horizontal, fourniront deux points x et y qu'il faudra projeter en x' et y' sur A′D′. D'ailleurs, ces deux systèmes de points indiqueront les extrémités des *arcs visibles* sur les deux plans de projection.

373. (*Fig.* 85.) *Les points limites*, c'est-à-dire ceux où la tangente de la courbe sera *horizontale*, se trouveront nécessairement situés dans le plan vertical VO. En effet, il résulte évidemment de la construction générale qui a donné les points P et Q, ou M et N, que les points de la courbe de contact sont deux à deux sur des cordes horizontales (MN, M′N′), constamment *parallèles au diamètre conjugué* de OR dans l'ellipse ABDE; et, par suite, chacune de ces cordes est divisée en deux parties égales par le plan vertical VOR. Donc, lorsqu'un de ces points correspondants se trouvera dans le plan VOR, l'autre y sera pareillement; et la corde qui les réunissaït sera devenue tangente à la courbe, sans avoir cessé d'être horizontale.

374. Maintenant, pour construire ces points dont la hauteur sera *maximum* ou *minimum*, il suffira évidemment de mener, par le point (V, V′), deux tangentes à la section produite dans l'ellipsoïde par le plan vertical VOR. Or cette section est une ellipse dont les demi-axes sont O′C′ et Oα; et si, en la faisant tourner autour de l'axe (O, O′Z′), nous la rabattons sur le plan vertical, ainsi que le point (V, V′) qui se transportera en V″, il s'agira de mener par ce dernier deux tangentes à une ellipse dont les demi-axes deviendront O′C′ et O′α', problème qui peut se résoudre *sans tracer la courbe*. En effet, après avoir construit les foyers φ et ψ de cette ellipse, je décris un arc de cercle avec le rayon V″φ et un second arc de cercle du point ψ comme centre, avec un rayon égal au grand axe de l'ellipse; alors, ces deux circonférences se coupant aux points β et γ, on sait (*) que la droite V″δ, menée par le milieu de l'arc $\varphi\beta$, est la tangente demandée, et que son point de contact ε' est fourni par sa rencontre avec la droite $\psi\beta$. Par conséquent, il n'y aura plus qu'à ramener le point (ε', ε) dans le plan vertical VO, au moyen d'un arc de cercle horizontal, et l'on obtiendra ainsi le point (λ, λ') le plus bas de la courbe de contact.

De même, la seconde tangente à l'ellipse précédente sera la droite V‴ω passant par le milieu de l'arc $\varphi\gamma$, et sa rencontre avec $\psi\gamma$ déterminera son point de contact (π', π), lequel ramené dans le plan vertical VO, deviendra le point (μ, μ') le plus haut de la courbe en question.

375. On pourrait encore construire, d'une manière analogue, les deux points de cette courbe qui seraient placés dans le plan V′O′, perpendiculaire au plan vertical; car la section produite dans l'ellipsoïde par ce plan sécant V′O′ serait une ellipse dont les axes sont faciles à trouver : mais, pour ne pas rendre l'épure difficile à lire, nous laisserons au lecteur le soin de s'exercer à cette construction, qui est entièrement semblable à la précédente.

376. Nous ferons observer, en terminant, que la méthode employée ici pour un

(*) *Voyez*, dans les Traités de Géométrie analytique, *la méthode graphique des Anciens* pour mener les tangentes aux sections coniques.

ellipsoïde est également applicable à un hyperboloïde, ou même à un paraboloïde avec les modifications légères qu'amènerait tout naturellement la nature des sections planes qui seraient faites dans ces surfaces.

CHAPITRE II.

DES PLANS TANGENTS PARALLÈLES A UNE DROITE DONNÉE.

