points de contact S et T des plans tangents demandés avec la base du cône, et aussi avec la sphère. A présent, pour ramener ces points dans leur véritable position, je relève le système autour de la charnière EF, et, en abaissant sur cette ligne les perpendiculaires $S\lambda$ et $T\mu$, j'obtiens les projections horizontales λ et μ des points de contact cherchés. Quant aux projections verticales, j'observe que les points S et T, quand ils seront relevés, auront pour hauteurs au-dessus du plan horizontal les ordonnées $S\lambda$ et $T\mu$; donc, en prenant sur des perpendiculaires à la ligne de terre les distances $I\lambda' = S\lambda$, $V\mu' = T\mu$, on aura enfin (λ, λ') et (μ, μ') pour les points de contact de la sphère avec les plans tangents menés par la droite (AB, A'B').

402. Une fois les points de contact trouvés, il sera bien facile d'obtenir les traces AO et XB', AY et YB' de chaque plan, puisqu'elles doivent passer par les points A et B', et se trouver respectivement perpendiculaires sur les projections des rayons menés aux points de contact. Cependant comme cette dernière condition n'offrira pas toujours, dans la pratique, toute la précision désirable, on pourra la remplacer par une droite qui unirait le point de contact avec un point arbitraire de (AB, A'B'), ou qui serait parallèle à cette dernière ligne.

403. *Deuxième méthode.* (*Fig.* 87.) Outre le cône EAF déjà circonscrit à la sphère, imaginons-en un second pareillement circonscrit, et dont le sommet soit en (B, B'). Ce dernier touchera la sphère suivant un petit cercle perpendiculaire à la ligne B'O (nº **353**, *note*), et par conséquent perpendiculaire au plan vertical de projection dans lequel est située cette ligne; ainsi, en menant les tangentes B'E' et B'F', ce petit cercle de contact sera projeté verticalement sur E'F' qui en sera le diamètre. Or, d'après les considérations générales exposées au nº **395**, les cercles EF et E'F' doivent passer l'un et l'autre par les points de contact de la sphère avec les plans tangents menés par (AB, A'B'); donc ces deux points seront aux extrémités de la corde suivant laquelle se coupent ces deux cercles, corde qui a nécessairement pour projection horizontale la droite indéfinie EF, et pour projection verticale E'F'.

Cela posé, rabattons cette corde avec un des deux cercles qui la contiennent, par exemple avec le cercle vertical EF, qui, en tournant autour de son diamètre horizontal, est déjà venu se placer en ETF. Pendant ce mouvement, le point (K, K'), où la corde en question vient percer le plan horizontal, restera immobile, parce qu'il est sur la charnière EF. Un second point de cette corde, par exemple sa trace verticale (L, L'), décrira un arc de cercle dont le rayon sera la verticale L'L abaissée de ce point sur la charnière; donc si, dans une direction perpendiculaire à EF, on porte la distance $LL'' = LL'$, le point L'' sera la position que prendra (L, L') après le rabattement de la corde, et cette dernière deviendra KL''. Alors les points S et T, où cette droite coupera le petit cercle rabattu suivant ETF, seront les deux extrémités de la corde; et il n'y aura plus qu'à les ramener sur EF, par des perpendiculaires $S\lambda$ et $T\mu$, puis enfin à projeter les points λ et μ sur E'F', en λ' et μ'.

404. *Troisième méthode.* (*Fig.* 87.) Après avoir déterminé seulement les droites EF et E'F', au moyen des couples de tangentes menées à la sphère par les points A et B', et avoir observé que ce sont là *les projections de la corde* qui réunit les

deux points de contact des plans tangents demandés, on peut éviter de tracer une nouvelle circonférence, en cherchant la rencontre de cette corde (EF, E'F') avec *le grand cercle* qui la contient. Le plan de ce dernier aura pour trace horizontale OK; et, en le rabattant autour de cette droite, ce grand cercle se confondra avec le contour de la sphère. Quant à la corde (EF, E'F'), emportée par le même mouvement, elle passera toujours par le point K qui, étant sur la charnière, demeure immobile; tandis que le point (L, L') de cette corde décrira un arc de cercle dont le rayon sera la perpendiculaire abaissée de ce point sur OK. Or, si l'on tire LM à angle droit sur OK, il est facile de voir que le rayon en question aboutira en M, et se trouvera l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés LM et LL'; si donc on construit ce triangle NLM, et que l'on prolonge LM d'une quantité $Ml'' = MN$, le point l'' sera la position que prendra (L, L') après le rabattement de la corde, et, par conséquent, cette droite deviendra Kl''. Alors les points P et Q, où cette dernière ligne coupera le contour de la sphère, seront les points cherchés qu'il faudra ensuite ramener, par des perpendiculaires à la charnière OK, en λ et μ sur EF; puis, enfin, on projettera ces derniers points sur E'F' en λ' et μ'.

