**199.** (*Fig.* 56.) Maintenant, si l'on plie un fil flexible MCC′C″Y le long de la développée, et qu'après avoir attaché fixement un des points de ce fil, par exemple Y, on donne à la partie rectiligne CM une longueur telle, que l'extrémité M aboutisse sur la développante ABX, cette extrémité parcourra exactement la ligne ABX, quand on déroulera successivement le fil en le tenant toujours tendu. En effet, lorsque le contact du fil avec la développée sera venu de C en C′, la partie rectiligne du fil MC = M′C se sera accrue de CC′, et elle aura alors pour longueur totale M′C + CC′ = M′C′; mais, puisque cette dernière ligne (nº **197**) est égale à M″C′, il s'ensuit que l'extrémité mobile M aboutira précisément en M″. Il en serait de même pour toutes les positions successives du fil, qui peut ainsi servir à décrire *la développante*, en le déroulant de dessus *la développée;* d'ailleurs, il résulte de là qu'*un arc quelconque* CC′C″ *de la développée est égal à la différence des deux rayons de courbure* MC et M″C″ qui aboutissent à ses extrémités.

Observons, en outre, qu'une courbe déterminée ABX n'admet jamais qu'une développée unique; tandis qu'une même développée DCY correspond à une infinité de développantes, puisqu'en prenant sur le fil MCC′Y divers points M, *m*,..., ils décriront des courbes différentes MM′M″X, *mm′m″x*,...., qui seront autant de développantes de la même développée DCY. Toutes ces développantes auront évidemment leurs normales communes, et se trouveront partout *équidistantes* dans la direction de ces normales; mais elles différeront beaucoup les unes des autres, quant à leurs propriétés et à leurs équations.

**200.** Pour citer quelques exemples simples de la théorie des développées, nous dirons que si la courbe ABX (*fig.* 56) était une parabole du deuxième degré, sa développée se composerait de deux branches indéfinies, telles que DCY et DY′, placées l'une au-dessous, l'autre au-dessus de l'axe AD, et qui viendraient s'y réunir en formant un *rebroussement* au point D. Ce point est éloigné du sommet A, de la quantité AD = 2 AF = le demi-paramètre, et cette droite AD est aussi le *rayon de courbure* de la parabole pour le sommet A.

Dans une ellipse ABDE (*fig.* 76) dont les demi-axes sont OA = $a$, OB = $b$, la développée est une courbe $\alpha\beta\delta\varepsilon$ composée de quatre branches qui présentent autant de points de rebroussement, placés à des distances

$$\mathrm{A}\alpha = \mathrm{D}\delta = \frac{b^2}{a}, \quad \mathrm{B}\beta = \mathrm{E}\varepsilon = \frac{a^2}{b}.$$

Ce sont là aussi les grandeurs des *rayons de courbure* pour les sommets A et B; car les deux branches $\alpha\beta$ et $\beta\delta$ servent à décrire la demi-ellipse ABD, tandis que les deux autres $\alpha\varepsilon$ et $\varepsilon\delta$ se rapportent à la portion inférieure AED.

Dans un cercle, la développée se réduit à un point unique, qui est le centre, et le rayon de courbure est constamment égal au rayon même du cercle donné.

**201.** Mais, pour obtenir des résultats plus intéressants dans les applications que nous allons faire aux surfaces enveloppes, nous admettrons ici que l'on s'est donné immédiatement une développée circulaire YDFE (*fig.* 54), et qu'on en a déduit la



développante YO″O′OX, en déroulant un fil plié sur le cercle, et dont l'extrémité mobile aurait d'abord coïncidé avec le point Y. Pour tracer graphiquement cette courbe, on divisera la circonférence en parties égales, *douze* par exemple; puis, en portant sur les tangentes FO, F′O′, F″O″,... des longueurs égales à $\frac{6}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{12}$,... de cette circonférence, on obtiendra (nº **199**) les divers points O, O′, O″,... qu'il faudra réunir par un trait continu. Ce sera d'autant plus facile, qu'on pourra employer à cet effet de petits arcs de cercle décrits avec les rayons FO, F′O′, F″O″,...; car ces distances sont précisément (**197**) les rayons des *cercles osculateurs* de la courbe XOY.

