de ces cônes aux points (V, V') et (v, v'), où la droite $(RS, R'S')$ va rencontrer les plans des deux ellipses principales qui se trouvent parallèles aux plans de projection.

418. Alors, si l'on mène les tangentes $V'\alpha'$ et $V'\delta'$ à l'ellipse $A'C'D'F'$, les points α' et δ' appartiendront évidemment à la projection verticale de la courbe de contact du cône circonscrit (V, V'); et cette courbe, qui est plane (n° **355**), se trouvera projetée verticalement sur la droite $\alpha'\delta'$. En effet, comme le sommet (V, V') est situé dans un plan vertical VAD qui divise l'ellipsoïde en deux parties exactement symétriques, il est certain que les points de la courbe de contact doivent être, deux à deux, sur des cordes perpendiculaires à ce plan principal; donc aussi le plan de la courbe cherchée sera perpendiculaire au plan vertical VAD, et s'y projettera suivant la droite $\alpha'\delta'$ qui réunit les deux points déjà trouvés.

Par les mêmes raisons, la droite $(\alpha\delta, \alpha'\delta')$ est un axe de la courbe dans l'espace, et elle continue à jouir de cette propriété en projection horizontale, où elle fournit les deux sommets α et δ. La direction $\omega\beta$ du second axe se déduit aisément de là; mais, pour déterminer sa longueur, j'observe que ces deux axes sont proportionnels à ceux de la section faite, dans l'ellipsoïde, par un plan diamétral $O'a'$, parallèle à la courbe de contact $\alpha'\delta'$. Si donc on projette a' en a, et que l'on tire $a\beta$ parallèle à aB, on obtiendra la longueur $\omega\beta$ du second axe cherché; et alors il sera bien facile de tracer l'ellipse $\alpha X\beta\delta Y$ qui, d'ailleurs, devra passer par les points X et Y que l'on déduit de la section X', et dans lesquels elle *touchera* évidemment le contour ABDE sur le plan horizontal.

419. Maintenant, le deuxième cône circonscrit dont le sommet est en (v, v') touchera l'ellipsoïde suivant une courbe plane qui, par des raisons analogues à celles que nous avons citées plus haut, se trouvera projetée horizontalement sur la droite xy; puis, sans chercher la projection verticale de cette courbe, qui s'obtiendrait par des procédés semblables à ceux qui nous ont servi pour le premier cône, on peut tout de suite apercevoir les points de section λ et μ des deux courbes de contact, sur le plan horizontal, et reporter ces points en λ' et μ' sur $\alpha'\delta'$. Alors nous avons pour chaque plan tangent demandé, son point de contact (λ, λ') ou (μ, μ'), et une droite $(RS, R'S')$ par laquelle il doit passer; de sorte qu'il est bien aisé de trouver ses traces par des constructions dont l'épure actuelle présente seulement les résultats.

420. *Autre méthode.* (*Fig.* 91.) On peut résoudre le problème précédent avec le seul cône circonscrit dont le sommet est en (V, V'); car tout plan tangent à ce cône, qui sera mené par la droite $(RV, R'V')$, satisfera évidemment à la question. On cherchera donc le point (R', R) où cette droite est coupée par le plan de la base $\alpha'\delta'$; puis, on tirera du point R les tangentes $R\lambda$, et $R\mu$, à la courbe $\alpha Y\delta X$: et même, on doit observer qu'il est inutile de tracer l'ellipse $\alpha Y\delta X$, et qu'avec les deux demi-axes $\omega\alpha$ et $\omega\beta$, on sait construire les points de contact μ et λ des tangentes $R\mu$ et $R\lambda$, comme nous l'avons déjà fait dans les n^{os} **374** et **412**. Ainsi, les points (λ, λ') et (μ, μ') seront ceux dans lesquels l'ellipsoïde sera touché par les plans

tangents conduits suivant la droite $(RV, R'V')$; et, par conséquent, ces deux plans se trouveront déterminés par une méthode qui aura l'avantage de n'employer que *la ligne droite et le cercle.*

CHAPITRE IV.

DES PLANS TANGENTS PARALLÈLES A UN PLAN DONNÉ.

