LIVRE VI.

QUESTIONS DIVERSES.

11 déc 1889

CHAPITRE PREMIER.

DE L'HÉLICE, ET DE L'HÉLICOÏDE DÉVELOPPABLE.

446. (*Fig.* 95.) L'HÉLICE est une courbe AMNCD... tracée sur un cylindre quelconque, et telle, que *les ordonnées* (dirigées suivant les génératrices) *sont proportionnelles aux abscisses curvilignes comptées sur la* BASE *à partir d'un point fixe* A; pourvu qu'on entende ici par *base* du cylindre la *section orthogonale* faite par le point A. C'est-à-dire qu'on doit avoir les relations

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{AP}}=\frac{\mathrm{NQ}}{\mathrm{AQ}}=\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AB}}=\ldots=k,\quad \text{ou généralement}\quad z=ks,$$

en désignant par s un arc quelconque de la base, et par z l'ordonnée qui aboutit à son extrémité (*). Le nombre k, qui exprime le rapport constant de l'ordonnée avec l'abscisse pour tous les points d'une même hélice, varie d'une hélice à une autre, car on en peut tracer une infinité sur le même cylindre; mais chacune est complétement déterminée, dès qu'on assigne le rapport k et le point A choisi pour origine des abscisses. D'ailleurs, il est évident que l'hélice coupera la base du cylindre précisément en ce point A, puisque, dans l'équation $z=ks$, l'hypothèse $s=0$ donne aussi $z=0$.

447. Lorsque la base du cylindre est une courbe fermée APBA, l'abscisse variable $\mathrm{AP}=s$ peut devenir égale au périmètre p de cette base; et alors on obtient un point D dans lequel l'hélice vient couper une seconde fois l'arête AF. Or, comme cette circonstance se reproduira indéfiniment pour des abscisses égales à $2p$, $3p$,..., il existera sur la génératrice AF une infinité de points où l'hélice viendra la rencontrer, et qui seront à des hauteurs

$$\mathrm{AD}=h=pk,\quad h'=2pk,\quad h''=3pk,\ldots;$$

par conséquent, tous ces points seront distants les uns des autres d'une quantité h que l'on nomme *le pas* de l'hélice. Lorsque ce pas est assigné directement, et que le périmètre de la base est connu, la constante k s'en déduit immédiatement, puisque, d'après la définition même de l'hélice (nº **446**), ce nombre exprime le

(*) Nous avons donné précédemment (nº 163) une autre définition de l'hélice; mais nous allons faire voir tout à l'heure qu'elle s'accorde complétement avec la définition actuelle.

rapport de l'ordonnée h avec l'abscisse correspondante p; ainsi, dans le cas où la base du cylindre sera un cercle du rayon R, on aura

$$k=\frac{h}{2\pi\mathrm{R}}.$$

448. *De la tangente à l'hélice.* (*Fig.* 95.) Comme cette courbe n'est pas donnée ici par l'intersection de deux surfaces, il faut recourir à des considérations particulières pour obtenir sa tangente en un point quelconque M. Concevons le cylindre développé sur le plan qui touche cette surface tout le long de la génératrice PML; cette ligne demeurera immobile, et la base *orthogonale* APB deviendra (nº **161**) une droite A'PB', perpendiculaire à PL, tandis que les portions des autres génératrices conserveront leurs mêmes longueurs et leur parallélisme. Par conséquent, si l'on porte sur la transformée de la base les distances

$$\mathrm{PA'}=\mathrm{PA},\quad \mathrm{PQ'}=\mathrm{PQ},\quad \mathrm{PB'}=\mathrm{PB},\ldots,$$

et que l'on élève les perpendiculaires

$$\mathrm{Q'N'}=\mathrm{QN},\quad \mathrm{B'C'}=\mathrm{BC},\ldots,$$

les divers points A', M, N', C',..., donneront la *transformée* de l'hélice sur le développement du cylindre. Or il est aisé de prévoir que cette transformée A'MN'C'... sera *une ligne droite;* car les ordonnées et les abscisses *rectilignes* de cette nouvelle ligne, ayant la même grandeur absolue que les ordonnées et les abscisses *curvilignes* de l'hélice, seront, comme ces dernières, *dans un rapport constant;* ce qui est le caractère exclusif de la ligne droite, pour des points situés dans un même plan.