405. *Quatrième méthode.* (*Fig.* 88.) Dans cette méthode, qui deviendrait nécessaire si les deux traces de la droite donnée étaient placées à des distances trop considérables, on regarde comme construits les deux plans tangents menés à la sphère par la droite (AB, A'B'); puis, en les coupant par un plan conduit suivant les rayons qui aboutissent aux points de contact, il est clair qu'on aura pour sections *deux droites tangentes au grand cercle* contenu dans ce plan sécant, et que la connaissance de ces tangentes suffira pour déterminer les points de contact cherchés. Or il est aisé de construire ces tangentes, parce que le plan sécant dont nous parlons, passant par deux rayons respectivement perpendiculaires aux plans tangents, se trouvera lui-même perpendiculaire à ces deux-ci, et, par conséquent, il le sera à leur intersection (AB, A'B'); ainsi ses traces seront les droites OC et OD' menées à angle droit sur AB et A'B'. D'ailleurs ce plan COD' coupera la droite (AB, A'B') en un point (R, R') que l'on sait construire (nº **30**), et d'où il faudra mener des tangentes au grand cercle (*) suivant lequel la sphère est coupée par ce même plan COD'. Pour cela, rabattons ce plan autour de sa trace horizontale OC : le grand cercle en question viendra se confondre avec le contour de la sphère; le point (R, R') décrira autour de la charnière OC un arc, dont le rayon sera la perpendiculaire (RC, R'C') abaissée sur cette droite : donc, en construisant la vraie grandeur CH de ce rayon, et la rabattant de C en R'', ce dernier point sera la position nouvelle de (R, R'), et les tangentes cherchées seront rabattues suivant R''P et R''Q.

Maintenant, voyons ce que deviennent les points de contact P et Q, lorsqu'on ramène ces tangentes dans le plan COD'. La première, R''P, rencontrait la char-

(*) Ce grand cercle n'est autre chose que la courbe de contact de la sphère avec un cylindre circonscrit et parallèle à la droite (AB, A'B') : de sorte que, pour tous les points de cette circonférence, les plans tangents de la sphère sont parallèles à la droite donnée.

nière OC en un point V qui restera immobile; ainsi cette droite sera projetée horizontalement sur RV, et, par suite, sa projection verticale sur R'V' : donc, en ramenant, par une perpendiculaire à OC, le point P en λ sur RV, puis en projetant λ en λ' sur R'V', on obtiendra la vraie situation du point de contact (λ, λ') du premier plan tangent à la sphère.

Quant à la tangente rabattue suivant R″Q, elle va couper ici la charnière OC à une distance trop considérable pour qu'on puisse tirer parti de ce point immobile. Mais pour y suppléer, j'observe que PQ représente le rabattement de la corde qui unirait les deux points de contact des plans tangents; et comme cette corde rencontre la charnière OC au point (K, K'), elle a nécessairement pour projections Kλ et K'λ'. Donc, en ramenant, par une perpendiculaire à OC, le point Q en μ sur Kλ, puis projetant μ en μ' sur K'λ', on obtiendra le point de contact (μ, μ') du second plan tangent à la sphère. On pourrait d'ailleurs s'appuyer aussi sur cette considération, que la corde (λμ, λ'μ') doit évidemment se trouver perpendiculaire au plan AOB qui passerait par le centre de la sphère et par la droite donnée (AB, A'B').

PROBLÈME II. *Par une droite donnée, mener un plan tangent à une surface de révolution dont le méridien quelconque est connu.*

406. (*Fig.* 89.) Soient (O, I'Z') l'axe de révolution, (X'C'Y'D', CD) le méridien principal de la surface, et (AB, A'B') la droite par laquelle il faut conduire le plan tangent demandé. Nous emploierons ici la méthode générale indiquée aux nos **395**, **396**, et conséquemment nous chercherons :

1° La courbe de contact (XKYRL, X'K'Y'R'L') de la surface proposée avec un cône circonscrit dont le sommet (V, V') est pris à volonté sur la droite (AB, A'B'); cette courbe se construira par les moyens employés pour le problème du n° **356**, et nous avons eu soin de conserver ici les mêmes lettres qui avaient servi dans l'épure 84, relative à ce problème isolé : de sorte que les explications antérieures s'appliqueront littéralement à l'épure actuelle;

2° La courbe de contact (*xtlyr*, *x't'l'y'r'*) de la surface proposée avec un cylindre circonscrit parallèlement à (AB, A'B'), laquelle courbe se construira aussi par les moyens employés pour résoudre le problème du n° **383**, sur l'épure 86, dont les notations ont été conservées dans l'épure actuelle.