Cette développante XOY sera une spirale indéfinie, ayant pour origine le point Y; et même on doit regarder la spirale Y*o″ox* symétrique de la précédente, comme étant une seconde branche de la même développante, et comme ne formant avec la première qu'une seule courbe dont toutes les parties sont décrites *par le mouvement continu* d'un point unique. En effet, si au lieu d'un fil plié sur la développée, on conçoit une droite *inflexible* et indéfinie ABF*ab* qui, demeurant tangente au cercle CY, roule, *sans glisser*, sur sa circonférence, il est clair qu'un point O, fixe sur cette droite, viendra successivement se placer en O′, O″ et Y; puis, si la rotation de la droite continue dans le même sens, ce point O se trouvera dès lors en arrière du point de contact, et décrira sans discontinuité la branche Y*ox*. D'ailleurs on doit apercevoir que cette manière de décrire une développante quelconque par la rotation d'une droite inflexible sur la développée, équivaut à la génération indiquée nº **199**; mais le mode actuel est plus général, et il devient même nécessaire quand la développée offre des points de rebroussement, comme dans l'ellipse, la parabole,..., puisque autrement il faudrait changer souvent le point d'attache du fil, pour le transporter d'une branche sur l'autre.

**202.** SURFACES CANAUX. (*Fig.* 54.) Cela posé, imaginons qu'une sphère d'un *rayon constant*, représenté par OA = OB, se meuve de manière que son centre suive la courbe horizontale XOY*ox*; l'enveloppe de toutes les positions de cette sphère mobile sera formée (nº **190**) par les intersections des enveloppées consécutives; ainsi, examinons ce que sont ici ces intersections. Pour deux positions voisines O et O′ du centre mobile, les deux sphères égales se couperaient suivant un petit cercle, dont le plan serait évidemment perpendiculaire sur le milieu de la droite OO′ qui joint les centres; par conséquent ce petit cercle serait projeté sur le plan de notre épure qui est horizontal, suivant une droite perpendiculaire à la corde OO′, et passant par son milieu. Or, à mesure que le centre O′ se rapproche de O, la corde OO′ indéfiniment prolongée approche de plus en plus de la tangente à la courbe XOY, et elle coïncide avec cette tangente à la limite: donc, pour deux sphères infiniment voisines, la courbe d'intersection est *un grand cercle projeté sur la normale* AOB de la directrice XOY. Il suit de là que l'enveloppe peut être regardée comme engendrée par le grand cercle vertical AOB, dont le centre parcourrait la ligne XOY, tandis que son plan resterait normal à cette ligne; ainsi, cette enveloppe présentera la forme d'un *canal curviligne* qui aura pour axe la courbe directrice XOY, et dont toutes les sections normales à cet axe seront des cercles d'un rayon constant.

**203.** Ces conséquences continueront évidemment d'avoir lieu quelle que soit la nature de la ligne XOY; c'est-à-dire que si l'on adopte successivement diverses courbes pour directrices du centre de la sphère mobile, on obtiendra des enveloppes de formes très-variées, mais dont chacune aura pour section normale un cercle du rayon OA. Ainsi, ce cercle devient *une génératrice de forme invariable, commune à toutes les surfaces qui enveloppent l'espace parcouru par une sphère d'un rayon constant*, et qui imprime à toute cette *famille* d'enveloppes, un caractère distinctif et indépendant de la nature de la directrice XOY; c'est pourquoi MONGE a donné le nom de *caractéristique* à ce grand cercle normal, et généralement il appelle ainsi l'intersection de deux enveloppées consécutives, dans *chaque famille* d'enveloppes engendrées par une même surface mobile, quelle que soit la loi du mouvement de cette dernière surface.