Cela posé, je dis que la droite A'MC' est précisément la tangente au point M de l'hélice primitive AMC. En effet, cette droite est d'abord située dans le plan tangent du cylindre, qui contient un élément superficiel LP*pl* de la surface; et comme cet élément est resté immobile pendant le développement de la surface, il en résulte que l'élément linéaire M*m* se trouve commun à la courbe AMC et à la droite A'MC'; donc ces deux lignes sont bien tangentes l'une à l'autre.

449. D'après cela, pour obtenir dorénavant la tangente à l'hélice, il suffira de construire, dans le plan tangent du cylindre, un triangle rectangle MPA' qui ait pour hauteur l'ordonnée MP du point de contact, et pour base une droite A'P égale à l'abscisse AP rectifiée; l'hypoténuse de ce triangle sera la tangente demandée. C'est ce que l'on peut exprimer d'une manière abrégée, en disant que *la sous-tangente* A'P *est égale à l'abscisse curviligne* AP *du point de contact;* car cette règle fera connaître le pied A' de la tangente, et comme le point de contact M est connu, la position de la tangente sera complétement fixée.

D'ailleurs, on voit que *la tangente* A'M, ainsi déterminée, *aura la même longueur que l'arc d'hélice* AM; puisque l'une est la transformée de l'autre, d'après ce que nous avons dit au numéro précédent.

450. Observons ici que l'angle MA'P de la tangente avec le plan de la base du cylindre, sera donné par la formule

$$\text{tang A}' = \frac{\text{MP}}{\text{A}'\text{P}} = \frac{\text{MP}}{\text{AP}} = k;$$

or, comme ce dernier rapport est constant pour tous les points d'une même hélice (n° **446**), on en conclut que *les diverses tangentes* à cette courbe *sont toutes également inclinées sur le plan de la base du cylindre*, et, par suite, *chacune de ces tangentes coupe la génératrice du cylindre sous un angle constant* A'MP; résultat qui montre que la définition donnée au n° **165** rentre dans celle du n° **446**.

451. (*Fig.* 94.) Construisons maintenant les projections d'une hélice, en prenant pour base du cylindre droit sur lequel cette courbe doit être tracée, un cercle ABCD dont nous adoptons le plan pour plan horizontal de projection. Soient d'ailleurs (A, A') l'origine, et A'A'' *le pas* de l'hélice; en partageant cet intervalle A'A'' ou O'O'' en un certain nombre de parties égales, par exemple *seize*, et divisant la circonférence ABCD pareillement en seize parties égales AL, LM, MN,..., il suffira d'élever par ces points de division, des ordonnées verticales P'L', Q'M', R'N',..., respectivement égales à $\frac{1}{16}$, $\frac{2}{16}$, $\frac{3}{16}$,... de l'intervalle O'O'', pour obtenir divers points de la projection verticale A'L'M'N'C'A''... de l'hélice demandée (*). Quant à la projection horizontale de cette courbe, c'est évidemment la base ABCD du cylindre droit.

452. La tangente de l'hélice en un point quelconque (M, M') s'obtiendra en prenant sur la tangente, au point M de la base, une longueur MT égale à l'arc MA rec-

(*) Cette projection est une *sinusoïde*; car, si on la rapporte à deux axes B'X', B'Z', dont l'origine soit au point B', et que l'on compte les abscisses curvilignes de l'hélice, sur la section circulaire faite dans le cylindre par le plan horizontal B'X', on aura, pour un point quelconque (E, E'), les relations

$$\text{B}'\text{F}' = \sin \text{BE}, \qquad \frac{\text{E}'\text{F}'}{\text{BE}} = k;$$

ou bien, en comptant les sinus dans le cercle dont le rayon est l'unité,

$$x = \text{R} \sin \frac{s}{\text{R}}, \qquad \frac{z}{s} = \frac{h}{2\pi\text{R}};$$

et alors, par l'élimination de l'arc s, on trouve

$$x = \text{R} \sin \left(2\pi \frac{z}{h}\right)$$

pour l'équation de la projection de l'hélice sur le plan des deux axes B'X' et B'Z'. En y joignant l'équation du cylindre

$$x^2 + y^2 = \text{R}^2,$$

qui, combinée avec la précédente, conduit à

$$y = \text{R} \cos \left(2\pi \frac{z}{h}\right),$$

on aura les trois projections de l'hélice sur des plans rectangulaires dont l'origine serait au point (O, B').

tifié (n° **449**); alors le point (T, T') sera le pied de la tangente cherchée, laquelle aura pour projection MT et M'T'.