Maintenant, examinons si ces deux courbes de contact se coupent quelque part, et, pour trouver leurs points de section, gardons-nous de combiner, sur un même plan de projection, une branche *pleine* ou visible, avec une branche *ponctuée* ou invisible; car de telles branches, n'étant pas situées sur la même nappe de la surface, ne sauraient se rencontrer. Nous voyons ici que les courbes se coupent en deux points (λ, λ') et (μ, μ'), dont les projections horizontales et verticales doivent d'ailleurs, pour chacun d'eux, être placées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre; alors, d'après les raisonnements développés aux nos **395** et **396**, ce sont là les points de contact de la surface de révolution avec les plans tangents qui passeraient par (AB, A'B'), et, une fois ces points connus, il sera bien facile de construire, par divers moyens, les traces des plans. Nous ferons seulement observer

que les traces horizontales devront passer par le pied A de la droite, et être perpendiculaires aux projections Oλ et Oμ des normales relatives aux deux points de contact trouvés.

407. *Cas particuliers.* Si la droite donnée était verticale, il suffirait évidemment de mener par son pied deux tangentes à la projection horizontale de l'équateur.

Si cette droite était horizontale, on mènerait un plan méridien qui lui fût perpendiculaire, et, du point où il la rencontrerait, on tirerait deux tangentes à la méridienne contenue dans ce plan; opération facile à exécuter, quand on aurait rabattu ce point et la méridienne en question sur le plan vertical, comme on l'a fait au n° **360** pour le point P″ de l'épure 84.

408. *Deuxième méthode.* Lorsque la surface de révolution sera *du second degré*, il y aura beaucoup d'avantage à employer, comme au n° **395**, deux cônes circonscrits dont on placera les sommets aux deux points où la droite donnée rencontrera le plan de l'équateur et le plan du méridien principal; parce qu'alors, d'après le théorème démontré n° **353**, chacune des courbes de contact sera projetée suivant *une droite* sur un des deux plans de projection : et il n'y aura à construire dans toute l'épure qu'*une seule courbe*, ainsi que nous l'expliquerons en détail dans le problème analogue et *plus général* qui sera traité au n° **417**.

409. *Troisième méthode.* En supposant encore que la surface de révolution soit *du second degré*, on pourra n'employer qu'un seul des deux cônes circonscrits dont nous venons de parler; car, comme la courbe de contact sera (n° **353**) tout entière dans un plan perpendiculaire au plan horizontal (ou au plan vertical), il suffira de mener à cette courbe deux tangentes par le point où son plan rencontrera la droite donnée (*). D'ailleurs on a vu (n° **374**) combien il était facile de construire ces tangentes avec leurs points de contact, sans tracer la courbe du second degré en question, mais en connaissant seulement ses deux axes; or l'un de ceux-ci s'obtiendra immédiatement en menant par le sommet du cône circonscrit deux tangentes à l'équateur (ou au méridien principal), et le second axe s'en déduira d'une manière bien facile à imaginer (*voyez* n° **418**).

Nous engageons le lecteur à appliquer cette méthode à un ellipsoïde de révolution; mais ici, pour varier les exemples, nous allons en faire l'application à un hyperboloïde gauche de révolution, défini par sa génératrice rectiligne, et non par sa méridienne.

PROBLÈME III. *Par une droite donnée, mener un plan tangent à un hyperboloïde gauche de révolution.*

410. Soient (O, O'O″) l'axe vertical de la surface, et (ADB, A'D'A″) (*fig.* 90) la droite mobile qui, en tournant autour de cet axe, engendre (n° **140**) l'hyperboloïde que nous supposons terminé aux deux sections horizontales A'B' et A″B″, également éloignées du cercle de gorge. Nous n'exécuterons pas la représentation

(*) Cette marche est analogue à celle qui nous a servi pour la sphère, au n° 401.

de la surface sur le plan vertical, puisque cela conduirait à tracer l'hyperbole méridienne dont nous voulons éviter l'emploi; mais sur le plan horizontal, nous regarderons la surface comme réellement projetée, et en conséquence nous ponctuerons les parties de lignes principales qui seront au-dessous de la nappe supérieure.