377. (*Fig.* 80.) Soient S une surface quelconque, et VO la droite donnée (ou bien une ligne parallèle à la droite donnée, et menée par un point pris arbitrairement dans l'intérieur de S) : si, par la ligne VO, nous conduisons divers plans sécants, ils couperont la surface S suivant des courbes ABD, AB′D, AB″D,..., qui pourront toujours être construites par les méthodes générales du livre IV; et en menant à ces sections des tangentes BU, B′U′, B″U″,..., parallèles à VO, elles formeront un cylindre qui sera *circonscrit* à S, c'est-à-dire qui *touchera cette surface tout le long de la courbe* BB′B″E. En effet, le plan tangent de S, relatif au point quelconque B″, renfermera évidemment l'arête B″U″ du cylindre, ainsi que la tangente B″t à la courbe BB′B″... qui lui sert de base; donc ce plan sera aussi tangent au cylindre, et dès lors cette dernière surface aura un véritable contact avec S au point B″, comme aussi tout le long de la ligne BB′B″E.

378. Cela posé, pour *mener à la surface* S *un plan tangent qui soit parallèle à une droite donnée* VO, il suffira de chercher la courbe de contact BB′E de cette surface avec un cylindre circonscrit parallèle à VO, puis de construire le plan tangent de S pour un quelconque des points de cette ligne de contact; car ce plan touchera nécessairement le cylindre circonscrit, et par suite il renfermera une de ses arêtes, qui sont toutes parallèles à VO; donc lui-même sera parallèle à cette droite.

Réciproquement, tout plan parallèle à VO et qui touchera la surface S en un certain point que j'appelle b, contiendra nécessairement une droite menée parallèlement à VO, par ce point b; donc cette dernière droite sera une arête du cylindre circonscrit, et son point de contact b devra, par conséquent, se trouver sur la courbe BB′E, qui devient ainsi *le lieu exclusif de toutes les solutions* du problème proposé.

Ce problème sera donc impossible, quand le cylindre circonscrit parallèlement à la droite donnée n'existera pas; ce qui arriverait, entre autres exemples, dans un paraboloïde, si la droite proposée était parallèle à *l'axe* de la surface; car alors les sections ABD, AB′D,..., seraient des paraboles, lesquelles n'admettent pas de tangente parallèle à leur diamètre principal.

379. Il résulte de ces principes que la question générale qui nous occupe est susceptible d'une infinité de solutions, ou bien elle n'en admet aucune. On doit seulement excepter le cas où S est une *surface développable*, parce qu'alors, d'après la remarque faite au n° **350**, le plan mobile qui engendre une telle surface, et qui est en même temps son plan tangent, se trouvera complétement déterminé par la condition nouvelle d'être parallèle à une droite donnée. C'est ce que nous avons déjà reconnu pour les cylindres et pour les cônes, dans le chapitre III du livre II.

380. Le problème de mener à une surface S non développable, un plan tangent parallèle à une droite donnée, redeviendrait déterminé si l'on ajoutait la condition que ce plan dût avoir son point de contact *sur une courbe connue;* parce qu'alors ce point serait fourni par la rencontre de cette courbe avec la ligne de contact du cylindre circonscrit.

Quant à la construction de cette dernière ligne, qui est aussi fort utile dans la *théorie des ombres*, la seule méthode générale est celle que nous avons indiquée n° **377**; mais nous donnerons bientôt des procédés plus commodes pour certains genres de surfaces qui se rencontrent fréquemment, après que nous aurons fait quelques remarques sur ces lignes de contact dans les surfaces du second degré.

381. *La courbe de contact d'un cylindre circonscrit à une surface du second degré est toujours* PLANE, *et située dans le plan diamétral qui se trouve conjugué avec le diamètre parallèle au cylindre.*

En effet, si l'on conçoit par le centre O de la surface du second degré S (*fig.* 80), une droite VO parallèle à la direction du cylindre, les diverses sections ABD, AB′D, AB″D,..., produites par des plans menés suivant VO, seront des courbes du second degré qui auront toutes un diamètre commun AOD; or, en coupant ces courbes par le plan diamétral BB′E, conjugué avec AD (c'est-à-dire le plan qui diviserait en deux parties égales chacune des cordes parallèles à AD), les intersections seront des droites OB, OB′, OB″,..., qui se trouveront nécessairement *diamètres conjugués avec* OA, dans chacune des courbes correspondantes. Donc, les tangentes BU, B′U′, B″U″,..., que l'on mènera à ces sections par les divers points B, B′, B″,..., seront parallèles à OA, et formeront ainsi un cylindre circonscrit à la surface S, dont la ligne de contact BB′B″ sera placée tout entière dans le plan diamétral BB′E conjugué avec OA (*).