453. D'après cela, on voit que si l'on construisait ainsi diverses tangentes à l'hélice, les pieds de ces droites seraient tous situés sur une courbe ATGH..., pour laquelle on aurait MT = MA, BG = BA, EH = EA,...; par conséquent, cette courbe n'est autre chose que la *développante* du cercle ABCD (n^os **199**, **201**), et c'est aussi la trace horizontale de la surface, lieu des tangentes à l'hélice, surface que l'on nomme l'*hélicoïde développable*, et sur laquelle nous reviendrons tout à l'heure.

454. (*Fig.* 94.) *Étant donnée une hélice* (AMBCDA, A'M'C'A''C'',...), *mener à cette courbe une tangente qui soit parallèle à un plan donné* U'VS.

Rappelons-nous d'abord que toutes les tangentes à l'hélice font un angle constant avec la verticale (n° **450**), et qu'ainsi elles sont respectivement parallèles aux génératrices d'un cône de révolution, dont l'axe serait vertical, et dont le demi-angle au centre égalerait l'inclinaison commune des tangentes sur les arêtes du cylindre. Pour connaître cette inclinaison, je construis la tangente particulière au point (B, B'), parce qu'elle sera évidemment parallèle au plan vertical, et me fournira ainsi la vraie grandeur de l'angle cherché : je prends donc sur la tangente au cercle une longueur BG, égale à l'arc AB rectifié, et, projetant le point G en G' sur la ligne de terre, j'obtiens la tangente (BG, B'G') relative au point (B, B'). Alors, en lui menant par le point (O, B') une parallèle ($\text{O}g$, B'G'), et faisant tourner cette dernière autour de la verticale O, je forme le cône droit en question, lequel a pour base le cercle du rayon $\text{O}g$. Maintenant, je coupe ce cône par un plan parallèle à U'VS, et mené par le sommet (O, B') : on sait comment obtenir (n° **23**) la trace horizontale $\alpha\text{I}\beta$ d'un pareil plan, qui donne, pour ses intersections avec le cône, les deux génératrices $\text{O}\alpha$ et $\text{O}\beta$, *parallèles au plan* SVU'; par conséquent, les tangentes à l'hélice qui jouiront de cette dernière propriété, s'obtiendront sur le plan horizontal, en menant au cercle la tangente MT, parallèle à $\text{O}\alpha$, et la tangente EH, parallèle à $\text{O}\beta$. De là, on conclura leurs projections verticales en prenant MT = MA et EH = EBA, ce qui fera connaître les pieds (T, T') et (H, H') des tangentes demandées, qui seront enfin (MT, M'T') et (EH, E'H'). Il y en aurait d'ailleurs une infinité d'autres parallèles à celles-là, et relatives aux points M'' et E'', M''' et E''',..., des diverses *spires* de l'hélice indéfinie.

Observons aussi que l'on pouvait mener, sur le plan horizontal, une seconde tangente $\mu\theta$ parallèle à $\text{O}\alpha$; mais cette droite, considérée comme la projection d'une tangente à l'hélice, aurait son point de contact en (μ, μ'); d'où l'on voit clairement que sa projection verticale ne serait plus parallèle à celle de la génératrice du cône projeté sur $\text{O}\alpha$: ainsi il faut rejeter la tangente $\mu\theta$. Une pareille ambiguïté se présenterait pour la génératrice $\text{O}\beta$; mais elle se lèvera toujours, en exigeant que la tangente et la génératrice du cône soient parallèles sur les deux plans de projection à la fois.

455. Si l'on demandait de mener à l'hélice *une tangente* qui fût *parallèle à une droite donnée*, le problème serait en général impossible, à moins que cette droite ne fît elle-même avec la verticale un angle égal à l'inclinaison commune de toutes les tangentes de l'hélice sur les arêtes du cylindre; mais si cette condition était remplie, alors il ne s'agirait que de mener au cercle ABCD une tangente parallèle à la projection horizontale de la droite donnée, et l'on en déduirait, comme ci-dessus, la projection verticale de la tangente à l'hélice.

