sommet le point donné (V, V'). La courbe de contact de ce cône auxiliaire avec la sphère sera un petit cercle (n° **353**, *note*) dont le plan se trouvera perpendiculaire à la droite (V'ω', VO); et comme dans les points où ce petit cercle rencontrera le parallèle E'F', les plans tangents de la sphère seront communs à la surface S, il s'ensuit que ces points appartiendront à la courbe cherchée X'M'Y'. Or, si nous faisons tourner simultanément la sphère et son cône circonscrit, autour de la verticale O, jusqu'à ce que l'axe (V'ω', VO) de celui-ci soit devenu parallèle au plan vertical, le sommet (V, V') se transportera en V''; et en menant les tangentes V''γ, V''δ, le cercle de contact sur la sphère se trouvera alors projeté suivant la corde γδ. Dans cette situation, ce cercle de contact coupe le parallèle E'F' en deux points placés aux extrémités de la corde projetée verticalement sur le point ε'; or, comme la distance de cette corde à l'axe de révolution ne changera pas quand nous ramènerons la sphère et le cône circonscrit dans leurs positions primitives, il est clair qu'en reportant par un arc de cercle le point ε' sur le méridien primitif VO en ε, et en tirant par ce dernier point une corde perpendiculaire à VO, les intersections de cette corde avec la parallèle EMF fourniront les points demandés M et N, qu'il faudra ensuite projeter en M' et N' sur E'F'.

PROBLÈME II. *Par un point donné, mener à une surface de révolution un plan tangent qui la touche sur un parallèle donné.*

367. Il ne sera pas nécessaire ici, comme nous l'avions annoncé généralement au n° **351**, de construire la courbe de contact de la surface avec un cône circonscrit; il suffira évidemment d'appliquer au parallèle assigné par la question, la méthode du n° **357** ou celle du n° **366**, et l'on obtiendra directement les *points de contact* des plans tangents demandés. Dès lors ces plans seront faciles à construire (n° **132**).

PROBLÈME III. *Par un point donné, mener à une surface de révolution un plan tangent qui la touche sur un méridien donné.*

368. Ce problème se résoudra encore directement, en appliquant au méridien assigné par la question, la méthode expliquée au n° **360**. On connaîtra ainsi les points de contact des plans tangents que l'on cherche, et ces plans seront alors faciles à déterminer (n° **132**).

PROBLÈME IV. *Trouver la courbe de contact d'une surface* QUELCONQUE *du second degré, avec un cône circonscrit dont le sommet est donné.*

369. (*Fig.* 85.) Prenons pour exemple un ellipsoïde à trois axes inégaux, et choisissons nos plans de projection *parallèles* à deux des trois *plans principaux* de ce corps. Alors, les contours apparents de la surface seront les deux ellipses (ABDE, A'D') et (A'C'D'F', AD), qui auront chacune deux axes communs avec l'ellipsoïde; et en désignant par (V, V') le sommet du cône circonscrit, nous chercherons à déterminer les points de la courbe de contact, qui se trouvent placés sur une section horizontale quelconque G'H'. Cette section est une ellipse *semblable* à ABDE, et dont (G'H', GH) est un des diamètres principaux; alors, si nous la regardons comme la base d'un cône *auxiliaire* qui aurait son sommet au point T', où

l'axe vertical de la surface est rencontré par la tangente G'T', ce cône T'G'H' sera *circonscrit* à l'ellipsoïde. En effet, toutes les sections faites dans la surface par des plans menés suivant la verticale (O, O'T'), seraient des ellipses qui auraient un axe commun (O, C'F'). D'ailleurs, pour tous les points de ces ellipses placées sur G'H', l'abscisse O'I' étant la même, la sous-tangente serait aussi constamment égale à I'T'; par conséquent, les tangentes à ces ellipses verticales aboutiraient toutes au point T', et formeraient bien le cône circonscrit T'G'H'. Cela posé, si nous menons à ce cône auxiliaire un plan tangent partant de (V, V'), l'arête de contact rencontrera la base G'H' en un point qui appartiendra à la courbe demandée; car, en ce point, le plan tangent du cône auxiliaire touchera l'ellipsoïde et passera d'ailleurs par le point (V, V'), ce qui est le caractère distinctif (n° **349**) de la courbe de contact de la surface avec le cône circonscrit dont le sommet serait en (V, V').