411. Maintenant, soit $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ la droite par laquelle il s'agit de mener un plan tangent; si du point (V, V'), où elle perce le plan horizontal du cercle de gorge, on imagine un cône circonscrit dont deux des arêtes seront évidemment les tangentes VX et VY, ce cône touchera l'hyperboloïde suivant une courbe située tout entière (n° **353**) dans le plan vertical XY, et qui, par conséquent, sera une hyperbole ayant pour axe réel la corde XY. Donc, en menant deux tangentes à cette courbe par le point (R, R'), où son plan va couper la droite $(\alpha V\beta, \alpha' V'\beta')$, on obtiendra les points de contact des plans tangents à l'hyperboloïde.

412. Pour construire ces tangentes, il faut d'abord faire tourner autour de l'axe $(X, O'O'')$ le plan vertical XY, jusqu'à ce qu'il prenne la position xy, parallèle au méridien principal, et alors le point (R, R') se transportera en (r, r'). Dans cette situation, l'hyperbole contenue dans le plan vertical xy est semblable à la méridienne principale de la surface, et a comme elle, pour projections de ses asymptotes, les droites $A'D'$ et $B'D'$; de là, et au moyen de l'axe réel $x'y'$, on déduit aisément les deux foyers φ et ψ. Cela posé, pour mener des tangentes à cette hyperbole par le point r' (*), je décris un arc de cercle avec la distance $r'\varphi$ pour rayon, et un autre arc dont le centre soit en ψ et le rayon égal à $x'y'$; puis, en tirant la droite $r'l'$ par le milieu de l'arc $\varphi\gamma$, j'obtiens l'une des tangentes cherchées, et son point de contact l' sera déterminé par sa rencontre avec la droite $\psi\gamma$. De même, l'autre tangente sera la droite $r'm'$ menée par le milieu de l'arc $\varphi\delta$, et la ligne $\psi\delta$ prolongée déterminera le point de contact m' de cette seconde tangente.

A présent, il ne reste plus qu'à projeter les points l' et m' en l et m sur xy, puis à ramener ces points dans le plan vertical primitif XY, en (λ, λ') et (μ, μ'). Ce sont là les points de contact de l'hyperboloïde avec les deux plans tangents menés par la droite $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$; et leurs traces $\alpha B_2 A_2$ et $\alpha A_3 B_3$ sont faciles à construire avec ces seules données.

413. Mais comme, dans l'hyperboloïde gauche, nous savons que chaque plan tangent doit renfermer deux génératrices rectilignes de la surface, lesquelles se coupent au point de contact, on pourra mener par les points λ et μ quatre tangentes au cercle de gorge, savoir λA_2, λB_2, μA_3, μB_3, lesquelles fourniront, par leurs rencontres avec la trace horizontale de la surface, quatre points appartenant aux traces des plans tangents. D'ailleurs les deux génératrices λA_2 et μB_2, faisant partie l'une du système (AD, A'D'), l'autre du système (BD, B'D'), iront nécessairement se couper (n° **144**) en un point qui devra évidemment se trouver sur la droite $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$; et ce point $(\varepsilon, \varepsilon')$ sera précisément celui *où cette droite perce l'hyperbo-*

(*) *Voyez*, dans les Traités des sections coniques, *la méthode des Anciens* pour mener des tangentes à ces courbes.

loïde. Il y aurait aussi un second point de section qui serait fourni par la rencontre des génératrices λB_2 et μA_3.

414. *Observation.* Si le point (V, V'), où la droite donnée $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ perce le plan horizontal du cercle de gorge, se trouvait en dedans de ce cercle, on ne pourrait plus mener les tangentes VX, VY; et cela indiquerait que la courbe de contact de l'hyperboloïde avec le cône circonscrit qui a son sommet en (V, V') change de position, et devient une hyperbole dont l'*axe réel* est vertical, et dont le plan est toujours perpendiculaire à l'horizontale VO. Dans ce cas, on mènerait du point (V, V') deux tangentes à la méridienne située dans le plan VO, et la corde comprise entre leurs points de contact serait l'axe réel cherché; ensuite, le reste des constructions s'effectuerait d'une manière analogue à ce qui a été fait dans le premier cas.