Au reste, ce résultat important peut être regardé comme une conséquence du théorème démontré n° **353**, pour la ligne de contact d'un cône VMM′N circonscrit à S; car, si le sommet V s'éloigne à l'infini sur la droite OAV, il est facile de voir que les divers points de contact M, M′, M″,..., se transporteront en B, B′, B″,....

382. (*Fig.* 82.) Pour étendre le théorème précédent aux deux paraboloïdes qui sont dépourvus de centre, imaginez, par l'axe principal OX de la surface, un plan EOF parallèle à la direction assignée pour les génératrices du cylindre, et menez dans cette direction une tangente VBU à la parabole EOF; alors, le plan diamétral, qui coupera en deux parties égales toutes les cordes parallèles à VBU, passera évi-

(*) Dans le cas particulier où la surface proposée est une sphère, la courbe de contact du cylindre circonscrit devient *un grand cercle, perpendiculaire à la direction* VO des arêtes du cylindre; résultat qui se prouve directement en faisant tourner autour de VO un grand cercle et sa tangente parallèle à cette droite.

demment par le point de contact B de cette tangente, et produira dans la surface une section parabolique BB′B″C. Cela posé, toutes les droites B′U′, B″U″,..., menées par les divers points de cette dernière parabole, parallèlement à VBU, se trouveront nécessairement tangentes à la surface; sans quoi leurs parties intérieures, ou *cordes*, ne seraient plus coupées en leurs milieux par le plan BB′C qui est supposé diamétral et conjugué avec VBU. Par conséquent, toutes les droites BU, B′U′, B″U″,..., formeront bien le cylindre circonscrit que l'on demandait, et l'on voit que sa ligne de contact BB′B″C avec la surface sera plane et toujours *parabolique*.

Un raisonnement semblable, fondé sur la définition même du plan diamétral, aurait pu être employé dans le n° **381**.

PROBLÈME I. *Trouver la courbe de contact d'une surface de révolution, avec un cylindre circonscrit et parallèle à une droite donnée.*

383. (*Fig.* 86.) Soient (O, I′Z′) l'axe de la surface de révolution, et (E′C′E″D′, CD) le méridien principal, dont la forme particulière n'aura point d'influence sur le succès de la méthode. Soit d'ailleurs (AB, A′B′) la droite à laquelle doit être parallèle le cylindre circonscrit : la courbe de contact *x′m′y′* (*) de ce cylindre avec la surface proposée peut se construire en cherchant successivement les points qui sont situés sur chaque parallèle, ou bien ceux qui se trouvent sur chaque méridien; d'où résultent les deux procédés suivants.

384. *Méthode du parallèle*. Soit (E′F′, E*m*F) un parallèle choisi arbitrairement sur la surface de révolution S; en substituant à celle-ci le cône droit engendré par la révolution de la tangente E′Z′ du méridien, il est clair que ce cône touchera la surface tout le long du parallèle E′F′, et qu'ainsi tout plan tangent mené à ce cône, parallèlement à (AB, A′B′), touchera S dans le point où l'arête de contact rencontrera le parallèle E′F′; donc ce point appartiendra à la courbe demandée, dont la propriété caractéristique (n° **378**) consiste en ce que, *pour chacun de ces points, le plan tangent de la surface* S *se trouve parallèle à* (AB, A′B′).

Nous sommes ainsi ramenés à conduire un plan tangent au cône Z′E′F′, parallèlement à une droite donnée; mais pour ne pas être obligés de recourir au sommet Z′ de ce cône, qui pourrait se trouver à une distance incommode, et afin de n'avoir à mener des tangentes que d'un même point fixe, nous modifierons le procédé général du n° **124**, de la manière suivante.

