cône dont il s'agit, le long de l'arête RP'. Mais, dans toute surface de révolution, le plan tangent (nº **129**) est perpendiculaire au plan méridien qui passe par le point de contact; donc ici le plan RP'R' est perpendiculaire sur le plan AM'A' qui contient l'axe du cône et l'arête de contact P'R. Or le premier de ces plans n'est autre chose que le plan osculateur PP'P'' de la courbe proposée, et le second est précisément le plan tangent de la surface développable; par conséquent, il est vrai de dire que chaque plan osculateur de la courbe minimum est normal à cette dernière surface.

189. (*Fig.* 53.) Cette propriété dont jouit la courbe *minimum* est d'autant plus remarquable qu'elle se trouve également vérifiée, quelle que soit la surface sur laquelle est tracée une pareille courbe. Soit, en effet, CND la ligne la plus courte entre toutes celles qui, sur une surface quelconque S, réunissent les deux points C et D : si par tous les points N, N', N'',... de cette courbe, nous menons des plans tangents à S, ils formeront, comme nous l'avons vu (nº **182**), une surface développable S' circonscrite à S, et qui aura évidemment les mêmes plans tangents que cette dernière tout le long de la courbe minimum. Il suit de là que, dans la direction CND, chaque élément superficiel (infiniment petit en tout sens) de la surface S sera commun à la surface S', et qu'ainsi la courbe CND, qui est supposée minimum sur la première, devra aussi se trouver minimum sur la seconde; mais, par cette dernière condition, la courbe CND aura ses plans osculateurs perpendiculaires (nº **188**) aux plans tangents de la surface développable S'; et comme ceux-ci sont les mêmes que les plans tangents de S, on est en droit de conclure que, *sur une surface quelconque, la courbe minimum a tous ses plans osculateurs* NORMAUX *à cette surface.*

CHAPITRE II.

DES SURFACES ENVELOPPES.

190. On appelle *surface enveloppe*, ou simplement *enveloppe*, le lieu des intersections consécutives d'une autre surface mobile, qui varie de position et même de forme, d'après une loi déterminée. Ce lieu ayant, comme nous allons le voir, la propriété de toucher le long d'une courbe, chacune des positions de la surface mobile est appelée avec raison l'enveloppe de toutes ces positions, tandis que ces dernières se nomment les *enveloppées*. D'ailleurs, par un motif que nous expliquerons plus tard (nº **203**), on donne le nom de *caractéristique* à l'intersection de deux enveloppées consécutives, et c'est le long de cette caractéristique qu'a lieu le contact de l'enveloppe et de l'enveloppée. Ainsi, lorsqu'un plan se meut suivant une certaine loi (nºs **182-186**), il admet pour enveloppe une surface développable, lieu de ses intersections successives qui sont ici des droites, et voilà les caractéristiques; tandis que les enveloppées sont les diverses positions du plan mobile, dont chacune touche l'enveloppe suivant une de ces caractéristiques. Mais pour mieux éclaircir ces

notions générales, il faut considérer des exemples moins particuliers, et où les enveloppées soient des surfaces courbes.

191. (*Fig.* 55.) Imaginons une sphère mobile dont le centre O parcourt la verticale OZ, et dont le rayon OA varie suivant une certaine loi; de manière, par exemple, qu'il coïncide successivement avec les diverses ordonnées OA, O'A', O''A'',... d'une courbe AA'X tracée dans le plan vertical de la figure. Alors deux sphères infiniment voisines, O et O', se couperont évidemment suivant un cercle horizontal projeté sur la corde BC; de même la sphère O' coupera la troisième O'' suivant le cercle B'C', et ainsi des autres. Or tous ces cercles ayant leurs centres sur OZ et leurs plans perpendiculaires à cette droite, appartiendront (nº **78**) à une surface de révolution qui *touchera*, en l'enveloppant, chacune des sphères mobiles. En effet, les deux cercles infiniment voisins BC et B'C' se trouvant à la fois sur la surface de révolution et sur la sphère O', ces deux surfaces ont de communs tous les éléments superficiels situés sur la zone infiniment étroite BB'C'C : par conséquent elles ont l'une et l'autre les mêmes plans tangents, ou bien elles se touchent tout le long de cette zone. De même, la surface de révolution sera tangente à la sphère O'' le long de la zone B'B''C''C'; ainsi cette surface générale est bien l'*enveloppe* de toutes les sphères qui sont les *enveloppées*, et le contact avec chacune d'elles a lieu le long d'un des cercles BC, B'C',..., qui sont les *caractéristiques* ou les intersections de deux enveloppées consécutives.