421. Soit S la surface à laquelle on propose de mener un plan tangent qui soit parallèle à un plan donné P. Imaginons que, dans ce dernier, on trace deux droites arbitraires A et B; puis, que l'on détermine, par les procédés indiqués au chapitre II, les courbes de contact X et Y de la surface S avec deux cylindres circonscrits, parallèles l'un à A et l'autre à B. Alors on sait (n° **378**) que pour tous les points de la courbe X, les plans tangents de S se trouvent parallèles à A; que pour tous ceux de la courbe Y, les plans tangents sont parallèles à B : donc, si les courbes X et Y se coupent, chaque intersection fournira un point pour lequel le plan tangent de la surface S se trouvera parallèle à la fois aux deux droites A et B, et conséquemment il sera parallèle au plan donné P.

422. Il est bon d'observer que le problème précédent revient à celui-ci : *Mener à une surface* S *une normale qui soit parallèle à une droite donnée* D. En effet, si l'on construit un plan P perpendiculaire à la droite D, il suffira de trouver un plan tangent parallèle à P; et la normale relative au point de contact de ce plan tangent sera évidemment parallèle à la ligne D. Cette recherche est nécessaire pour obtenir *le point brillant* d'une surface, éclairée par des rayons de lumière que l'on regarde comme parallèles entre eux.

423. Lorsque la surface S sera développable, le problème deviendra impossible en général, attendu que la condition d'être parallèle à une droite donnée suffit (n° **379**) pour déterminer complétement le plan tangent d'une pareille surface, et qu'ainsi l'on ne saurait exiger que ce plan soit parallèle à la fois à deux droites A et B, ou au plan P qui les contient.

424. Le mode de solution que nous avons indiqué au n° **421** est général, mais il entraînera souvent dans des opérations graphiques fort compliquées; c'est pourquoi il faudra chercher, dans chaque surface, à profiter des propriétés particulières qui pourront simplifier la solution, comme nous allons l'indiquer sur quelques exemples.

1° Si la surface proposée est de révolution, auquel cas chaque plan tangent est perpendiculaire au plan méridien correspondant, on commencera par mener un plan méridien perpendiculaire au plan donné P, et qui coupera ce dernier suivant une droite que j'appelle δ; alors, en tirant à la section méridienne ainsi obtenue une tangente parallèle à δ, son point de contact sera évidemment celui d'un plan tangent qui se trouvera parallèle à P. Cette marche sera d'une application fort aisée pour une sphère, un ellipsoïde, un tore, etc.

2° S'il s'agit d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, lequel admet (n° **146**) deux systèmes de génératrices rectilignes respectivement parallèles aux arêtes du cône asymptotique, on coupera ce cône par un plan mené du sommet, parallèlement à P. Ce plan sécant fournira deux arêtes α et α', parallèles à P, et l'on en déduira aisément les quatre génératrices correspondantes de l'hyperboloïde, savoir, A et B parallèles à α, puis A′ et B′ parallèles à α'. Alors, en combinant les génératrices A et B′, on obtiendra un plan évidemment parallèle à P, et qui touchera l'hyperboloïde dans le point où ces deux droites se coupent; puis, on en trouvera un second qui remplira les mêmes conditions, en combinant ensemble les génératrices A′ et B qui se coupent pareillement.

La même méthode s'appliquera à un hyperboloïde à une nappe et *non de révolution*, attendu que cette surface admet aussi, comme nous le verrons au livre VII, deux systèmes de génératrices rectilignes parallèles aux arêtes d'un cône asymptotique (*voyez* **581**).

CHAPITRE V.

DES PLANS TANGENTS A PLUSIEURS SURFACES A LA FOIS.

425. *Trouver un plan qui touche en même temps deux surfaces données* S *et* T.

Pour résoudre ce problème d'une manière générale, et quels que soient les plans de projection adoptés, menons dans l'espace un plan arbitraire P; puis, cherchons la courbe de contact X de la surface S avec un cylindre circonscrit et perpendiculaire au plan P, question qui rentre dans celle du n° **377**, puisque les arêtes de ce cylindre devront être *parallèles à une droite connue*, savoir la perpendiculaire au plan P. Déterminons de même la courbe analogue Y pour la surface T, et construisons les projections x et y de ces deux lignes sur le plan P : alors, en menant une tangente commune aux deux courbes x et y, ce sera la trace d'un plan π perpendiculaire à P, et qui, touchant évidemment les deux cylindres, sera nécessairement tangent aux surfaces S et T. On obtiendra donc ainsi une solution du problème proposé; mais il y en aura une infinité d'autres π', π'',..., que l'on trouvera en répétant des constructions analogues pour divers plans P′, P″,..., choisis dans des directions différentes.