370. Maintenant, pour mener du point (V, V') un plan tangent au cône T'G'H', et afin de n'avoir à opérer que sur l'ellipse principale ABDE, *donnée immédiate* de la question, je prolonge ce cône jusqu'au plan horizontal A''D'', qui a été choisi de manière à couper cette surface suivant une ellipse égale à la précédente; puis, en adoptant cette section (A''D'', ABDE) pour base du cône, et joignant le sommet avec le point (V, V'), je cherche la rencontre de cette droite (V'T'R', VOR) avec le plan A''D''; et enfin, du point R je mène deux tangentes RP, RQ à l'ellipse ABDE. Les points de contact de ces tangentes étant fixés avec précision (au moyen des cordes supplémentaires), je tire les rayons OP, OQ, qui seront les projections horizontales des arêtes de contact, et j'en conclus aisément leurs projections verticales T'P', T'Q'. Enfin, ces dernières coupant l'ellipse G'H' aux points M' et N', je les projette en M et N, et j'obtiens ainsi les deux points de la courbe demandée, qui sont placés sur la section horizontale G'H' de l'ellipsoïde.

On aurait pu trouver directement les points M et N, en projetant H' en H, et menant par ce dernier point des parallèles HM et HN aux cordes DP et DQ; car, dans deux ellipses semblables, telles que G'H' et A''D'', les rayons vecteurs OM et OP sont proportionnels aux demi-axes OH et OD.

371. Pour toute section horizontale autre que G'H', on opérera d'une manière analogue; mais s'il arrivait que le sommet T' du cône auxiliaire fût à une distance incommode, on pourrait adopter pour base de ce cône la section K'L' faite par le plan horizontal mené du point (V, V'); et alors il suffirait de concevoir, par ce dernier point, des tangentes à cette ellipse K'L'. Or ces droites, ainsi que leurs points de contact, sont très-faciles à déterminer par une construction directe, *sans décrire la courbe*, et d'après la seule connaissance des axes, qui sont ici proportionnels avec AD et BE, et dont l'un est K'L'. Cette construction se trouvera expliquée tout à l'heure, dans un cas analogue (n° **374**).

372. *Points sur les contours apparents.* On les déterminera comme dans le problème précédent (n° **362**), en menant les tangentes V'X' et V'Y' au contour apparent de l'ellipsoïde sur le plan vertical, et projetant les points de contact X' et Y' en X et Y, sur AD. De même, les tangentes Vx et Vy au contour apparent sur le plan horizontal, fourniront deux points x et y qu'il faudra projeter en x' et y' sur A′D′. D'ailleurs, ces deux systèmes de points indiqueront les extrémités des *arcs visibles* sur les deux plans de projection.

373. (*Fig.* 85.) *Les points limites*, c'est-à-dire ceux où la tangente de la courbe sera *horizontale*, se trouveront nécessairement situés dans le plan vertical VO. En effet, il résulte évidemment de la construction générale qui a donné les points P et Q, ou M et N, que les points de la courbe de contact sont deux à deux sur des cordes horizontales (MN, M′N′), constamment *parallèles au diamètre conjugué* de OR dans l'ellipse ABDE; et, par suite, chacune de ces cordes est divisée en deux parties égales par le plan vertical VOR. Donc, lorsqu'un de ces points correspondants se trouvera dans le plan VOR, l'autre y sera pareillement; et la corde qui les réunissaït sera devenue tangente à la courbe, sans avoir cessé d'être horizontale.

374. Maintenant, pour construire ces points dont la hauteur sera *maximum* ou *minimum*, il suffira évidemment de mener, par le point (V, V′), deux tangentes à la section produite dans l'ellipsoïde par le plan vertical VOR. Or cette section est une ellipse dont les demi-axes sont O′C′ et Oα; et si, en la faisant tourner autour de l'axe (O, O′Z′), nous la rabattons sur le plan vertical, ainsi que le point (V, V′) qui se transportera en V″, il s'agira de mener par ce dernier deux tangentes à une ellipse dont les demi-axes deviendront O′C′ et O′α', problème qui peut se résoudre *sans tracer la courbe*. En effet, après avoir construit les foyers φ et ψ de cette ellipse, je décris un arc de cercle avec le rayon V″φ et un second arc de cercle du point ψ comme centre, avec un rayon égal au grand axe de l'ellipse; alors, ces deux circonférences se coupant aux points β et γ, on sait (*) que la droite V″δ, menée par le milieu de l'arc $\varphi\beta$, est la tangente demandée, et que son point de contact ε' est fourni par sa rencontre avec la droite $\psi\beta$. Par conséquent, il n'y aura plus qu'à ramener le point (ε', ε) dans le plan vertical VO, au moyen d'un arc de cercle horizontal, et l'on obtiendra ainsi le point (λ, λ') le plus bas de la courbe de contact.

