208. Revenons à l'enveloppe particulière qui nous occupait, et observons que les segments de caractéristiques Lg, Mh,... qui appartiennent à la nappe (n) doivent être *ponctués*, parce qu'ils sont invisibles comme étant renfermés dans l'intérieur de la nappe (N). En effet, on a évidemment

$$L\beta = LM < L\varepsilon + \varepsilon M;$$

d'où, en retranchant la partie commune $L\varepsilon$, il résulte que

$$\varepsilon\beta < \varepsilon M;$$

par conséquent si l'on ramenait sur le cercle AOB les deux points projetés en ε et qui appartiennent l'un au segment LG, l'autre au segment Mh, le premier viendrait occuper une position ε' plus voisine du point Z et, par suite, du centre O, que ne l'est la position ε'' où viendrait se placer le deuxième; donc le point ε' est plus élevé que ε'', et, par conséquent, le segment LG passe au-dessus du segment Mh. On expliquera, par des considérations analogues, les divers modes de ponctuation employés dans l'épure; toutefois, nous ferons encore observer que les points R et ρ, Z et ζ,..., du cercle mobile AOB, se trouvant respectivement à la même hauteur, décriront des spirales qui se rencontreront deux à deux; de sorte que les deux nappes (N) et (n) de l'enveloppe se traverseront mutuellement suivant une ligne d'intersection projetée sur la droite YW.

Les surfaces que nous avons examinées dans ce chapitre, et surtout la dernière que nous venons de discuter avec détail, parce qu'elle présentait par elle-même des circonstances intéressantes, suffiront, sans doute, pour donner au lecteur une idée assez complète des enveloppes et de leurs particularités; c'est pourquoi nous allons passer au problème important des intersections de surfaces.

LIVRE IV.

INTERSECTIONS DE SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPES GÉNÉRAUX.

209. Pour donner une idée générale des procédés par lesquels on parvient à déterminer l'intersection de deux surfaces, supposons qu'il s'agisse d'abord d'un cas très-simple, celui où une surface S serait coupée par *un plan horizontal* donné P. Puisque la surface est censée connue et définie, on connaîtra la forme de la génératrice (n° **70**) et la loi d'après laquelle elle varie; par conséquent, on pourra construire, sur les deux plans de projection, diverses positions de cette génératrice, aussi nombreuses et aussi rapprochées que l'on voudra. Désignons les projections

de ces lignes par (G, G′), (G_2, G'_2), (G_3, G'_3),...; puis, observons que le plan sécant P qui est perpendiculaire au plan vertical, coupe la ligne (G, G′) en un point qui doit être projeté verticalement à la rencontre de G′ avec la trace du plan P; par conséquent, si l'on ramène ce point sur la ligne G au moyen d'une perpendiculaire à la ligne de terre, on obtiendra la projection horizontale m d'un point de l'intersection de S avec P. En répétant la même opération pour chaque génératrice, on se procurera une série de points $m, m_2, m_3, m_4,\ldots$; et s'ils sont assez rapprochés les uns des autres, ils pourront être aisément réunis par *un trait continu* (*) qui fera connaître, sur le plan horizontal, la courbe suivant laquelle la surface S est coupée par le plan P. Quant à la projection verticale de cette même courbe, il est évident qu'elle se réduit, dans le cas actuel, à la trace même du plan sécant P.

210. Considérons maintenant deux surfaces quelconques S et S′; et pour trouver leur intersection, coupons-les par une série de plans horizontaux $P, P_2, P_3,\ldots$. Chacun de ces plans auxiliaires, P par exemple, coupera la surface S suivant une ligne $mm_2m_3\ldots$, et la surface S′ suivant une autre ligne $m'm'_2m'_3\ldots$; ces deux lignes se construiront comme nous l'avons dit au numéro précédent, et si elles se coupent elles-mêmes sur le plan horizontal en un ou plusieurs points M, N, . . ., ce seront là les projections horizontales de divers points, qui sont évidemment *communs aux deux surfaces* S et S′, et qui dès lors appartiennent à leur intersection. Quant aux projections verticales, on les déduira des premières, en ramenant sur la trace du plan auxiliaire P les points M, N. . . ., par des perpendiculaires à la ligne de terre. Maintenant, si l'on répète des opérations semblables pour les autres plans $P_2, P_3,\ldots$, on obtiendra sur chaque plan de projection une suite de points $M, M_2, M_3,\ldots, N, N_2, N_3,\ldots$, qu'il faudra réunir par un trait continu, en distinguant toutefois ceux de ces points qui appartiennent à une même branche de