426. On peut lier entre elles toutes ces solutions, en construisant *la surface développable qui est circonscrite à la fois aux deux surfaces* S *et* T. Pour cela, imaginons que les points de contact m et n des courbes x et y avec leur tangente commune sur le plan P, ont été projetés sur les courbes X et Y en M et N; ce seront là les points dans lesquels le plan π touche les deux surfaces S et T; et si l'on construit semblablement les points de contact M′ et N′, M″ et N″,..., des plans π', π'',..., la suite des droites MN, M′N′, M″N″,..., formera une surface Σ qui touchera évidemment S et T le long des courbes MM′M″..., et NN′N″...; mais j'ajoute que cette surface Σ sera *développable*. En effet, si les points M et M′ sont pris infiniment voisins, le plan tangent π renfermera les éléments linéaires MM′ et NN′, et dès lors les deux

génératrices MN et M′N′ seront bien situées dans un même plan, ce qui est le caractère distinctif des surfaces développables (n° **179**). D'ailleurs, on peut regarder les droites infiniment voisines MN, M′N′, M″N″,..., comme les intersections consécutives des plans π, π', π'',..., ou bien comme l'enveloppe de l'espace parcouru par le plan π lorsqu'il roule sur les surfaces S et T, en demeurant tangent à l'une et à l'autre, ainsi que nous l'avons expliqué aux n^os^ **182** et **184**.

Cela posé, quand la surface Σ sera construite, tous les plans tangents qu'on lui mènera, toucheront pareillement S et T, et fourniront les diverses solutions du problème primitif.

427. La surface développable Σ circonscrite aux surfaces S et T, est nécessaire à considérer dans la *théorie des ombres;* et elle présente ordinairement *deux nappes* distinctes, lesquelles proviennent de ce que les courbes x et y du n° **425** peuvent admettre une tangente commune *extérieure*, et une autre *intérieure*. Au surplus, ces généralités seront éclaircies par l'exemple fort simple des deux sphères que nous considérerons au n° **437**.

428. Lorsqu'une des deux surfaces proposées, par exemple S, est elle-même *développable*, le problème de leur mener un plan tangent commun n'est pas en général impossible; mais il n'admet plus une infinité de solutions, comme on doit le sentir en faisant rouler un plan tangent sur la surface S jusqu'à ce qu'il rencontre T. D'ailleurs, dans l'hypothèse actuelle, la courbe x relative au plan P (n° **425**) se réduirait à une ou plusieurs lignes droites, auxquelles il ne serait plus possible de mener une tangente commune avec la courbe y; à moins que l'une de ces droites ne se trouvât d'elle-même tangente à cette courbe y, ce qui ne pourrait arriver que pour un certain nombre des plans P, P′, P″... : de sorte que le problème deviendrait déterminé, et la surface Σ se réduirait alors à un ou à plusieurs plans. Nous en verrons un exemple dans le n° **434**.

429. Enfin, le problème n'admettrait en général aucune solution, si les surfaces données S et T étaient toutes deux développables, puisque les courbes x et y du n° **425**, devenant alors l'une et l'autre des lignes droites, sur tous les plans P, P′, P″,..., il ne serait plus possible de leur mener une tangente commune.

430. Lorsque les surfaces S et T ne sont développables ni l'une ni l'autre, on peut rendre *déterminé* le problème de leur mener un plan tangent commun, en assignant un point extérieur V par lequel devra passer le plan demandé. En effet, cela reviendra à conduire par ce point V un plan tangent à la surface développable Σ, qui est circonscrite (n° **426**) aux surfaces S et T, et cette dernière question n'est susceptible que d'un nombre limité de solutions, comme nous l'avons vu n^os^ **349** et **350**. Pour les obtenir, il faudra généralement construire la section faite dans la surface Σ par un plan quelconque mené du point V, puis tirer par ce point des tangentes à cette section; alors chacune de ces tangentes, jointe à la génératrice rectiligne qui passe par son point de contact, déterminera un plan tangent à la surface Σ, et, par suite, aux deux surfaces primitives S et T. On trouvera un exemple de ce genre au n° **437**.