415. *Autre solution.* (*Fig.* 90.) Les remarques faites au n° **413** fournissent une méthode fort simple et applicable à toutes les positions de la droite donnée. En effet, si, après avoir construit, par le procédé du n° **284**, les points d'intersection de la droite $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ avec l'hyperboloïde, on mène par l'un d'eux $(\varepsilon, \varepsilon')$ des tangentes εA_2, εB_3 au cercle de gorge, ces génératrices, combinées tour à tour avec $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$, détermineront immédiatement les deux plans tangents demandés, qui auront pour traces horizontales αA_2 et αB_3. Quant aux points de contact, ils seront fournis par les deux autres génératrices partant des points B_2 et A_3 (*).

416. Il résulte de là que, si la droite donnée ne coupait pas l'hyperboloïde quelque part, il serait impossible de mener par cette droite un plan tangent à la surface; condition qui est évidente *à priori*, puisque tout plan tangent devant renfermer ici deux génératrices qui se coupent, il y en aura au moins une qui rencontrera la droite $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ située par hypothèse dans ce plan tangent. Seulement, ce point de rencontre s'éloignera à l'infini, dans le cas tout particulier où ces deux génératrices et la droite $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ se trouveront parallèles toutes trois; mais alors la position du plan tangent n'en deviendra que plus facile à assigner, puisqu'il sera évidemment (n° **280**) tangent au cône asymptote.

PROBLÈME IV. *Par une droite donnée, mener un plan tangent à une surface* QUELCONQUE *du second degré.*

417. (*Fig.* 91.) Prenons pour exemple un ellipsoïde rapporté à deux plans de projection, dont chacun soit parallèle à un plan principal de la surface; celle-ci aura pour contours apparents les ellipses *principales* (ABDE, A'D') et (A'C'D'F', AD) qui ont chacune deux axes communs avec l'ellipsoïde. Soit d'ailleurs (RS, R'S') la droite donnée; les points de contact des plans tangents menés par cette droite seront fournis (n° **395**) par les intersections des courbes de contact de deux cônes circonscrits à l'ellipsoïde, et ayant leurs sommets situés où l'on voudra sur la droite donnée; mais, pour simplifier la construction de ces courbes, plaçons les sommets

(*) Une solution semblable peut être appliquée à l'hyperboloïde à une nappe et non de révolution. (*Voyez* n° 590.)

de ces cônes aux points (V, V') et (v, v'), où la droite $(RS, R'S')$ va rencontrer les plans des deux ellipses principales qui se trouvent parallèles aux plans de projection.

418. Alors, si l'on mène les tangentes $V'\alpha'$ et $V'\delta'$ à l'ellipse $A'C'D'F'$, les points α' et δ' appartiendront évidemment à la projection verticale de la courbe de contact du cône circonscrit (V, V'); et cette courbe, qui est plane (nº **353**), se trouvera projetée verticalement sur la droite $\alpha'\delta'$. En effet, comme le sommet (V, V') est situé dans un plan vertical VAD qui divise l'ellipsoïde en deux parties exactement symétriques, il est certain que les points de la courbe de contact doivent être, deux à deux, sur des cordes perpendiculaires à ce plan principal; donc aussi le plan de la courbe cherchée sera perpendiculaire au plan vertical VAD, et s'y projettera suivant la droite $\alpha'\delta'$ qui réunit les deux points déjà trouvés.

Par les mêmes raisons, la droite $(\alpha\delta, \alpha'\delta')$ est un axe de la courbe dans l'espace, et elle continue à jouir de cette propriété en projection horizontale, où elle fournit les deux sommets α et δ. La direction $\omega\beta$ du second axe se déduit aisément de là; mais, pour déterminer sa longueur, j'observe que ces deux axes sont proportionnels à ceux de la section faite, dans l'ellipsoïde, par un plan diamétral $O'a'$, parallèle à la courbe de contact $\alpha'\delta'$. Si donc on projette a' en a, et que l'on tire $a\beta$ parallèle à aB, on obtiendra la longueur $\omega\beta$ du second axe cherché; et alors il sera bien facile de tracer l'ellipse $\alpha X\beta\delta Y$ qui, d'ailleurs, devra passer par les points X et Y que l'on déduit de la section X', et dans lesquels elle *touchera* évidemment le contour ABDE sur le plan horizontal.