456. (*Fig.* 96.) L'HÉLICOIDE *développable* est la surface engendrée par une droite mobile et indéfinie, qui glisse sur une hélice, en lui demeurant constamment tangente. Nous appelons cet hélicoïde *développable*, tant pour le distinguer d'un autre hélicoïde qui est *gauche* et dont nous parlerons plus loin, que parce que la surface actuelle satisfait évidemment (n° **181**) à la condition que deux génératrices infiniment voisines se trouvent dans un même plan. Pour représenter graphiquement cette surface, on pourrait tracer d'abord l'hélice

$$(\mathrm{A}\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda\pi\mathrm{A},\quad \mathrm{A}'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\lambda'\pi'\mathrm{A}''),$$

puis construire ses tangentes aux divers points (A, A') (β, β'), (γ, γ'),.. ; mais il sera plus commode et plus exact de déterminer ces droites, en cherchant immédiatement leurs traces sur le plan horizontal de projection, et sur un autre plan horizontal a'A''l' élevé, au-dessus du premier, d'une quantité A'A'' égale au pas de l'hélice; parce qu'alors la projection verticale de cette hélice sera formée directement par les intersections successives de ces diverses génératrices, pourvu qu'elles soient assez multipliées. Or, déjà nous savons (n° **455**) que les traces horizontales de ces droites sont situées sur la développante de cercle ABCDEF..., que l'on construit en prenant sur les tangentes à la base du cylindre les distances

$$\beta\mathrm{B} = \beta\mathrm{A},\quad \gamma\mathrm{C} = \gamma\mathrm{A},\quad \delta\mathrm{D} = \delta\mathrm{A},\ldots.$$

Ensuite, pour avoir leurs traces sur le plan supérieur a'A'', j'observe que la droite inconnue (Aa, A'a'), qui sera tangente à l'hélice au point (A, A'), doit faire avec la verticale un angle déterminé (n° **450**) par la relation

$$\operatorname{tang} \mathrm{A}''\mathrm{A}'a' = \frac{1}{k},\quad \text{ou bien}\quad \frac{\mathrm{A}''a'}{\mathrm{A}''\mathrm{A}'} = \frac{2\pi\mathrm{R}}{h};$$

or, comme on a pris A''A' $= h$, il en résulte que A''a' $= 2\pi$R, c'est-à-dire que l'intervalle inconnu A''a' ou Aa doit être égal à la circonférence du rayon OA, ce qui permet de construire immédiatement la première génératrice (Aa, A'a') de l'hélicoïde. D'ailleurs, dans les diverses positions que prendra cette droite mobile, la portion comprise entre les plans horizontaux L'A' et a'A'' conservera *une longueur invariable*, puisqu'elle aura toujours une inclinaison constante (n° **450**) sur ces plans parallèles; il en sera évidemment de même pour les projections horizontales de ces portions de génératrices, qui demeureront égales en longueur à Aa. Par conséquent, si, à partir de la développante inférieure ABCDEF..., on porte sur les tangentes du cercle les longueurs

$$\mathrm{A}a,\ \mathrm{B}b,\ \mathrm{C}c,\ \mathrm{D}d,\ \mathrm{E}e,\ \mathrm{F}f,\ldots,$$

toutes égales à la circonférence OA rectifiée; puis, si l'on projette les divers points a, b, c, d, e,..., sur le plan horizontal supérieur a'A'', en même temps que les extrémités inférieures A, B, C, D, E,..., sur la ligne de terre, on pourra construire immédiatement les projections verticales

$$\mathrm{A}'a',\ \mathrm{B}'b',\ \mathrm{C}'c',\ \mathrm{D}'d',\ \mathrm{E}'e',\ \mathrm{F}'f',\ldots$$

des génératrices de l'hélicoïde; et ces droites dessineront d'elles-mêmes, par leurs intersections consécutives, la projection de l'hélice ou la courbe A'$\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\lambda'\pi'$A'' à laquelle elles devaient être tangentes.

457. (*Fig.* 96.) La courbe *abcdef*..., qui est la projection horizontale de la trace de l'hélicoïde sur le plan supérieur a'A'', se trouve nécessairement une développante du cercle OA, symétrique de la première ABCDE.... En effet, puisque la droite Dδd par exemple, est égale à la circonférence totale, et que la partie Dδ égale l'arc Aδ, il faut bien que le reste δd soit égal à l'arc $\delta\lambda\pi$A; et de même εe est égal à l'arc $\varepsilon\lambda\pi$A. Ainsi la spirale *abcdef*, située dans le plan supérieur a'A'', viendra se terminer au point (A, A''), si l'on se borne, comme dans notre épure, à considérer une révolution *unique* de la génératrice mobile.

