point (M, M″), lequel appartient à la courbe demandée, et celle-ci devra *toucher* en ce point la projection A′M″ϐ. En effet, quoique dans l'espace la tangente de la méridienne et la droite (AB, A′ϐ) soient très-distinctes l'une de l'autre, ces droites sont néanmoins situées toutes deux dans le plan tangent de la surface au point (M, M″); et comme ce plan est nécessairement perpendiculaire (nº **129**) au plan méridien OG, et par conséquent au plan vertical de projection, il arrivera ici que A′ϐ se confondra avec la projection verticale de la tangente, et qu'ainsi la droite A′ϐ touchera elle-même la projection de la courbe méridienne en M″.

Ensuite, un point quelconque (n, n') de AB décrira, pendant le mouvement de révolution, un arc de cercle projeté sur nN et sur l'horizontale n'N′ : donc ce point (n, n'), quand il arrivera dans le plan vertical OG, se trouvera projeté en (N, N′); ainsi ce sera là un nouveau point de la courbe méridienne G′N′M′G″, et tous les autres se construiront de la même manière. En appliquant ce procédé à l'extrémité (D, D′) de l'horizontale (OD, O′D′), qui est perpendiculaire à la fois sur l'axe et sur la génératrice, et qui mesure leur plus courte distance, on obtiendra le point (F, F′) de la méridienne le plus rapproché de l'axe, et c'est ce point qui, dans la révolution complète de la droite mobile, décrira le plus petit des parallèles de la surface, ou le *cercle de gorge* projeté ici sur DFE et E′F′. De même, le pied (A, A′) de la génératrice, décrivant un cercle ALG qui sera la trace horizontale de la surface, fournira un point (G, G′) de la méridienne : et quoique cette courbe doive évidemment s'étendre d'une manière illimitée, puisque la droite génératrice a elle-même une longueur indéfinie, néanmoins, pour donner une idée plus nette de la

(*) Voyez l'*Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions*, chap. IX.

surface, nous admettrons que la droite mobile est terminée aux deux points (A, A') et (B, $\mathcal{C}$), également distants du point (D, D') qui décrit le cercle de gorge; de sorte que la portion de surface que nous considérerons ici, sera terminée à deux cercles égaux projetés horizontalement sur GAH, et verticalement sur G'H' et G''H''. Au reste, nous avons démontré (nº **140**) que le méridien G'F'G'' était une branche d'hyperbole qui avait pour axe réel le diamètre E'F' du cercle de gorge; et l'on devra observer qu'ici, *comme dans toute surface de révolution*, le méridien principal G'F'G'' forme précisément le contour apparent de la surface par rapport au plan vertical, puisque tous les plans tangents le long de ce méridien lui sont perpendiculaires (nº **129**). Par une raison semblable, le contour apparent de l'hyperboloïde relativement au plan horizontal, est le cercle de gorge DFE le long duquel tous les plans tangents sont évidemment verticaux.

149. (*Fig.* 46.) Pour compléter la représentation graphique de cet hyperboloïde, d'après le mode de génération par une ligne droite, il faut construire un certain nombre de positions de cette génératrice rectiligne. Or, puisqu'elle doit rester à une distance constante de l'axe (O, O'Z'), sa projection horizontale sera toujours tangente au cercle DFE; menons donc à volonté la tangente $A_2D_2B_2$, puis projetons le pied A_2 sur la ligne de terre en A'_2, et le point de contact D_2 sur E'F' en D'_2; alors nous obtiendrons $A'_2\,D'_2\,\mathcal{C}_2$ pour la projection verticale de la droite qui était projetée horizontalement suivant $A_2\,B_2$: d'ailleurs, l'extrémité $\mathcal{C}_2$ qui est sur le cercle supérieur G''H'', devra évidemment se trouver projetée en B_2, ce qui offrira une vérification. Les autres positions de la génératrice se construiront d'une manière analogue, et leurs projections verticales devront encore *toucher* l'hyperbole méridienne, ainsi que nous l'avons démontré au numéro précédent pour la première droite ADB; seulement, il faut observer que quand on choisira la projection horizontale parallèle à la ligne de terre, comme KL, la projection verticale correspondante Q'$\mathcal{C}$ sera *l'asymptote* de l'hyperbole, puisqu'en effet une pareille génératrice ne rencontrera plus le plan méridien OG qu'à une distance infinie, sans cesser d'être, en projection verticale, tangente à l'hyperbole méridienne.