Imaginons que le cône droit Z′E′F′ a été transporté parallèlement à lui-même, avec le plan tangent demandé, jusqu'à ce que son sommet soit venu se placer en un certain point O′ de l'axe vertical (O, I′Z′); dans ce mouvement, on sent bien que l'arête de contact aura conservé la même projection *horizontale;* et la trace horizontale du cône ainsi transporté s'obtiendra en tirant la droite O′*e′* parallèle à Z′E′, et en décrivant, avec un rayon O*e* = I′*e′*, le cercle *epf*. Alors, pour mener à ce cône un

(*) Comme le problème actuel a beaucoup d'analogie avec celui du n° 356, nous emploierons ici des *lettres italiques*, afin qu'on aperçoive les parties analogues des *fig.* 84 et 86, sans confondre cependant les deux courbes qui se trouveront reproduites à la fois dans l'épure 89.

plan tangent parallèle à (AB, A′B′), je tire dans cette direction la droite (O′a', Oa) qui vient percer le plan horizontal au point (a, a') duquel devraient partir les tangentes au cercle epf: mais comme je n'ai besoin que des points de contact, je décris sur Oa, comme diamètre, une circonférence qui, par sa rencontre avec le cercle epf, déterminera ces points p et q; et les rayons Op, Oq seront les projections horizontales des génératrices de contact des plans tangents que l'on cherchait. Maintenant, ces génératrices vont rencontrer le parallèle (EmF, E′F′), base du cône primitif, aux points (m, m') et (n, n'); par conséquent, ce sont là deux points de la courbe de contact de la surface de révolution avec le cylindre circonscrit.

385. Les points de cette courbe, situés sur un autre parallèle, se construiront d'une manière semblable, *en transportant toujours au point* O′ le sommet du cône droit circonscrit le long de ce parallèle; et par là, *la circonférence décrite sur le diamètre* Oa *servira pour toutes ces opérations.*

Mais il sera fort avantageux de chercher immédiatement les points situés sur le parallèle E‴F‴ égal à E′F′, surtout si le méridien se trouve, comme dans cet exemple, symétrique au-dessus et au-dessous du plan horizontal C′D′; car alors il n'y aura aucunes nouvelles constructions graphiques à exécuter. En effet, si l'on conçoit le cône Z‴E‴F‴ circonscrit le long du parallèle E‴F‴, il est évident que ses génératrices seront respectivement parallèles à celles du cône Z′E′F′, de sorte que, quand nous le transporterons au point O′, suivant la règle précédente, il coïncidera entièrement avec le cône O′$e'f'$; et toutes les opérations ultérieures redevenant les mêmes que ci-dessus, nous en conclurons que les arêtes de contact avec les plans tangents cherchés, se trouvent encore projetées horizontalement sur les rayons Op, Oq, qui, par leur rencontre avec le cercle EmF, fourniront aussi les points demandés. Toutefois, il y aura ici une petite modification; car on devra prolonger ces rayons au delà de O pour obtenir la véritable position des points cherchés m'' et n'', que l'on projettera en m''' et n''' sur le parallèle E‴F‴; et la raison de cette différence tient à ce que ce parallèle était situé sur la nappe *supérieure* du cône Z‴E‴F‴, tandis que le cercle epf, auquel nous menons les tangentes ap et aq, se trouve sur la nappe *inférieure* de ce cône transporté dans la position O′$e'f'$.

386. *Méthode du méridien.* (*Fig.* 86.) Si l'on veut obtenir les points de la courbe en question, qui seraient situés sur un méridien donné αO$\mathcal{C}$, on imaginera par tous les points de cette méridienne des droites perpendiculaires à son plan, lesquelles formeront un cylindre horizontal évidemment *circonscrit* à la surface de révolution tout le long de cette méridienne. Alors, si l'on mène à ce cylindre auxiliaire un plan tangent parallèle à (AB, A′B′), ce plan touchera la surface S dans le point où il rencontrera la méridienne $\alpha\mathcal{C}$, base du cylindre; et par conséquent ce point appartiendra à la courbe cherchée, qui est (nº **378**) *le lieu de tous les points de contact des plans tangents de* S *menés parallèlement à la droite* (AB, A′B′).