192. Si l'on ne considère, pour un instant, que les grands cercles des sphères mobiles qui sont situés dans le plan vertical de la figure, on voit que leurs circonférences forment, en s'entre-coupant, une suite d'arcs BB', B'B'',... dont *la ligne enveloppe* donnera évidemment le méridien DBB'F de la surface de révolution. La forme de ce méridien dépendra de la loi suivant laquelle varieront les rayons OA, O'A',...; si, par exemple, tous ces rayons étaient *constants* de grandeur, les caractéristiques seraient toutes des grands cercles égaux entre eux, et le méridien une droite parallèle à OZ. Ainsi, *lorsqu'une sphère constante de rayon a son centre en mouvement sur une droite, l'enveloppe* de l'espace qu'elle parcourt *est un cylindre de révolution.*

193. Lorsqu'au contraire le méridien DBF d'une surface de révolution est assigné d'avance, il faut évidemment rendre chacune des enveloppées sphériques, tangente à ce méridien, en prenant les normales BO, B'O',... pour les rayons de ces différentes sphères; ainsi, l'on peut dire généralement que *toute surface de révolution est l'enveloppe de l'espace parcouru par une sphère mobile, qui a pour rayon variable la portion de chaque normale comprise entre le méridien et l'axe.*

194. Les surfaces de révolution admettent aussi pour enveloppée une autre surface génératrice dont la forme très-simple en rend l'emploi fort utile dans certains arts. Imaginons que par des points très-voisins M, M', M'',... (*fig.* 55) pris sur le méridien FDY, on lui mène des tangentes MT, M'T', M''T'', et qu'on les fasse tourner, en même temps que le méridien, autour de l'axe YZ. Par là, ces tangentes engendreront des cônes droits qui toucheront la surface de révolution chacun le long d'un parallèle; car la tangente MT ayant avec la méridienne l'élément MM′ commun, tous les éléments superficiels situés sur la zone infiniment étroite MM′N′N seront communs au cône TMN et à la surface générale; donc ces deux surfaces se trouveront tangentes l'une à l'autre tout le long de cette zone. D'ailleurs, deux cônes consécutifs, TMN et T′M′N′, se couperont évidemment suivant le parallèle M′N′ qui réunit les deux zones de contact; d'où il résulte que toute surface de révolution peut aussi être regardée comme *l'enveloppe* (*) *de l'espace parcouru par un cône droit variable* TMN, *qui se meut de manière que son sommet reste sur l'axe, pendant que sa génératrice rectiligne demeure tangente à la méridienne.*

195. C'est par ce mode de génération que les tourneurs exécutent des surfaces de révolution. En effet, lorsqu'ils présentent au solide animé d'une vitesse de rotation le tranchant rectiligne de leur ciseau, ils produisent sur ce cylindre un tronc de cône qui est une des enveloppées de la surface générale qu'ils veulent obtenir; puis, en variant convenablement l'inclinaison de ciseau, ils engendrent une série de zones coniques qu'ils savent fondre ensuite les unes dans les autres, en intercalant de nouvelles enveloppées, jusqu'à ce qu'ils arrivent à une surface qui soit sensiblement continue.

C'est encore par le secours des enveloppes que les ferblantiers exécutent des surfaces développables; car ils se servent d'une enclume cylindrique ou conique, pour plier peu à peu la feuille de fer-blanc le long d'une série de droites tracées dans son plan; et celui-ci devient alors l'enveloppée mobile dont les petites zones élémentaires composent la surface générale, laquelle se trouve ainsi l'enveloppe de toutes les positions qu'a prises le plan mobile de la feuille de métal.

196. Outre les enveloppées sphériques ou coniques qu'admettent les surfaces de révolution, ces dernières pourraient être encore produites par le mouvement d'un cylindre. En effet, si, par tous les points de la méridienne, on mène des droites perpendiculaires à son plan, et que l'on fasse tourner ce cylindre autour de l'axe, l'enveloppe de toutes ces positions sera nécessairement la même surface de révolution que produirait la rotation de la méridienne; car chaque arête de ce cylindre mobile a évidemment, pour courbe enveloppe de toutes ses positions individuelles, le parallèle de la surface qu'aurait décrit le point correspondant de la méridienne.

Avant de passer à une espèce très-générale de surfaces enveloppes, qui manifestera une circonstance bien remarquable produite par les intersections des caractéristiques, étudions d'abord quelques propriétés des *lignes enveloppes* relativement aux courbes planes.