**204.** Nous avons dit (nº **190**) que l'enveloppe *toucherait* chacune des enveloppées particulières précisément le long de la caractéristique, qui est ici le grand cercle vertical et mobile AOB. En effet, trois positions infiniment voisines S, S', S'' de la sphère mobile, se couperont suivant deux cercles situés l'un et l'autre sur la sphère S', et ils y comprendront une zone infiniment étroite, de largeur inégale, mais qui sera commune à S' et à l'enveloppe; de sorte que ces deux dernières surfaces ayant les mêmes éléments superficiels, ou les mêmes plans tangents tout le long de cette zone, se trouveront bien tangentes l'une à l'autre dans cette région commune, qui d'ailleurs comprendra, vers son milieu, la véritable caractéristique ou le grand cercle normal à la courbe XOY. Ainsi, il est vrai de dire que le contact a lieu le long de cette caractéristique.

**205.** Maintenant, comparons entre elles les diverses caractéristiques projetées ici sur AOB, A'O'B',... (*fig.* 54), et pour faire mieux ressortir les circonstances assez délicates de leurs intersections, imitons le procédé indiqué vers la fin du nº **201** pour décrire la développante : c'est-à-dire, imaginons que le plan vertical AOBF de la caractéristique soit *inflexible* et indéfiniment prolongé; puis, faisons-le rouler, *sans glisser*, sur le cylindre vertical FDYE auquel il demeurera tangent. Alors le cercle AOB, entraîné avec le plan mobile, parcourra nécessairement l'enveloppe qui nous occupe, puisque les conditions précédentes reviennent évidemment à dire que le centre de ce cercle se mouvra sur la développante XOY, tandis que son plan restera normal à cette courbe. D'ailleurs, tous les points de cette circonférence mobile, projetés en B, R,..., A, décriront d'autres spirales BD, RL,..., AA'E, qui seront autant de développantes du cercle FDY, et dont la première et la dernière formeront le contour apparent de l'enveloppe.

**206.** Cela posé, tant que, par la rotation du plan vertical AF sur le cylindre FDY, l'extrémité B du diamètre du cercle mobile n'aura pas atteint la développée, deux caractéristiques consécutives ne se couperont pas; car on sait (nº **197**) qu'une normale quelconque A'F' à la courbe XOY, ne serait rencontrée par la normale infiniment voisine qu'au point F' situé sur la développée, et ce point se trouve en dehors du diamètre A'B' qui limite la projection de la caractéristique. Mais, dès que le point B aura touché le cylindre en D, les caractéristiques consécutives commenceront à se couper : en effet, la normale GL$g$, par exemple, rencontrera la normale infiniment voisine au point L situé sur la développée; et comme ce point se trouve en dedans du diamètre G$g$ = AB, il en résulte que les deux caractéristiques projetées sur G$g$ et sur la normale infiniment voisine, se couperont en deux points projetés en L, et situés l'un au-dessus, l'autre au-dessous du plan horizontal de l'épure. Toutefois, pour justifier complétement cette assertion, il faut ajouter que ces deux caractéristiques sont placées (nº **204**) sur une même position de la sphère mobile; autrement, les plans de ces deux cercles pourraient bien se couper suivant la verticale L, sans que leurs circonférences eussent des points communs.



Il résulte de là qu'à partir de la position DI, les diverses caractéristiques circulaires se trouveront partagées par leurs intersections consécutives, chacune en deux segments projetés

sur LG, MH, YP, VQ, UT, (N)
et sur L$g$, M$h$, Y$p$, V$q$, U$t$. ($n$)

Les segments de la première série formeront une nappe que nous désignerons par (N), et à laquelle appartiendront les caractéristiques totales AB, A'B',..., tandis que les segments de l'autre série donneront lieu à une seconde nappe ($n$), qui commencera par être renfermée dans l'intérieur de la première, mais qui bientôt en sortira pour s'étendre indéfiniment jusqu'aux caractéristiques totales $a'b'$, $ab$,.... En outre, ces deux nappes de l'enveloppe se réuniront l'une à l'autre le long d'une ligne à double courbure projetée sur DLMYVUE, et qui n'est autre chose que le cercle vertical AB, dont le plan serait plié et enroulé sur le cylindre de la développée.