De même, la seconde tangente à l'ellipse précédente sera la droite V‴ω passant par le milieu de l'arc $\varphi\gamma$, et sa rencontre avec $\psi\gamma$ déterminera son point de contact (π', π), lequel ramené dans le plan vertical VO, deviendra le point (μ, μ') le plus haut de la courbe en question.

375. On pourrait encore construire, d'une manière analogue, les deux points de cette courbe qui seraient placés dans le plan V′O′, perpendiculaire au plan vertical; car la section produite dans l'ellipsoïde par ce plan sécant V′O′ serait une ellipse dont les axes sont faciles à trouver : mais, pour ne pas rendre l'épure difficile à lire, nous laisserons au lecteur le soin de s'exercer à cette construction, qui est entièrement semblable à la précédente.

376. Nous ferons observer, en terminant, que la méthode employée ici pour un

(*) *Voyez*, dans les Traités de Géométrie analytique, *la méthode graphique des Anciens* pour mener les tangentes aux sections coniques.

ellipsoïde est également applicable à un hyperboloïde, ou même à un paraboloïde avec les modifications légères qu'amènerait tout naturellement la nature des sections planes qui seraient faites dans ces surfaces.

CHAPITRE II.

DES PLANS TANGENTS PARALLÈLES A UNE DROITE DONNÉE.

377. (*Fig.* 80.) Soient S une surface quelconque, et VO la droite donnée (ou bien une ligne parallèle à la droite donnée, et menée par un point pris arbitrairement dans l'intérieur de S) : si, par la ligne VO, nous conduisons divers plans sécants, ils couperont la surface S suivant des courbes ABD, AB′D, AB″D,..., qui pourront toujours être construites par les méthodes générales du livre IV; et en menant à ces sections des tangentes BU, B′U′, B″U″,..., parallèles à VO, elles formeront un cylindre qui sera *circonscrit* à S, c'est-à-dire qui *touchera cette surface tout le long de la courbe* BB′B″E. En effet, le plan tangent de S, relatif au point quelconque B″, renfermera évidemment l'arête B″U″ du cylindre, ainsi que la tangente B″t à la courbe BB′B″... qui lui sert de base; donc ce plan sera aussi tangent au cylindre, et dès lors cette dernière surface aura un véritable contact avec S au point B″, comme aussi tout le long de la ligne BB′B″E.

378. Cela posé, pour *mener à la surface* S *un plan tangent qui soit parallèle à une droite donnée* VO, il suffira de chercher la courbe de contact BB′E de cette surface avec un cylindre circonscrit parallèle à VO, puis de construire le plan tangent de S pour un quelconque des points de cette ligne de contact; car ce plan touchera nécessairement le cylindre circonscrit, et par suite il renfermera une de ses arêtes, qui sont toutes parallèles à VO; donc lui-même sera parallèle à cette droite.

Réciproquement, tout plan parallèle à VO et qui touchera la surface S en un certain point que j'appelle b, contiendra nécessairement une droite menée parallèlement à VO, par ce point b; donc cette dernière droite sera une arête du cylindre circonscrit, et son point de contact b devra, par conséquent, se trouver sur la courbe BB′E, qui devient ainsi *le lieu exclusif de toutes les solutions* du problème proposé.

Ce problème sera donc impossible, quand le cylindre circonscrit parallèlement à la droite donnée n'existera pas; ce qui arriverait, entre autres exemples, dans un paraboloïde, si la droite proposée était parallèle à *l'axe* de la surface; car alors les sections ABD, AB′D,..., seraient des paraboles, lesquelles n'admettent pas de tangente parallèle à leur diamètre principal.

379. Il résulte de ces principes que la question générale qui nous occupe est susceptible d'une infinité de solutions, ou bien elle n'en admet aucune. On doit seulement excepter le cas où S est une *surface développable*, parce qu'alors, d'après la remarque faite au n° **350**, le plan mobile qui engendre une telle surface, et qui est