(*) Il faut de l'habitude, sans doute, pour réunir ainsi des points situés à certaines distances par une ligne qui n'offre ni *jarrets*, ni changements brusques de courbure; mais on ne doit rien épargner pour se former l'œil et la main par de nombreux exercices, et pour acquérir le sentiment de la continuité dans les courbes, attendu que la construction des intersections de surfaces est un des problèmes les plus utiles, soit comme moyen de recherche, soit dans les applications pratiques de la géométrie descriptive à la perspective, à la coupe des pierres, à la charpente, etc. Toutefois, nous ferons observer ici qu'il n'est pas toujours avantageux de multiplier extrêmement les constructions auxiliaires qui déterminent les divers points $m, m_2, m_3,\ldots$, parce que les petites erreurs inséparables de toute opération manuelle, portant alors sur des points très-voisins, produisent des sinuosités ou d'autres défauts choquants qui n'eussent pas été sensibles sur de plus grandes distances. Il faut donc répartir ces constructions avec mesure, en consultant de bons modèles, et les multiplier davantage dans les parties où la courbe semble offrir quelque forme singulière qui a besoin d'être vérifiée. On doit aussi profiter des notions que l'on peut avoir d'avance sur la nature de l'intersection cherchée; si, par exemple, on prévoit que la projection doit être une courbe du deuxième ou du quatrième degré, il ne devra y exister aucun arc qui puisse être coupé par une droite quelconque, en plus de deux ou de quatre points; et si le contraire arrivait, il faudrait refaire les constructions relatives à ces parties pour les rectifier. La détermination des tangentes, que nous apprendrons à effectuer, est encore un moyen de corriger la forme d'une courbe; parce que la connaissance d'une pareille droite fera aisément sentir si l'arc qui précède ou qui suit le point de tangence a besoin d'être élevé ou abaissé pour que le contact soit complet. Au surplus, les préceptes généraux sur cette matière ne suffisent pas, et il faut réclamer encore, sur un certain nombre d'exemples bien choisis, les conseils d'un praticien habile.

courbe d'avec ceux qui font partie d'une autre branche. Cette distinction est quelquefois assez délicate; mais on y parviendra en suivant avec attention, et de proche en proche, les résultats fournis par les plans auxiliaires successifs. D'ailleurs, si l'une des surfaces S et S' avait deux nappes distinctes, comme il arrive dans un cône, il ne faudrait pas réunir des points qui seraient sur des nappes opposées.

211. La méthode que nous venons d'exposer est générale, et suffisante dans tous les cas pour obtenir l'intersection de deux surfaces quelconques S et S'; mais au surplus, on peut donner aux plans sécants $P, P_2, P_3, \ldots,$ telle direction que l'on voudra, pourvu que l'on sache construire commodément les courbes auxiliaires $mm_2 \ldots$ et $m'm'_2 \ldots$. Ainsi, dans chaque problème, il sera avantageux de choisir les plans sécants de manière que les sections auxiliaires soient, s'il est possible, des *droites* ou des *cercles*, parce que de pareilles lignes se tracent facilement au moyen de deux données. Par exemple, s'il s'agit de cylindres, on prendra les plans $P, P_2, \ldots,$ parallèles aux génératrices des deux surfaces à la fois; s'il est question de deux cônes, on fera passer tous les plans sécants par la droite qui réunit les deux sommets. Quelquefois même on emploie, pour couper les surfaces S et S', non plus des plans, mais des surfaces courbes, telles que des sphères concentriques, qui peuvent fournir alors des cercles pour sections auxiliaires dans les deux surfaces proposées. (*Voyez* n° **333**.)

212. Quand on a construit les deux projections de l'intersection cherchée, cette courbe est certainement déterminée; mais si elle est *plane*, il faut en outre, pour manifester plus clairement sa forme, en exécuter le *rabattement* sur un des plans de projection. Lorsqu'une des deux surfaces proposées est *développable*, on doit aussi effectuer le développement de cette surface, et y construire la *transformée* (n° **175**) de l'intersection; car cette nouvelle courbe est nécessaire à connaître dans les applications à la stéréotomie. Enfin, comme la détermination des tangentes à une courbe est un moyen de dessiner avec plus de précision le cours de cette ligne, et que cette connaissance est d'ailleurs nécessaire dans divers cas, il faudra s'exercer à cette recherche, tant pour l'intersection primitive que pour son rabattement et pour sa transformée; mais les tangentes à ces deux dernières courbes se déduisant toujours facilement de la tangente à la première, nous nous bornerons à donner pour celle-ci une méthode générale.