**207.** Observons d'ailleurs que cette ligne à double courbure DYE (*fig.* 54) est une véritable *arête de rebroussement* pour l'enveloppe totale. Car, en se rappelant (nº **205**) qu'un point quelconque Z de la caractéristique mobile, décrit les deux branches Z$\alpha\beta$M et M$\gamma\delta z$ d'une spirale dont le rebroussement est en M, on doit apercevoir que, quand le point mobile Z est en $\alpha$ ou en $\beta$, il se trouve encore sur la nappe (N) placée au delà des points de contact D ou L; mais dès que ce point est arrivé en $\gamma$ ou en $\delta$, il appartient à la nappe ($n$) placée en deçà des points de contact Y ou V; par conséquent, le passage de ce point mobile d'une nappe à l'autre a lieu précisément en M, et la forme de la spirale en cet endroit prouve bien que ce passage s'effectue par un véritable rebroussement. Comme on en dirait autant des autres points de la caractéristique AB, il en faut conclure que la courbe projetée sur DMYE est une ligne de rebroussement pour les deux nappes de l'enveloppe.

Une circonstance analogue se reproduirait dans toutes les enveloppes, quelle que fût la surface mobile qui les engendrerait; c'est pourquoi MONGE a donné le nom général d'*arête de rebroussement* d'une enveloppe, *à la ligne formée par les intersections consécutives des diverses caractéristiques;* et nous en avions déjà rencontré un exemple remarquable dans les surfaces développables où les caractéristiques étaient des droites (nº **190**).

**208.** Revenons à l'enveloppe particulière qui nous occupait, et observons que les segments de caractéristiques $Lg$, $Mh$,... qui appartiennent à la nappe $(n)$ doivent être *ponctués*, parce qu'ils sont invisibles comme étant renfermés dans l'intérieur de la nappe (N). En effet, on a évidemment

$$L\beta = LM < L\varepsilon + \varepsilon M;$$

d'où, en retranchant la partie commune $L\varepsilon$, il résulte que

$$\varepsilon\beta < \varepsilon M;$$

par conséquent si l'on ramenait sur le cercle AOB les deux points projetés en $\varepsilon$ et qui appartiennent l'un au segment LG, l'autre au segment $Mh$, le premier viendrait occuper une position $\varepsilon'$ plus voisine du point Z et, par suite, du centre O, que ne l'est la position $\varepsilon''$ où viendrait se placer le deuxième; donc le point $\varepsilon'$ est plus élevé que $\varepsilon''$, et, par conséquent, le segment LG passe au-dessus du segment $Mh$. On expliquera, par des considérations analogues, les divers modes de ponctuation employés dans l'épure; toutefois, nous ferons encore observer que les points R et $\rho$, Z et $\zeta$,..., du cercle mobile AOB, se trouvant respectivement à la même hauteur, décriront des spirales qui se rencontreront deux à deux; de sorte que les deux nappes (N) et $(n)$ de l'enveloppe se traverseront mutuellement suivant une ligne d'intersection projetée sur la droite YW.

Les surfaces que nous avons examinées dans ce chapitre, et surtout la dernière que nous venons de discuter avec détail, parce qu'elle présentait par elle-même des circonstances intéressantes, suffiront, sans doute, pour donner au lecteur une idée assez complète des enveloppes et de leurs particularités; c'est pourquoi nous allons passer au problème important des intersections de surfaces.

# LIVRE IV.

## INTERSECTIONS DE SURFACES.

## CHAPITRE PREMIER.

### PRINCIPES GÉNÉRAUX.

**209.** Pour donner une idée générale des procédés par lesquels on parvient à déterminer l'intersection de deux surfaces, supposons qu'il s'agisse d'abord d'un cas très-simple, celui où une surface S serait coupée par *un plan horizontal* donné P. Puisque la surface est censée connue et définie, on connaîtra la forme de la génératrice (nº **70**) et la loi d'après laquelle elle varie; par conséquent, on pourra construire, sur les deux plans de projection, diverses positions de cette génératrice, aussi nombreuses et aussi rapprochées que l'on voudra. Désignons les projections