419. Maintenant, le deuxième cône circonscrit dont le sommet est en (v, v') touchera l'ellipsoïde suivant une courbe plane qui, par des raisons analogues à celles que nous avons citées plus haut, se trouvera projetée horizontalement sur la droite xy; puis, sans chercher la projection verticale de cette courbe, qui s'obtiendrait par des procédés semblables à ceux qui nous ont servi pour le premier cône, on peut tout de suite apercevoir les points de section λ et μ des deux courbes de contact, sur le plan horizontal, et reporter ces points en λ' et μ' sur $\alpha'\delta'$. Alors nous avons pour chaque plan tangent demandé, son point de contact (λ, λ') ou (μ, μ'), et une droite $(RS, R'S')$ par laquelle il doit passer; de sorte qu'il est bien aisé de trouver ses traces par des constructions dont l'épure actuelle présente seulement les résultats.

420. *Autre méthode.* (*Fig.* 91.) On peut résoudre le problème précédent avec le seul cône circonscrit dont le sommet est en (V, V'); car tout plan tangent à ce cône, qui sera mené par la droite $(RV, R'V')$, satisfera évidemment à la question. On cherchera donc le point (R', R) où cette droite est coupée par le plan de la base $\alpha'\delta'$; puis, on tirera du point R les tangentes $R\lambda$, et $R\mu$, à la courbe $\alpha Y\delta X$: et même, on doit observer qu'il est inutile de tracer l'ellipse $\alpha Y\delta X$, et qu'avec les deux demi-axes $\omega\alpha$ et $\omega\beta$, on sait construire les points de contact μ et λ des tangentes $R\mu$ et $R\lambda$, comme nous l'avons déjà fait dans les nºˢ **374** et **412**. Ainsi, les points (λ, λ') et (μ, μ') seront ceux dans lesquels l'ellipsoïde sera touché par les plans

tangents conduits suivant la droite $(RV, R'V')$; et, par conséquent, ces deux plans se trouveront déterminés par une méthode qui aura l'avantage de n'employer que *la ligne droite et le cercle.*

CHAPITRE IV.

DES PLANS TANGENTS PARALLÈLES A UN PLAN DONNÉ.

421. Soit S la surface à laquelle on propose de mener un plan tangent qui soit parallèle à un plan donné P. Imaginons que, dans ce dernier, on trace deux droites arbitraires A et B; puis, que l'on détermine, par les procédés indiqués au chapitre II, les courbes de contact X et Y de la surface S avec deux cylindres circonscrits, parallèles l'un à A et l'autre à B. Alors on sait (nº **378**) que pour tous les points de la courbe X, les plans tangents de S se trouvent parallèles à A; que pour tous ceux de la courbe Y, les plans tangents sont parallèles à B : donc, si les courbes X et Y se coupent, chaque intersection fournira un point pour lequel le plan tangent de la surface S se trouvera parallèle à la fois aux deux droites A et B, et conséquemment il sera parallèle au plan donné P.

422. Il est bon d'observer que le problème précédent revient à celui-ci : *Mener à une surface* S *une normale qui soit parallèle à une droite donnée* D. En effet, si l'on construit un plan P perpendiculaire à la droite D, il suffira de trouver un plan tangent parallèle à P; et la normale relative au point de contact de ce plan tangent sera évidemment parallèle à la ligne D. Cette recherche est nécessaire pour obtenir *le point brillant* d'une surface, éclairée par des rayons de lumière que l'on regarde comme parallèles entre eux.

423. Lorsque la surface S sera développable, le problème deviendra impossible en général, attendu que la condition d'être parallèle à une droite donnée suffit (nº **379**) pour déterminer complétement le plan tangent d'une pareille surface, et qu'ainsi l'on ne saurait exiger que ce plan soit parallèle à la fois à deux droites A et B, ou au plan P qui les contient.

424. Le mode de solution que nous avons indiqué au nº **421** est général, mais il entraînera souvent dans des opérations graphiques fort compliquées; c'est pourquoi il faudra chercher, dans chaque surface, à profiter des propriétés particulières qui pourront simplifier la solution, comme nous allons l'indiquer sur quelques exemples.

1º Si la surface proposée est de révolution, auquel cas chaque plan tangent est perpendiculaire au plan méridien correspondant, on commencera par mener un plan méridien perpendiculaire au plan donné P, et qui coupera ce dernier suivant une droite que j'appelle δ; alors, en tirant à la section méridienne ainsi obtenue une tangente parallèle à δ, son point de contact sera évidemment celui d'un plan tangent qui se trouvera parallèle à P. Cette marche sera d'une application fort aisée pour une sphère, un ellipsoïde, un tore, etc.