458. D'après cela, on peut aisément construire *en relief* la surface que nous venons de décrire; car, en prenant deux plateaux sur lesquels on tracera les deux spirales ABCDEF. ., *abcdef*..., et en les maintenant dans une situation parallèle et symétrique, au moyen de tiges verticales, il suffira de tendre des fils qui réunissent les points correspondants A et a, B et b, C et c, D et d,...; et l'ensemble de ces fils rectilignes représentera l'hélicoïde développable, dont *l'arête de rebroussement* (n° **178**) sera l'hélice figurée aussi par les intersections consécutives de ces mêmes fils. Si, d'ailleurs, on évide sur le plateau supérieur l'intérieur de la circonférence OA, on apercevra très-sensiblement cette hélice en forme d'arête saillante; ce qui justifiera bien aux yeux du spectateur la dénomination attribuée dans toutes les surfaces développables, à la courbe formée par les intersections des génératrices, laquelle partage la surface en *deux nappes* distinctes, mais réunies par un *rebroussement* le long de cette courbe.

459. (*Fig.* 96.) Pour manifester ici cette circonstance importante du rebroussement, construisons la section faite dans l'hélicoïde par un plan horizontal quelconque X'Y'. En projetant sur le plan inférieur les points de rencontre de X'Y' avec les projections verticales des génératrices, on obtiendra une spirale composée de deux branches XWλ et λZY, placées l'une sur la nappe *supérieure* formée par les portions de génératrices situées au-dessus de leurs points de contact avec l'hélice, et l'autre sur la nappe *inférieure;* et je dis que cette spirale est aussi une développante du cercle OA. En effet, si le plan X'Y' est mené, par exemple, par le milieu λ' de la hauteur A'A'', il coupera toutes les génératrices en deux parties égales; de sorte que son point de section avec la droite (Dd, D'd') sera tel, que DW égalera la demi-circonférence A$\delta\lambda$. Mais, puisque déjà la partie Dδ = Aδ, il s'ensuivra que le reste δW égalera l'arc $\delta\lambda$; on trouvera de même que AX = A$\delta\lambda$, et ρZ = $\rho\lambda$,...

Donc la section $XW\lambda ZY$ est bien une développante du cercle OA, laquelle a pour origine la section λ; et la forme de cette spirale en ce point, manifeste clairement le rebroussement que présentent les deux nappes de la surface, lorsqu'elles s'approchent de l'hélice.

460. Voyons, maintenant, quelles seront les sections faites dans l'hélicoïde par un cylindre $FWZp$, concentrique avec celui qui contient l'hélice primitive. Pour cela, prenons d'abord les points F, α, θ,..., où le cercle $FWZp$ coupe les portions *inférieures* des génératrices sur le plan horizontal, et rapportons ces points sur les projections verticales des mêmes droites; ensuite, faisons la même opération pour les points ξ, η, W,..., où les portions *supérieures* des génératrices sont rencontrées par le cylindre proposé, et nous obtiendrons les deux courbes

$$(F\alpha\theta Z\omega,\ F'\alpha'\theta'Z'\omega') \quad \text{et} \quad (\xi\eta W\zeta p,\ \xi'\eta'W'\zeta'p'),$$

situées l'une sur la nappe inférieure de l'hélicoïde, l'autre sur la nappe supérieure, et qui seront aussi des *hélices* de même *pas* que l'hélice $(A\beta\gamma\delta,\ A'\beta'\gamma'\delta')$. En effet, les portions de génératrices $(\varphi F,\ \varphi'F')$, $(\lambda\alpha,\ \lambda'\alpha')$, $(\pi\theta,\ \pi'\theta')$,..., sont toutes de même longueur, puisqu'elles sont projetées sur des droites évidemment égales $\varphi F = \lambda\alpha = \pi\theta$,..., et que leur inclinaison sur le plan horizontal est constante. Donc, lorsque la droite finie $(\varphi F,\ \varphi'F')$ parcourra l'hélice donnée, en lui demeurant tangente par son extrémité mobile $(\varphi,\ \varphi')$, l'autre extrémité $(F,\ F')$ s'élèvera de quantités égales aux différences de niveau des points $(\varphi,\ \varphi')$, $(\lambda,\ \lambda')$, $(\pi,\ \pi')$,...; or ces différences sont proportionnelles aux arcs $\varphi\lambda$, $\varphi\lambda\pi$,..., qui ont évidemment entre eux le même rapport que les arcs $F\alpha$, $F\alpha\theta$,...; par conséquent, ces derniers se trouveront eux-mêmes *proportionnels aux ordonnées* des points $(\alpha,\ \alpha')$, $(\theta,\ \theta')$,..., et la courbe $(F\alpha\theta,\ F'\alpha'\theta')$ sera bien *une hélice* dont le pas égalera celui de l'hélice $(A\beta\gamma,\ A'\beta'\gamma')$, puisqu'au bout d'une révolution, les deux points $(F,\ F')$ et $(\varphi,\ \varphi')$ auront monté de la même quantité h.