213. Désignons les surfaces proposées par S et S', et soit AMB leur intersection dont il faut *trouver la tangente* (*fig.* 57.)

Puisque cette courbe est située en même temps sur les deux surfaces, sa tangente MT pour le point quelconque M, doit se trouver à la fois (n° **95**) dans le plan qui touche la surface S en M, et dans celui qui touche S' au même point; donc *la tangente* MT *sera l'intersection des plans tangents aux deux surfaces*. Par conséquent, il suffira de construire ces deux plans par les méthodes exposées précédemment, et de chercher la droite suivant laquelle ils se couperont : on pourra même se borner à trouver un seul point de cette intersection, puisque le point de contact M est déjà assigné par la question.

Lorsqu'une des surfaces proposées, par exemple S', sera un plan, ou bien quand on saura que la courbe AMB est plane, quoique les deux surfaces dont elle est l'intersection soient courbes, la règle précédente se réduira évidemment à chercher l'intersection du seul plan tangent de S avec le plan S', ou avec le plan de AMB.

214. *Autre méthode.* Si l'on construit la normale MN de la surface S pour le point M, et la normale MN' de la surface S' pour le même point, il est évident que le plan NMN' conduit par ces deux droites, se trouvera perpendiculaire à chacun des plans tangents, et par suite à leur intersection qui est MT. Ainsi, *la tangente à l'intersection de deux surfaces est une droite perpendiculaire au plan des deux normales* à ces surfaces; ce plan coïncide d'ailleurs avec le *plan normal* (n° **168**) de la courbe AMB. Il suffira donc de construire ces deux normales et le plan qu'elles déterminent; et puis, de lui mener une perpendiculaire par le point donné M. Cette méthode (*) est fort précieuse, 1° parce qu'il y a des surfaces où la normale se détermine d'une manière beaucoup plus simple que le plan tangent, et indépendamment de celui-ci (n° **136**); 2° parce qu'il se rencontre quelquefois des points singuliers, pour lesquels les deux plans tangents se trouvent perpendiculaires à un même plan de projection; alors le procédé du n° **213** ne donne plus de résultat déterminé pour la tangente de la courbe projetée sur ce plan, tandis que la méthode des deux normales peut encore s'appliquer par suite de certaines relations qui, à la limite, ne deviennent pas indéterminées. Nous en verrons des exemples dans plusieurs épures de Géométrie (n°s **340** et **488**) et dans la Coupe des pierres.

215. Lorsque les surfaces en question sont placées de telle sorte qu'elles *se touchent* le long de la ligne qui leur est commune, cette intersection particulière prend le nom de *ligne de contact*, et l'une des surfaces est dite *circonscrite* à l'autre. On pourra toujours construire cette courbe par le procédé général du n° **210**, mais on ne saura plus lui mener de tangente; car, d'après l'hypothèse actuelle, les deux plans tangents dont cette droite serait l'intersection se trouveront confondus l'un avec l'autre. La même indétermination résulterait de la méthode des deux normales; car ces droites coïncideront entre elles en même temps que les plans tangents, et le plan normal qu'elles devaient servir à fixer restera encore indéterminé. Ainsi, pour les lignes de contact de deux surfaces, la géométrie ne fournit point de méthode graphique propre à trouver leurs tangentes (**), à moins toutefois que la ligne de contact ne soit plane; car, dans ce cas, la combinaison de son plan avec le plan tangent commun aux deux surfaces, donnerait encore la tangente cherchée.

216. Après avoir exposé ces notions générales sur les intersections de surfaces, nous allons les éclaircir en résolvant divers problèmes de ce genre, dans lesquels

(*) Elle est due à M. *J. Binet*, qui en a fait lui-même des applications intéressantes à diverses épures de Géométrie et de Coupe des pierres.

(**) Cependant nous indiquerons, au n° 584, une méthode propre à atteindre ce but, mais trop compliquée pour être vraiment utile dans la pratique, et remarquable seulement sous le point de vue de la théorie qu'elle servira à compléter.