150. Pour obtenir des résultats plus symétriques, on a, dans l'épure actuelle, divisé le cercle GAH en quatorze parties égales, et tracé d'abord les cordes AB, A_2B_2, $A_3\,B_3$,..., de manière à sous-tendre un même nombre d'arcs partiels; par là ces cordes, nécessairement égales, se sont trouvées tangentes à un même cercle EDF, puis on en a déduit les projections verticales, comme nous l'avons dit au numéro précédent. D'ailleurs, quoique ces cordes aboutissent deux à deux aux mêmes points de division sur le cercle GAH, on distinguera aisément les parties situées au-dessous du cercle de gorge d'avec les parties supérieures, puisque les premières étant invisibles sur le plan horizontal, sont ici représentées par des *lignes ponctuées*. Quant au plan vertical, les portions de génératrices situées au delà du plan méridien GOH qui renferme le contour apparent de la surface (nº **148**) par rapport à ce plan de projection, sont les seules qui deviennent invisibles et qui aient dû être *ponctuées*.

151. On sait (nº **141**) que l'hyperboloïde admet un autre système de génératrices rectilignes, projetées également sur les tangentes au cercle de gorge AB, A_2B_2,..., mais qui ont dans l'espace une position inverse par rapport à la verticale. Par exemple, celle de ces nouvelles droites qui serait projetée suivant BDA (*), aurait son pied en (B, B') et son extrémité supérieure en (A, α), tandis qu'elle couperait la droite ADB du premier système au point (D, D'); ainsi elle aurait pour projection verticale B'D'α, ligne qui a déjà reçu la projection d'une droite LMC du premier système. C'est pour éviter cette coïncidence que nous n'avons pas voulu représenter, sur l'épure, les génératrices des deux systèmes à la fois; car autrement, les parties pleines des unes tombant sur les parties ponctuées des autres, il n'aurait plus été possible de distinguer les portions visibles ou invisibles dans chacun des systèmes. Au surplus, il sera toujours facile, même sur l'épure actuelle, de retrouver les droites du système B quand on en aura besoin, puisqu'il suffira de prendre les portions pleines pour les parties ponctuées, et réciproquement, comme nous venons de l'indiquer pour la droite BDA. On pourra aussi multiplier davantage les génératrices, afin d'obtenir plus *d'effet* dans le dessin; mais nous avons cru devoir ici sacrifier quelque chose sous ce dernier rapport, afin d'offrir plus de netteté dans la position des points et des lignes remarquables qu'il fallait signaler à l'attention du lecteur.

152. (*Fig.* 46.) *Du plan tangent à l'hyperboloïde.* Soit R la projection horizontale du point de contact, assignée par la question : pour obtenir l'autre projection, j'observe que par le point considéré sur la surface, il passe une génératrice du système A, laquelle est projetée horizontalement suivant une tangente PRA au cercle de gorge, et verticalement suivant P'α; si donc je projette R en R' sur cette dernière droite, j'aurai déterminé complétement le point de contact (R, R'). Mais il y a une seconde solution; car, puisque je peux mener de R une autre tangente BRQ au cercle de gorge, laquelle représentera aussi une génératrice du système A projetée verticalement suivant B'Q'', je n'aurai qu'à projeter R en R'' sur cette dernière ligne, et j'obtiendrai un second point (R, R'') qui sera situé sur l'hyperboloïde, et qui aura pareillement sa projection horizontale en R.

153. Cela posé, considérons le point (R, R'), et rappelons-nous (nº **142**) qu'il doit passer par ce point unique deux génératrices de l'hyperboloïde : l'une est la droite (PRA, P'R'α) déjà employée et qui appartient au système A; l'autre appartient au système B et serait projetée sur (QRB, Q'R'$\mathcal{C}$). Donc le plan tangent en (R, R') devra renfermer ces deux droites, et par suite la trace horizontale de ce plan sera QPS. Pour déterminer l'autre trace SV', il suffira d'imaginer dans ce plan tangent et par le point (R, R'), une horizontale dont les projections seront RV parallèle à la trace QPS, et R'V' parallèle à la ligne de terre; puis, on construira le point (V, V') où cette horizontale va percer le plan vertical.

(*) Pour indiquer plus clairement la situation des diverses génératrices, nous aurons toujours soin de citer, en premier lieu, la lettre qui désignera l'extrémité *inférieure* de la droite dont nous parlerons.

Quant au plan tangent relatif au point (R, R''), il se trouvera déterminé par les deux droites de systèmes opposés, qui se coupent en cet endroit :

L'une est (BRQ, B'R''Q'') pour le système A,

L'autre est (ARP, A'R''P'') pour le système B.

Ainsi la trace horizontale de ce plan sera la ligne AB, et la trace verticale s'obtiendrait, comme ci-dessus, par le secours d'une horizontale menée dans ce même plan à partir du point (R, R'').