Pour construire ce plan tangent au cylindre auxiliaire qui est horizontal, je tire (nº **117**) la droite (Oa, O′a') parallèle à (AB, A′B′), et du pied (a, a') j'abaisse une perpendiculaire ap sur le plan vertical αO$\mathcal{C}$; alors, en joignant le point p avec

(O, O′), j'aurais la direction suivant laquelle il faudrait mener une tangente à la méridienne $\alpha\mathcal{C}$, base du cylindre proposé. Mais, pour pouvoir effectuer cette opération, je rabats sur le plan vertical cette méridienne et la droite qui réunirait les points p et (O, O′) : par là, le point p se transporte en (e, e') et la droite en question devient (Oe, O′e'); je mène donc, parallèlement à cette dernière, une tangente Z′E′ au méridien principal, et le point de contact (E′, E), étant ramené dans le méridien primitif Oα par un arc de cercle, fournira le point demandé (m, m').

Comme on peut mener au méridien principal une seconde tangente parallèle à O′e', il existe un second point de contact (F‴, F) qui, ramené dans le méridien αO$\mathcal{C}$, fournira un nouveau point (m'', m''') appartenant aussi à la courbe cherchée.

387. Nous retrouvons ici deux points que nous avons déjà construits par l'autre méthode, attendu que le méridien αO$\mathcal{C}$ a été choisi de manière à passer par ces mêmes points; et par là nous avons voulu manifester cette circonstance remarquable, que si les deux méthodes sont fondées sur des considérations très-différentes, elles emploient du moins *les mêmes opérations graphiques* exécutées *dans un ordre précisément inverse.* Mais, outre les points situés sur un parallèle ou sur un méridien quelconque, il en est plusieurs qui s'obtiennent par des procédés directs, et nous recommandons au lecteur de commencer le tracé de l'épure par la recherche de ces points remarquables.

388. (*Fig.* 86.) *Points sur les contours apparents.* Pour les points de la courbe en question qui se trouveront sur l'équateur (C′D′, ClD), les plans tangents de la surface seront verticaux; ainsi les traces horizontales de ces plans seront des droites parallèles à AB et tangentes au cercle ClD. Donc, en tirant le diamètre kl perpendiculaire à AB, les extrémités k et l que l'on projettera sur C′D′ en k' et l' fourniront les points demandés. D'ailleurs, l'arc de courbe qui sera *visible sur le plan horizontal,* se terminera précisément à ces deux points, puisqu'ils appartiennent au contour apparent de la surface par rapport à ce plan de projection; et cet arc visible $lmnk$ se distinguera du reste de la courbe, en examinant si un de ses points (m, m') se trouve *au-dessus* de l'équateur C′D′.

Quant aux points de la courbe qui seront placés sur le contour apparent de la surface relativement au plan vertical, c'est-à-dire sur le méridien principal, on observera que les plans tangents correspondants se trouveront perpendiculaires au plan vertical; donc leurs traces seront des droites parallèles à A′B′ et tangentes à la méridienne E′C′E‴. Ainsi, en menant ces tangentes, et déterminant leurs points de contact x' et y', que l'on projettera sur CD en x et y, on obtiendra les points cherchés, lesquels formeront aussi les extrémités de l'arc de courbe *visible sur le plan vertical;* cet arc sera ici $x'm'y'$, parce que l'un de ses points (m, m') se trouve placé *en avant* du plan vertical CD qui contient le méridien principal.

389. *Les points limites,* c'est-à-dire ceux où *la tangente* de la courbe *sera horizontale,* se trouveront nécessairement situés dans le méridien Oa parallèle à la droite donnée (AB, A′B′). En effet, il résulte évidemment de la construction générale qui a fourni les deux points (m, m') et (n, n') relatifs à un même parallèle, que ce plan vertical Oa divise en deux parties égales toutes les cordes qui lui sont perpendiculaires, telles que (mn, $m'n'$); donc, lorsqu'un de ces points se trouvera dans le plan méridien Oa, l'autre point correspondant devra s'y trouver pareillement, et la droite indéfinie qui les réunissait sera devenue tangente à la courbe sans avoir cessé d'être horizontale.