197. DÉVELOPPÉES *des courbes planes*. (*Fig.* 56.) Soit ABX une courbe quelconque tracée dans un plan; concevons-la divisée en éléments égaux BB′ = B′B″ = B″B‴, . . ., et, par le milieu de ces éléments, menons les normales infiniment

(*) Il ne faut pas attacher à ce mot d'*enveloppe* l'idée d'une surface qui en renferme d'autres dans son intérieur. L'enveloppe peut être en dehors ou en dedans des enveloppées, et l'on veut seulement exprimer qu'elle touche chacune de celles-ci tout le long d'une courbe.

voisines MC, M′C′, M″C″, . . . qui, par leurs intersections successives, formeront une courbe CC′C″. . . à laquelle elles seront toutes tangentes. Cette courbe DCY, *enveloppe de toutes les normales* à la ligne primitive ABX, se nomme *la développée* de celle-ci, tandis que la ligne ABX reçoit le nom de *développante* par rapport à la courbe DCY; ces dénominations vont être justifiées par les relations suivantes.

Le point C où se coupent les deux normales MC et M′C′, élevées sur les milieux des éléments égaux BB′ et B′B″, se trouve évidemment à égale distance des trois points B, B′, B″; par conséquent C est le centre d'un cercle qui aurait, avec la courbe AX, *deux éléments communs* BB′ et B′B″. Or, comme on ne saurait assujettir une circonférence à passer par plus de trois points, c'est donc là le cercle qui, parmi tous les autres, approche davantage de se confondre avec la courbe AX dans les environs de B; aussi on l'appelle le cercle *osculateur* de cette ligne pour le point B. Quant au rayon de ce cercle osculateur, ce serait à la rigueur une des trois lignes CB = CB′ = CB″; mais on peut y substituer CM = CM′, parce que ces diverses droites sont les rayons de deux cercles circonscrit et inscrit au même polygone BB′B″, et l'on sait qu'à la limite, ou pour les éléments infiniment petits, ces deux circonférences coïncident (*). D'où il résulte que *le centre* C *et le rayon* MC *du cercle osculateur*, sont déterminés *par la rencontre de deux normales infiniment voisines.*

198. Cette droite MC s'appelle aussi le *rayon de courbure* de la ligne ABX pour le point M, parce que sa longueur, plus ou moins grande, indiquera une courbure plus ou moins faible. En effet, si nous voulons acquérir une idée nette de la courbure d'une ligne ABX, regardons-la comme un polygone que l'on aurait formé en pliant successivement une droite BB′b″b‴. . . autour des points B′, b″, b‴, . . .; de cette manière, il est évident que la courbure au point B′ sera exprimée par l'écart que l'on aura mis entre les éléments B′b″ et B′B″, c'est-à-dire par l'*angle de contingence* TB′T′, ou plutôt par l'arc ε qui mesurerait cet angle dans un cercle dont le rayon serait l'unité. Or l'angle TB′T′ égale l'angle MCM′, et celui-ci comprend un arc de courbe MB′M′ qui se confond avec le cercle osculateur décrit du rayon MC; donc l'arc ε, semblable à MB′M′, et décrit avec un rayon égal à l'unité, aura pour valeur

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{MB'M'}}{\mathrm{MC}} = \frac{\mathrm{BB'}}{\mathrm{MC}} = \frac{ds}{\rho}.$$

Mais comme la courbe ABX est divisée en éléments tous égaux entre eux, la quantité *ds* sera constante; et il résulte de la valeur précédente que *la courbure*, indiquée par ε, *variera* d'un point à un autre de la ligne ABX, *en raison inverse du rayon* MC = ρ. (*Voyez* n° **653.**)

(*) Les lignes CM et CM′ sont égales, attendu que les éléments BB′ et B′B″ étant ici de même longueur, les triangles rectangles CMB′ et CM′B′ seront égaux. D'ailleurs le premier de ces triangles donne

$$\mathrm{CM} = \sqrt{\mathrm{CB'^2} - \mathrm{MB'^2}} = \mathrm{CB'}\left(1 - \frac{\mathrm{MB'^2}}{\mathrm{CB'^2}}\right)^{\frac{1}{2}};$$

et, en développant, on voit que quand MB′ sera infiniment petit, la différence entre CM et CB′ ne sera qu'un infiniment petit *du second ordre*, quantité qui doit être négligée, même vis-à-vis de MB′.