154. Revenons au plan tangent PSV' qui touche l'hyperboloïde au point (R, R') (*fig.* 46), et remarquons que sa trace horizontale PQ se trouve bien perpendiculaire au plan méridien OR qui passerait par le point de contact, ainsi que cela doit arriver (nº **134**) dans toute surface de révolution dont l'axe est vertical : mais ce plan tangent PSV' n'est pas tangent à l'hyperboloïde dans tout autre point, tel que (T, T') de la droite (PRA, P'R'α) qu'il renferme, puisque sa trace horizontale PQ ne saurait être perpendiculaire au méridien OT. D'ailleurs, par ce point (T, T') de la droite (PRA, P'R'α) qui appartient au système A, il passe une génératrice (HTB$_2$, H'T'$\mathcal{E}_2$) du système B, laquelle est évidemment située *hors du plan* dont nous parlons, puisque le pied de cette génératrice est en H hors de la direction de PQ. Par conséquent, le plan PSV' ne satisfait pas, pour le point (T, T'), à la définition du véritable contact, qui consiste à renfermer les tangentes à toutes les lignes situées sur la surface; tandis qu'au point (R, R') ce plan contient non-seulement les deux génératrices qui s'y coupent, mais aussi la tangente du parallèle qui est précisément (RV, R'V'), la tangente du méridien, et celle de toute autre courbe tracée par ce point sur l'hyperboloïde.

Nous avions déjà prouvé cette propriété singulière du plan tangent à l'hyperboloïde gauche dans le nº **142**; mais nous avons cru devoir insister sur cette circonstance et l'appuyer ici par de nouvelles considérations, parce qu'il importe de se former une idée bien nette de la position d'un plan qui est ainsi *tangent dans un point* (R, R'), et *sécant dans tous les autres points* communs avec la surface, qu'il coupe ici suivant les deux droites (PRA, P'R'α) et (QRB, Q'R'$\mathcal{E}$).

155. Tous les problèmes relatifs aux plans tangents, que nous avons résolus dans ce livre, portaient sur des surfaces *cylindriques*, *coniques*, ou *de révolution*. Nous n'en ajouterons pas maintenant de nouveaux exemples, pour d'autres genres de surfaces, parce que la méthode se réduit dans tous les cas à employer le procédé général indiqué au nº **103**, et que nous rencontrerons dans la suite assez d'occasions de l'appliquer; mais il resterait à traiter la question du plan tangent, *lorsque le point de contact n'est pas assigné* sur la surface. Nous l'avons fait tout de suite à l'égard des cylindres et des cônes, parce qu'ici la solution était trop simple pour la différer; quant aux autres surfaces, il n'en est pas de même, et l'on a besoin quelquefois de s'aider des méthodes relatives aux intersections de surfaces; c'est pourquoi nous renverrons les problèmes de ce genre à un des livres suivants.

LIVRE III.

DES SURFACES DÉVELOPPABLES ET DES ENVELOPPES.

CHAPITRE PREMIER.

DES SURFACES DÉVELOPPABLES.

156. Une surface est dite DÉVELOPPABLE lorsque, étant supposée flexible, mais inextensible, *elle peut être étendue sur un plan, sans éprouver aucun changement dans sa superficie*. Or on sent bien que toute surface, par exemple une portion quelconque de sphère, ne jouit pas de cette propriété; c'est pourquoi il devra y avoir, dans le mode de génération d'une surface développable, quelque condition particulière qui lui permette de subir cette transformation, et c'est ce que nous expliquerons bientôt (nº **175**). Mais avant de nous élever à ces généralités, il nous paraît utile d'examiner d'abord deux genres particuliers de surfaces qui peuvent ainsi être *développées* sur un plan ; ce sont les cylindres et les cônes. D'ailleurs, le moment est venu d'introduire ici les considérations de la méthode infinitésimale qui, bien entendue, présentera toute la rigueur désirable, et offrira dans la suite le double avantage d'abréger les raisonnements, et de se prêter avec facilité aux opérations graphiques de la Géométrie descriptive.

157. La tangente d'une courbe étant la limite des positions que prend une sécante, lorsque deux de ses points de section se rapprochent indéfiniment, on peut considérer la tangente comme une droite qui passe par deux points *infiniment voisins* sur la courbe, ou qui a un *élément* de commun avec elle; par là on substitue, il est vrai, à la courbe proposée, un polygone inscrit dont les côtés et les angles extérieurs sont infiniment petits, et dont chaque côté prolongé remplace une tangente; mais toute propriété qui, dans un tel polygone, sera vraie indépendamment de la grandeur absolue de ses côtés et des angles compris, subsistera également lorsqu'on multipliera de plus en plus ces petites cordes en les rapprochant de la courbe; par conséquent, cette propriété aura lieu pareillement quand on passera à la limite, c'est-à-dire quand on considérera la courbe en question et ses véritables tangentes.

158. D'ailleurs, nous avons démontré rigoureusement (nº **95**) que, dans toute surface, les diverses courbes tracées par un même point avaient leurs tangentes en ce point situées dans un plan unique; donc ce plan, que nous avons nommé *tangent*, pourra être considéré comme ayant de commun avec la surface un *élément superficiel* formé par l'ensemble des *éléments linéaires* communs aux courbes et à leurs tangentes; ce sera l'élément de contact, qui se trouvera en général *infiniment petit dans tous les sens*, à moins que la surface ne soit d'un genre tel, que le plan tangent se trouve le même pour plusieurs points consécutifs.