Maintenant, pour construire ces points placés sur le méridien Oa, j'observe que l'arête du cylindre circonscrit, qui passerait par l'un d'eux, se trouverait nécessairement tangente à la méridienne Oa, puisqu'elle serait dans son plan; par conséquent, il suffira de mener des tangentes à cette méridienne, parallèlement à la droite (AB, A'B'). A cet effet, je rabats sur le plan vertical le méridien Oa et la droite (Oa, O'a') déjà parallèle à (AB, A'B'): cette droite rabattue devient O'a'', et en tirant dans cette direction une tangente au méridien principal, le point de contact u' se projette en u; puis, lorsqu'on ramènera ce point dans le méridien primitif Oa, il prendra la position (r, r'), qui est le point *le plus bas* de la courbe. Le point le plus haut (t, t') s'obtiendra d'une manière semblable, en menant au méridien principal une seconde tangente parallèle à O'a''; mais dans l'exemple actuel, où le méridien est une ellipse, on sait que les deux points de contact de ces tangentes parallèles seraient sur un même diamètre dont le milieu O' restera immobile quand on fera tourner le méridien autour de l'axe vertical; par conséquent, les deux points (r, r') et (t, t') devront encore se trouver sur un diamètre de la surface, et ce dernier point pourra se déduire de l'autre.

390. Cette relation et la dépendance analogue qui existe manifestement ici entre les points (m, m') et (m'', m'''), (n, n') et (n'', n'''),..., sont une suite nécessaire du théorème démontré au n° **381**, d'après lequel on a vu que, quand la surface est du second degré, la courbe de contact d'un cylindre circonscrit est tout entière dans le plan diamétral conjugué avec le diamètre (Oa, O'a'), d'où il résulte évidemment que le centre (O, O') de la surface du second degré doit être aussi *le centre de la courbe* de contact. On peut encore observer que les deux axes de cette courbe dans l'espace sont les diamètres (kl, $k'l'$) et (rt, $r't'$), puisque les tangentes menées aux extrémités de chacun d'eux lui sont perpendiculaires (n° **389**). Puis, comme un de ces deux axes est *horizontal*, ils continueront d'être les *diamètres principaux* de la courbe en projection horizontale; mais il n'en sera pas de même sur le plan vertical, où ils deviennent simplement *diamètres conjugués obliques*.

391. *Troisième méthode, par une enveloppée sphérique.* (*Fig.* 86.) D'après les remarques faites au n° **365**, nous pouvons obtenir les points de la courbe précédente, qui sont situés sur un parallèle donné E'F', en substituant à la surface de révolution S une sphère qui lui soit circonscrite le long de ce parallèle, et dont le rayon sera la normale F'ω' au point F' du méridien principal. En effet, imaginons un cylindre *auxiliaire* circonscrit à cette sphère, et parallèle à (AB, A'B'); la courbe de contact sera ici un grand cercle perpendiculaire à cette droite (n° **381**, *note*), et comme dans les points où ce grand cercle rencontrera le parallèle E'F', les plans tangents de la sphère seront communs à la surface S, il s'ensuit que ces points appar-

tiendront à la courbe demandée, dont le caractère consiste en ce que chaque plan tangent de S se trouve parallèle à (AB, A'B'). Or, si nous faisons tourner autour de la verticale O la sphère et le cylindre circonscrit, ainsi que la droite (Oa, O'a') qui indique la direction des arêtes de ce cylindre, jusqu'à ce que cette dernière droite soit venue dans la position O'a'' parallèle au plan vertical, alors le grand cercle de contact sur la sphère se trouvera projeté suivant le diamètre γ'ω'δ' perpendiculaire à O'a''; et, dans cette situation, ce grand cercle coupera le parallèle E'F' en deux points placés aux extrémités de la corde horizontale projetée en ε'. Mais cette corde ne changera pas de distance par rapport à l'axe vertical O, quand nous ramènerons le système dans l'état primitif; par conséquent, si l'on rapporte, par un arc de cercle, le point ε' en ε sur le méridien Oa, et que l'on tire la corde $m\varepsilon n$ perpendiculaire à Oa, les points m et n, où cette corde rencontrera le parallèle EmF, seront les points demandés qu'il faudra ensuite projeter sur E'F', en m' et n'.