On démontrera la même proposition, d'une manière analogue, pour la section $\xi\eta W$, $\xi'\eta'W'$).

461. (*Fig*. 96.) Il est bon d'observer ici, comme une conséquence immédiate de ce qui précède, que quand une droite mobile et indéfinie $(F\varphi f,\ F'\varphi'f')$ *glisse* sur une hélice $(A\beta\gamma\delta\ldots,\ A'\beta'\gamma'\delta')$, en lui demeurant tangente *par un même point* qui reste invariable sur la droite mobile, tout autre point $(F,\ F')$ de cette dernière ligne décrit aussi (nº **460**) *une hélice de même pas* que la première. Mais si la tangente *roulait* sur l'hélice, *sans glisser*, de telle sorte que chaque élément de la droite vînt s'appliquer successivement sur les éléments de la courbe, alors un point quelconque $(F,\ F')$ de la droite mobile resterait toujours dans un même plan horizontal, et y décrirait (nº **453**) *une développante* du cercle qui sert de base à l'hélice primitive.

462. *Le plan tangent* pour un point quelconque $(\theta,\ \theta')$ de l'hélicoïde est le même que dans tout autre point de la génératrice $(P\theta p,\ P'\theta'p')$, ainsi que nous l'avons démontré (nº **177**) pour toute surface développable; donc le plan demandé renfermera la tangente PV à la spirale ABCLP, et cette droite sera précisément la trace

horizontale de ce plan tangent, lequel se trouve par là suffisamment déterminé. Observons, d'ailleurs, que comme la ligne $P\pi$, tangente à la développée $A\beta\lambda\pi$, est toujours normale (nº **197**) à la développante ABCLP, il s'ensuit que la trace VP du plan tangent se trouvera perpendiculaire sur la génératrice $(P\pi,\ P'\pi')$, et qu'ainsi ce plan renfermera le rayon $(O\pi,\ O'\pi')$ du cylindre. D'où l'on peut conclure que le plan tangent de l'hélicoïde se trouve déterminé par la génératrice sur laquelle est le point donné, et par le rayon du cylindre qui aboutit au point de contact de cette génératrice avec l'arête de rebroussement.

463. Il résulte évidemment de là que tous les plans tangents de l'hélicoïde font, avec le plan horizontal, *un angle constant* qui égale l'inclinaison de la tangente à l'hélice primitive. D'ailleurs, chaque plan tangent, tel que πPV, contenant deux génératrices infiniment voisines qui sont des tangentes à l'hélice, n'est autre chose que le *plan osculateur* (nº **177**) de cette courbe; et, par suite, l'hélicoïde est *l'enveloppe* de tous les plans osculateurs de son arête de rebroussement, comme cela arrive dans toute surface développable (nº **181**).

464. D'après cela, le contour apparent de l'hélicoïde sur le plan vertical de projection est formé par les droites $(Ll,\ L'l')$, $(Aa,\ A'a')$, $(AU,\ A''U')$, puisque, le long de ces génératrices, le plan tangent se trouve perpendiculaire au plan vertical : seulement, une partie des deux dernières génératrices est recouverte par la première, et se trouve rendue invisible par cette circonstance. Quant au contour apparent sur le plan horizontal, il est formé évidemment par l'hélice $(A\beta\gamma\delta\lambda,\ A'\beta'\gamma'\delta'\lambda')$, quoique le long de cette courbe les plans tangents de l'hélicoïde ne soient pas *verticaux*, ainsi que l'exigerait la règle générale du nº **106**; mais c'est qu'ici la surface présente, pour limite des parties visibles, la circonstance particulière d'un *rebroussement*. On doit ajouter à ce contour les spirales ABCGQRS et *abclpqr*A, qui terminent la portion de surface que nous nous sommes borné à considérer ici, avec le soin d'omettre la partie de la première qui est recouverte par la seconde; et, d'après ces remarques, il sera aisé au lecteur de se rendre compte des parties *pleines* et *ponctuées* que présente notre épure.