de ces lignes par (G, G'), ($G_2$, $G'_2$), ($G_3$, $G'_3$),...; puis, observons que le plan sécant P qui est perpendiculaire au plan vertical, coupe la ligne (G, G') en un point qui doit être projeté verticalement à la rencontre de G' avec la trace du plan P; par conséquent, si l'on ramène ce point sur la ligne G au moyen d'une perpendiculaire à la ligne de terre, on obtiendra la projection horizontale $m$ d'un point de l'intersection de S avec P. En répétant la même opération pour chaque génératrice, on se procurera une série de points $m$, $m_2$, $m_3$, $m_4$,...; et s'ils sont assez rapprochés les uns des autres, ils pourront être aisément réunis par *un trait continu* (*) qui fera connaître, sur le plan horizontal, la courbe suivant laquelle la surface S est coupée par le plan P. Quant à la projection verticale de cette même courbe, il est évident qu'elle se réduit, dans le cas actuel, à la trace même du plan sécant P.

**210.** Considérons maintenant deux surfaces quelconques S et S'; et pour trouver leur intersection, coupons-les par une série de plans horizontaux P, $P_2$, $P_3$,.... Chacun de ces plans auxiliaires, P par exemple, coupera la surface S suivant une ligne $mm_2m_3$..., et la surface S' suivant une autre ligne $m'm'_2m'_3$...; ces deux lignes se construiront comme nous l'avons dit au numéro précédent, et si elles se coupent elles-mêmes sur le plan horizontal en un ou plusieurs points M, N,..., ce seront là les projections horizontales de divers points, qui sont évidemment *communs aux deux surfaces* S et S', et qui dès lors appartiennent à leur intersection. Quant aux projections verticales, on les déduira des premières, en ramenant sur la trace du plan auxiliaire P les points M, N,..., par des perpendiculaires à la ligne de terre. Maintenant, si l'on répète des opérations semblables pour les autres plans $P_2$, $P_3$,..., on obtiendra sur chaque plan de projection une suite de points M, $M_2$, $M_3$,..., N, $N_2$, $N_3$,..., qu'il faudra réunir par un trait continu, en distinguant toutefois ceux de ces points qui appartiennent à une même branche de

(*) Il faut de l'habitude, sans doute, pour réunir ainsi des points situés à certaines distances par une ligne qui n'offre ni *jarrets*, ni changements brusques de courbure; mais on ne doit rien épargner pour se former l'œil et la main par de nombreux exercices, et pour acquérir le sentiment de la continuité dans les courbes, attendu que la construction des intersections de surfaces est un des problèmes les plus utiles, soit comme moyen de recherche, soit dans les applications pratiques de la géométrie descriptive à la perspective, à la coupe des pierres, à la charpente, etc. Toutefois, nous ferons observer ici qu'il n'est pas toujours avantageux de multiplier extrêmement les constructions auxiliaires qui déterminent les divers points $m$, $m_2$, $m_3$,..., parce que les petites erreurs inséparables de toute opération manuelle, portant alors sur des points très-voisins, produisent des sinuosités ou d'autres défauts choquants qui n'eussent pas été sensibles sur de plus grandes distances. Il faut donc répartir ces constructions avec mesure, en consultant de bons modèles, et les multiplier davantage dans les parties où la courbe semble offrir quelque forme singulière qui a besoin d'être vérifiée. On doit aussi profiter des notions que l'on peut avoir d'avance sur la nature de l'intersection cherchée; si, par exemple, on prévoit que la projection doit être une courbe du deuxième ou du quatrième degré, il ne devra y exister aucun arc qui puisse être coupé par une droite quelconque, en plus de deux ou de quatre points; et si le contraire arrivait, il faudrait refaire les constructions relatives à ces parties pour les rectifier. La détermination des tangentes, que nous apprendrons à effectuer, est encore un moyen de corriger la forme d'une courbe; parce que la connaissance d'une pareille droite fera aisément sentir si l'arc qui précède ou qui suit le point de tangence a besoin d'être élevé ou abaissé pour que le contact soit complet. Au surplus, les préceptes généraux sur cette matière ne suffisent pas, et il faut réclamer encore, sur un certain nombre d'exemples bien choisis, les conseils d'un praticien habile.