PROBLÈME II. *Mener à une surface de révolution un plan tangent parallèle à une droite donnée, et dont le point de contact se trouve sur un parallèle connu.*

392. Il ne sera pas nécessaire ici, comme nous l'avions indiqué généralement au n° **380**, de construire la courbe de contact de la surface de révolution avec un cylindre circonscrit, dont les arêtes seraient parallèles à la droite donnée; mais il suffira d'appliquer immédiatement au parallèle assigné par la question, la méthode du n° **384** ou celle du n° **391**, ce qui fera connaître le point de contact du plan demandé; après quoi, la construction de ce plan deviendra bien facile.

PROBLÈME III. *Mener à une surface de révolution un plan tangent parallèle à une droite donnée, et dont le point de contact se trouve sur un méridien connu.*

393. On résoudra encore directement ce problème, en appliquant au méridien donné par la question la méthode exposée n° **386**; car elle fera connaître immédiatement le point de contact du plan tangent cherché, ce qui suffira pour construire ce plan.

PROBLÈME IV. *Construire la courbe de contact d'une surface* QUELCONQUE *du second degré, avec un cylindre circonscrit parallèlement à une droite donnée.*

394. En disposant les données de la question comme dans l'épure 85 relative au problème du n° **369**, on substituera d'abord à l'ellipsoïde un cône circonscrit le long d'une section horizontale G'H'; puis, on mènera à ce cône T'G'H' un plan tangent parallèle à la droite donnée, au lieu de le faire passer par le point (V, V'). On sait qu'à cet effet il faudra tirer par le sommet T' une parallèle à la droite assignée par la question, puis chercher le point de rencontre de cette parallèle avec le plan A''D'' que l'on adoptera encore pour base du cône; et ce sera par ce point qu'il faudra mener des tangentes à l'ellipse ABDE. A cela près de cette modification, les opérations graphiques seront les mêmes que dans le n° **369** déjà cité; c'est pourquoi nous laisserons au lecteur le soin d'exécuter les constructions, qui d'ailleurs seront applicables, d'une manière analogue, à toute autre surface du second degré.

CHAPITRE III.

DES PLANS TANGENTS MENÉS PAR UNE DROITE DONNÉE.

395. (*Fig.* 83.) Pour résoudre généralement ce problème par rapport à une surface quelconque S, qu'il faut supposer *non développable*, puisque autrement la question serait impossible (n° **350**), imaginons un cône circonscrit à S et dont le sommet V soit placé arbitrairement *sur la droite donnée* AB; puis déterminons, par quelqu'une des méthodes exposées précédemment, la courbe de contact XλY de ce cône avec la surface S. Cette courbe étant (n° **349**) *le lieu des points de contact de tous les plans tangents de* S *qui vont passer sur le point* V, elle contiendra nécessairement le point de contact λ du plan tangent mené par AVB; et si l'on construit de même la courbe de contact X′λY′ d'un second cône circonscrit à S, et ayant aussi son sommet V′ sur AB, cette courbe devra encore passer par le point cherché λ. Donc ce point sera fourni par l'intersection des deux lignes XλY et X′λY′.

Réciproquement, tout point λ ou μ, qui sera commun à ces deux courbes, satisfera aux conditions du problème, car, dès lors que le point μ se trouve sur XY, le plan tangent de S en μ passera par le point V; puis, à cause que ce point μ se trouve sur X′Y′, ce même plan tangent passera par V′ : d'où l'on doit conclure qu'il renfermera la droite donnée AB.

396. On peut aussi combiner la courbe XλY avec la ligne de contact $x\lambda y$ d'un cylindre circonscrit à S, parallèlement à la droite AB. En effet, cette dernière ligne est le lieu des points de contact de tous les points tangents de S, qui sont *parallèles à* AB (n° **378**); et comme le plan cherché satisfait à cette condition, son point de contact λ devra se trouver encore sur la courbe $x\lambda y$. Réciproquement, pour tout point commun aux courbes $x\lambda y$ et XλY, le plan tangent de S satisfera aux deux conditions suivantes : 1° d'être parallèle à AB; 2° de passer par le point V : donc ce plan renfermera bien la droite AVB.

397. On peut encore n'employer que le seul cône VXY, circonscrit à la surface S; car, en menant à ce cône un plan tangent par la droite AVB, on aura évidemment une solution de la question. Au reste, quand les courbes xy, XY, X′Y′ ne se rencontreront pas, le problème de mener un plan tangent à la surface S par la droite donnée AB, deviendra impossible; et l'on sent bien *à priori* que cela doit arriver pour certaines positions de cette droite.