23.

431. *Trouver un plan qui touche en même temps trois surfaces données* S, T, U.

La marche générale pour résoudre ce problème consiste à imaginer une surface développable Σ circonscrite à S et à T, puis une autre Σ_2 circonscrite à S et à U. Alors, en construisant (nº **246**) les courbes de contact MM'... et $M_2M'_2$... de ces deux surfaces Σ et Σ_2 avec S, chaque point μ, où se rencontreront ces courbes, sera tel, que le plan tangent de S touchera évidemment les surfaces Σ et Σ_2 à la fois, et, par suite, ce plan touchera aussi les surfaces T et U. Ce sera donc une solution du problème; mais comme les opérations graphiques seront ordinairement fort compliquées, nous nous bornerons à en citer un exemple où les constructions deviennent très-simples (*voyez* nº **441**).

Observons que, quoique nous ayons dit (nº **429**) qu'on ne pouvait pas généralement mener un plan tangent commun à deux surfaces développables, la chose devient ici possible, parce que les deux surfaces Σ et Σ_2 offrent cela de particulier qu'elles sont circonscrites à la même surface S.

432. Si une ou plusieurs des trois surfaces données étaient *développables*, le problème serait généralement impossible. En effet, si S est développable, les surfaces Σ et Σ_2 du numéro précédent se réduiront à des *surfaces planes* (nº **428**), auxquelles il ne sera plus possible de mener un plan tangent commun; à moins que, par des circonstances toutes particulières, deux de ces surfaces planes ne viennent à coïncider complétement.

433. On ne saurait proposer de trouver un plan qui touche à la fois quatre surfaces S, T, U, V, ou un plus grand nombre. Car, en imaginant les trois surfaces développables Σ, Σ_2, Σ_3, circonscrites aux groupes S et T, S et U, S et V, il n'arrivera pas, en général, que les trois courbes suivant lesquelles la surface S sera touchée par Σ, Σ_2, Σ_3, viennent se couper toutes en un même point μ, circonstance qui serait cependant nécessaire pour que le plan tangent de S en μ touchât en même temps Σ, Σ_2, Σ_3, et, par suite, les autres surfaces proposées T, U, V.

PROBLÈME I. *Construire un plan qui touche, à la fois, une sphère et un cône de révolution* (*).

434. (*Fig.* 92.) Faisons passer les deux plans de projection par le centre O de la sphère donnée qui a pour rayon OA, et dirigeons le plan horizontal perpendiculairement à l'axe du cône qui aura pour sommet (S, S'), et pour base le cercle du rayon SB. Le problème de mener un plan tangent commun à ces deux surfaces sera déterminé (nº **428**), parce qu'ici l'une d'elles est développable; et, pour le résoudre plus simplement que par la méthode générale, supposons que PQR' soit le plan cherché. Il touche le cône suivant une arête située dans un plan méridien SM, perpendiculaire à PQ; de sorte que la distance de ce plan tangent au pied (S, I') de l'axe est une droite égale à I'G, et située dans le plan méridien SM : mais si je transporte le plan PQR' parallèlement à lui-même, jusqu'à ce qu'il passe par le centre O de la sphère, il se sera rapproché du point (S, I') d'une quantité égale au

(*) Ce problème est tiré de la *Géométrie descriptive* de M. Lefébure de Fourcy.

rayon OA; et alors il deviendra tangent à un autre cône droit dont la génératrice T'F', parallèle à S'B', en sera éloignée de la distance OA. Or ce dernier cône est facile à construire, ainsi que son plan tangent conduit par le point O; donc, ensuite, il suffira de mener au cône primitif un plan tangent parallèle à celui-ci.

D'après ces considérations, on prendra sur la perpendiculaire I'G un intervalle GH = OA; puis, en tirant par le point H la droite T'F' parallèle à S'B', on déterminera le cercle SF auquel on mènera, du point O, les deux tangentes ON et OL. Alors, en conduisant au cercle SB deux tangentes PQ et XY parallèles aux précédentes, on aura les traces horizontales de deux plans PQR' et XYZ', qui toucheront *extérieurement* les deux surfaces données : les traces verticales de ces plans sont bien faciles à trouver.