465. *Développement de l'hélicoïde*. (*Fig*. 96.) On pourrait l'effectuer ici, comme dans toute surface développable, en partageant une courbe plane ABCDGL, située sur la surface, en petits arcs sensiblement confondus avec leurs cordes; alors les secteurs élémentaires projetés sur $D\delta\gamma C$, $E\varepsilon\delta D$, $F\varphi\varepsilon E$,..., pourront être regardés comme des triangles dont les côtés, connus par leurs projections, seront faciles à évaluer; de sorte que, si l'on construit ces triangles sur un même plan et à la suite les uns des autres, leur ensemble représentera le développement de la surface en question. Toutefois, il faut avouer que ce mode d'opérations donnerait lieu à des chances d'erreurs accumulées, qui disparaîtraient si l'on connaissait d'avance la forme que doit prendre, sur le développement, une certaine courbe donnée sur la surface primitive; et c'est ainsi que nous en avons usé pour les cylindres et les cônes, dans les nºˢ **243** et **251**.

466. Or, dans l'hélicoïde développable, il arrive que *toutes les hélices ont pour* *transformées*, sur le développement, *des cercles concentriques*. En effet, si nous concevons l'hélice arête de rebroussement ($A\beta\gamma\delta$.., $A'\beta'\gamma'\delta'$..), comme partagée en éléments égaux projetés sur $A\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$,..., il est facile d'apercevoir que *tous les angles de contingence sont égaux entre eux* dans cette ligne à double courbure; car celui qui est projeté sur $D\delta C$, étant combiné avec la verticale δ, formera un angle trièdre dans lequel deux faces et l'angle dièdre compris resteront les mêmes pour tous les points de l'hélice. Mais ces angles de contingence, qui changent ordinairement de grandeur pour une courbe quelconque tracée sur une surface que l'on développe, demeurent *invariables* quand il s'agit de l'arête de rebroussement (n° **179**, *note*) : donc l'hélice ($A\beta\gamma\delta$..., $A'\beta'\gamma'\delta'$...) se transformera dans une courbe plane, dont les angles de contingence seront égaux entre eux, pour des arcs de même longueur; par conséquent, cette transformée aura une courbure uniforme (n° **198**), et dès lors elle sera un cercle.

Maintenant, pour une autre hélice ($F\alpha\theta Z\omega$, $F'\alpha'\theta'Z'\omega'$) située sur le même hélicoïde, on obtiendra sa transformée en traçant, sur le développement, des tangentes au cercle dans lequel sera changée l'hélice ($A\beta\gamma$..., $A'\beta'\gamma'$...), et en prenant ces tangentes égales aux portions de génératrices (φF, $\varphi' F'$), ($\lambda\alpha$, $\lambda'\alpha'$), ($\pi\theta$, $\pi'\theta'$),... Or, comme ces dernières droites ont toutes la même longueur (n° **460**), il arrivera évidemment que leurs extrémités aboutiront sur une circonférence concentrique avec la précédente : donc, etc.

467. (*Fig*. 96.) Pour faire servir cette propriété des hélices au développement de l'hélicoïde sur un de ses plans tangents, nous choisirons le plan $LL'\lambda'$ qui est perpendiculaire au plan vertical, et qui renferme les deux droites ($L\lambda$, $L'\lambda'$), ($\psi\alpha$, $L'\alpha'$), tangentes aux deux hélices projetées sur $A\beta\lambda$ et $F\alpha\theta$. Or, comme ces droites devront se retrouver tangentes aux deux cercles dans lesquels ces hélices se transformeront, il n'y aura qu'à rabattre ce plan autour de LL', avec les deux tangentes en question, qui deviendront évidemment $L\lambda''$ et $\psi\alpha''$; puis, élever sur ces dernières lignes les perpendiculaires $\lambda''O''$ et $\alpha''O''$, qui détermineront le centre O'' et les rayons de ces deux transformées circulaires.

Cela posé, sur la *fig*. 97, et avec un rayon $O_2\lambda_2$ égal à la droite $O''\lambda''$ de la *fig*. 96, je décris une circonférence sur laquelle il faudra marquer des arcs qui aient la même longueur que les arcs d'hélice projetés sur $A\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$,... Or, puisque la demi-spire ($A\beta\gamma\lambda$, $A'\beta'\gamma'\lambda'$) est égale en longueur (n° **449**) à sa tangente ($L\lambda$, $L'\lambda'$), nous tracerons la tangente λ_2L_2, égale à $\lambda'L'$, et, après avoir divisé cette droite λ_2L_2 en huit parties égales, nous les reporterons sur la circonférence depuis λ_2 jusqu'en A_2 et A_3; alors l'arc de cercle $A_2\lambda_2A_3$ sera *la transformée* de la spire entière ($A\beta\gamma\lambda A$, $A'\beta'\gamma'\lambda'A''$). Ensuite, nous mènerons les tangentes β_2B_2, γ_2C_2, δ_2D_2,..., que nous ferons égales à 1, 2, 3,... des divisions de λ_2L_2, et ce seront les vraies longueurs des génératrices de l'hélicoïde, comprises depuis l'arête de rebroussement jusqu'au plan horizontal; de sorte que la *nappe inférieure* de cette surface se trouvera développée suivant la forme