398. Remarques. Lorsque la surface proposée S est du second degré, on sait (n° **353**) que toutes les courbes de contact XY, X′Y′, X″Y″,..., des cônes circonscrits dont les sommets se trouvent sur AB sont *planes;* par conséquent, les plans de ces courbes ont alors pour intersection commune la corde $\lambda\mu$, qui réunit les points de contact des deux plans tangents menés par AB à la surface S. Il est d'ailleurs facile de voir que cette corde est *conjuguée* avec le plan diamétral qui passerait par AB.

399. En outre, quand la droite AB se trouvera située dans un plan *principal* de la surface S, que nous appellerons *horizontal* pour simplifier le langage, les plans des courbes XY, X′Y′, X″Y″,.., qui sont (n° **353**) respectivement parallèles aux plans diamétraux conjugués avec les droites VO, V′O′, V″O″, seront tous *verticaux*, et par suite les courbes XY, X′Y′,..., se projetteront suivant des droites qui passeront toutes par le point où se projettera la corde $\lambda\mu$; puis, comme d'ailleurs les cônes circonscrits à la surface S se projetteront eux-mêmes suivant des couples de tangentes à la section principale, on peut en conclure ce théorème remarquable de géométrie plane : *Si l'on fait mouvoir sur une droite* AB *le sommet* V *d'un angle variable* XVY *dont les côtés demeurent tangents à une courbe du second degré, les cordes qui joindront deux à deux les points de contact de ces tangentes correspondantes se rencontreront toutes en un point unique, lequel sera situé sur le diamètre conjugué avec la droite* AB. Cette dernière circonstance résulte de ce que la corde $\lambda\mu$ se trouvait dans le plan $x\lambda y$, qui est lui-même (n° **381**) le plan diamétral conjugué avec AB.

400. En revenant au problème général qui fait l'objet de ce chapitre, on voit que la solution exigera ordinairement le tracé des courbes de contact de deux cônes, ou bien d'un cône et d'un cylindre, circonscrits à la surface proposée S; mais, dans plusieurs cas, cette marche pourra être simplifiée par des considérations particulières que nous allons exposer sur divers exemples.

PROBLÈME I. *Par une droite donnée, mener un plan tangent à une sphère.*

401. (*Fig.* 87.) Faisons passer nos deux plans de projection par le centre de la sphère donnée; alors les sections produites par ces plans, et qui formeraient les contours apparents de la surface, se trouveront rabattues suivant un cercle unique EE′F′F, décrit du point O avec le rayon même de la sphère. Soit d'ailleurs (AB, A′B′) la droite donnée; en imaginant un cône circonscrit à la sphère, et dont le sommet soit en un point quelconque de cette droite, il suffira évidemment de mener à ce cône un plan tangent qui passe par (AB, B′A′), pour obtenir la solution du problème proposé; car ce plan renfermera une génératrice du cône circonscrit et une tangente à sa base, qui sont deux droites tangentes à la sphère; et dès lors il sera lui-même tangent à cette dernière surface.

Choisissons pour sommet de ce cône circonscrit le point (A, A′), où la droite donnée vient percer le plan horizontal. Alors, en menant les tangentes AE et AF au grand cercle horizontal de la sphère, cette surface sera touchée par le cône EAF suivant un petit cercle perpendiculaire à la ligne AO (*note* du n° **353**); par conséquent, ce petit cercle sera *vertical* et projeté sur son diamètre EF; puis, comme le plan vertical EF va rencontrer la droite donnée au point (R, R′), c'est de ce point qu'il faut (n° **123**) mener des tangentes à la base du cône. A cet effet, je rabats le cercle vertical EF sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de son diamètre EF, et ce cercle devient EFT; mais, par suite de ce mouvement, le point (R, R′), dont la plus courte distance à la charnière EF était la verticale (R, R′G), se transportera perpendiculairement à cette charnière, à une distance RR″ = R′G; donc les tangentes R″S et R″T feront connaître, en rabattement, les