435. Il existe aussi des plans qui touchent ces surfaces *intérieurement*, c'est-à-dire en laissant l'une d'un côté, et l'autre du côté opposé. Pour les trouver, on verra sans peine qu'il faut augmenter la distance I'G, d'une quantité $Gh = OA$; puis, tirer parallèlement à S'B' la droite $t'f'$, qui déterminera le cercle Sf auquel on mènera les tangentes On et Ol. Alors, en conduisant au cercle SB deux tangentes pq et xy parallèles aux précédentes, ce seront les traces horizontales des deux plans tangents intérieurs.

436. Si l'on veut trouver pour un de ces quatre plans, par exemple PQR', son point de contact avec la sphère, on coupera cette surface par un plan OD perpendiculaire à PQ; et, après avoir rabattu la section sur le grand cercle horizontal, on tirera la tangente $D\theta$ dont le point de contact θ, ramené en μ, fournira la projection horizontale du point où la sphère est touchée par le plan PQR'. La projection verticale μ' se déduira aisément de là.

PROBLÈME II. *Par un point donné, mener un plan tangent à deux sphères.*

437. (*Fig.* 93.) Adoptons pour plan horizontal celui qui passe par les centres O et O' des deux sphères par le point donné A''. Alors, sans recourir à un second plan de projection, nous pourrons mener aux deux grands cercles horizontaux la tangente commune MNA, qui, en tournant autour de OO'A, engendrera une surface conique évidemment circonscrite aux deux sphères données. Ce cône AMP est ce que devient ici la surface développable Σ du nº **426**, car il est bien l'*enveloppe* de toutes les positions que prendrait le plan vertical MNA, tangent aux deux sphères, en roulant sur ces deux surfaces à la fois. Ainsi, puisque tout plan tangent à ce cône touchera les deux sphères, et que la réciproque est pareillement vraie, le problème primitif se réduit à *mener du point donné* A'' *un plan tangent au cône* AMP. Pour cela, on sait qu'il faut tirer la droite AA'', et du point où elle ira percer le plan du cercle vertical MP, base du cône, tirer à ce cercle deux tangentes; opération qui s'effectuera aisément, en rabattant le cercle MP autour de son diamètre, comme on l'a vu au nº **401**.

438. Il est plus simple de remarquer que le problème primitif se réduit à *mener par la droite* AA'' *un plan tangent à la sphère* O; car ce plan touchera évidemment le cône AMP, et, par suite, la sphère O' que ce cône circonscrit. Or, d'après ce qui a été dit au n° **403**, il suffit de tracer le nouveau cône A″M″P″, circonscrit pareillement à la sphère O, et l'intersection des deux cercles verticaux MP et M″P″ fera connaître immédiatement la projection horizontale μ du point de contact de la sphère avec le plan tangent demandé. La seconde projection de ce point, sur un plan vertical choisi à volonté, s'obtiendra aisément en rabattant le cercle MP autour de son diamètre, et par là la position du plan tangent sera complétement déterminée; mais nous laisserons au lecteur le soin d'effectuer ces opérations très-simples, qui conduiront évidemment à deux plans tangents *extérieurs*.

439. On peut trouver deux autres plans tangents *intérieurs*, en considérant le cône *amp* décrit par la tangente *man* commune aux deux grands cercles horizontaux, mais placée entre ces circonférences. Alors, par des considérations analogues aux précédentes, on verra qu'il suffit de *mener par le point* A″ *un plan tangent au cône amp;* ou bien de *mener par la droite a*A″ *un plan tangent à la sphère* O; de sorte que le point de contact λ sera donné par l'intersection des deux cercles M″P″ et *mp*.

440. Il n'est pas besoin d'avertir que les quatre solutions précédentes se réduiront à deux, ou n'existeront pas du tout, suivant la position qu'aura le point donné A″ par rapport aux deux sphères, ou par rapport aux cônes circonscrits *extérieur* et *intérieur*. En outre, l'un de ces cônes ou tous les deux disparaîtront, si les sphères données se coupent, ou bien si l'une enveloppe l'autre.