$$A_2\beta_2\gamma_2\lambda_2A_3U_2T_2L_2C_2B_2A_2,$$

dont le contour extérieur est évidemment la développante du cercle $A_2\lambda_2A_3$, tandis que la circonférence $F_2\alpha_2\theta_2\omega_2$ sera *la transformée* de l'autre hélice ($F\alpha\theta\omega$, $F'\alpha'\theta'\omega'$). Quant au développement de la *nappe supérieure* de l'hélicoïde, on l'obtiendrait en prolongeant chaque génératrice $F_2\varphi_2$, de manière que sa longueur totale F_2f_2 égalât le double de $L_2\lambda_2$.

468. Nous aurions pu éviter de recourir à la seconde hélice ($F\alpha\theta$, $F'\alpha'\theta'$), pour trouver le rayon $O_2\lambda_2 = O''\lambda''$ du cercle suivant lequel se transforme l'hélice primitive ($A\beta\gamma\lambda$, $A'\beta'\gamma'\lambda'$), attendu que ce rayon doit être précisément le *rayon de courbure* (n° **198**) de cette dernière hélice; car, dans le développement d'une surface développable, on sait (*note* du n° **179**) que l'arête de rebroussement conserve les mêmes angles de contingence qu'auparavant, ainsi que des arcs de même longueur; de sorte qu'elle garde la même courbure, mais seulement elle perd sa *torsion*, comme nous l'expliquerons plus en détail au n° **654**. D'ailleurs, nous verrons au n° **676** que le rayon de courbure d'une hélice est donné par la formule

$$\rho = R(1 + \text{tang}^2\omega) = \frac{R}{\cos^2\omega},$$

où ω désigne l'angle de la tangente à l'hélice avec le plan de la base orthogonale du cylindre, et R le rayon de cette surface (*). Or cette expression est susceptible d'une construction fort simple; car, si par le point E' de la *fig*. 96, et parallèlement à la tangente $L'\lambda'$, on tire la droite $E'I'$ sur laquelle on élèvera la perpendiculaire $I'K'$, la comparaison des triangles rectangles conduira aisément à la relation

$$E'A' = E'K'\cos^2\omega;$$

(*) Si l'on veut trouver directement cette formule, on pourra employer le moyen suivant qui m'a été communiqué par M. *Catalan*, répétiteur à l'École Polytechnique. Soient MP et PQ (*fig*. 98) les projections de deux éléments égaux de l'hélice, correspondants au point (P, P') pour lequel le plan osculateur contient (n° 463) le rayon du cylindre (PO, P'), et projette ces deux éléments sur la droite $M'P'Q'$ qui fait l'angle ω avec la base du cylindre. Si l'on fait tourner ce plan osculateur autour de la droite (PO, P'), jusqu'à ce qu'il devienne horizontal, les deux éléments seront rabattus suivant Pm et Pq; puis, en élevant des perpendiculaires sur leurs milieux, le rayon de courbure de l'hélice sera représenté par $P\omega$ ou $\frac{1}{2}PF$. On a évidemment

$$2\rho = PF = \frac{(Pm)^2}{PH}, \qquad 2R = PG = \frac{(PM)^2}{PH},$$

d'où l'on déduit, en observant que PM est la projection de la droite $P'M' = Pm$,

$$\frac{\rho}{R} = \left(\frac{Pm}{PM}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\omega}.$$

On pourrait aussi rattacher cette méthode à la formule générale $\rho = \frac{ds}{\varepsilon}$ trouvée au n° 198, en observant qu'ici l'angle de contingence ε a pour vraie grandeur le supplément de mPq; or on a évidemment

$$\frac{PH}{Pm} = \cos\left(\frac{180° - \varepsilon}{2}\right) = \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{et} \quad PH = \frac{(PM)^2}{2R} = \frac{ds^2\cos^2\omega}{2R};$$

d'où l'on conclut

$$\varepsilon = \frac{ds\cos^2\omega}{R} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{R}{\cos^2\omega},$$

ce qui justifie la construction employée dans le texte.