PROBLÈME III. *Trouver un plan qui soit tangent à trois sphères données.*

441. (*Fig.* 93.) Adoptons encore pour le plan horizontal celui qui passe par les centres O, O′, O″ des trois sphères données; puis, remarquons que les surfaces développables Σ et Σ_2 (n° **431**), qui doivent être circonscrites aux sphères O et O′, O et O″, deviennent ici les deux cônes AMP et A″M″P″. Alors, en traçant leurs courbes de contact avec la sphère O, lesquelles se réduisent aux deux cercles verticaux MP et M″P″, les deux points de section qui sont projetés en μ, seront ceux où les plans tangents de la sphère O toucheront à la fois le cône AMP et le cône A″M″P″; par conséquent, ces deux plans seront aussi tangents aux sphères O′ et O″, et ils les toucheront *extérieurement*.

442. Mais comme il existe deux autres cônes circonscrits *intérieurement* aux groupes des sphères O et O′, O et O″, lesquels peuvent être combinés d'une manière analogue, soit entre eux, soit avec les cônes extérieurs, il en résultera généralement *huit solutions* pour le problème proposé, savoir :

Deux plans tangents *extérieurs* fournis par les cônes AMP et A″M″P″, et dont les points de contact avec la sphère O sont projetés en μ;

Deux plans tangents *intérieurs* fournis par les cônes AMP et *a″m″p″*; les points de contact avec la sphère O sont projetés en ν;

Deux plans tangents *intérieurs* fournis par les cônes *amp* et A″M″P″; leurs points de contact sont projetés en λ;

Enfin, deux plans tangents *intérieurs* fournis par les cônes *amp*, *a″m″p″*, et dont les points de contact sont projetés en π.

443. Il est facile d'apercevoir que ces huit plans tangents se réduiront à *quatre*, si deux des sphères se coupent : quand une d'elles rencontrera les deux autres, il y aura au plus deux plans tangents communs; et il n'en existera aucun, lorsqu'une des trois sphères sera enveloppée par une autre. Mais, outre ces cas particuliers, la question sera impossible toutes les fois que les quatre cercles de contact MP, M″P″, *mp*, *m″p″*, ne se couperont pas; et le nombre de leurs points de section indiquera toujours le nombre de solutions qu'admettra le problème proposé.

444. Nous n'avons point parlé des cônes N′A′Q′ et *n′a′q′* dont chacun est circonscrit aux deux sphères O′ et O″. Néanmoins, il est évident que tout plan tangent aux trois sphères devra aussi toucher le cône A′ ou le cône *a′*; de sorte que le système de ces deux surfaces coniques aurait pu être combiné, soit avec le système A et *a*, soit avec le système A″ et *a″*, pour résoudre le problème proposé. En outre, puisque chaque plan tangent aux trois sphères touchera en même temps trois des cônes circonscrits, il passera par leurs sommets, lesquels se trouveront ainsi à la fois dans un plan tangent et dans le plan des trois centres des sphères; d'où l'on conclut que les sommets des trois cônes touchés par un même plan seront toujours *en ligne droite*. Aussi l'on voit dans notre épure, que les sommets de six cônes circonscrits aux sphères sont distribués trois à trois sur quatre droites AA″A′, A*a′a″*, A″*a′a*, A′*a″a*, dont la première renferme les trois *sommets extérieurs*, et chacune des autres, *un sommet extérieur* avec *deux sommets intérieurs*.

445. De là on peut déduire un théorème remarquable de la Géométrie plane, en se bornant à considérer seulement les génératrices des cônes et les grands cercles des sphères, qui sont situés dans le plan des trois centres O, O′, O″. En effet, comme les sommets de ces cônes sont évidemment les points de rencontre des coupes de tangentes communes à deux de ces grands cercles, on en conclut que si, après avoir tracé trois cercles quelconques dans un même plan, on mène toutes les tangentes qui peuvent toucher à la fois deux de ces cercles, *les six points de rencontre* A et *a*, A′ et *a′*, A″ et *a″*, *déterminés par chaque couple de tangentes, seront placés trois à trois sur quatre droites*, dont une contiendra *les trois points extérieurs*, et chacune des autres *un point extérieur* avec *deux points intérieurs*.

Comme exemple d'un plan tangent commun à plusieurs surfaces, nous citerons encore le problème résolu au n° **67**, et où il s'agissait de trouver un plan qui fût *tangent à deux cônes* ayant même sommet.