d'où il suit que le rayon de courbure de l'hélice est $\rho = E'K'$. C'est donc avec cette longueur (qui doit se trouver égale à $O''\lambda''$) qu'il faudra décrire le cercle $O_2\lambda_2$ de la *fig.* 97; et ensuite, les autres opérations graphiques s'effectueront comme au second paragraphe du n° **467**.

CHAPITRE II.

DES ÉPICYCLOIDES.

469. (*Pl.* 47, *fig.* 1.) Une courbe mobile xay est dite *rouler* sur une courbe fixe XAY, lorsque des éléments égaux $ab = AB$, $bc = BC$, $cd = CD$,..., viennent s'appliquer respectivement les uns sur les autres, de telle sorte que le point b arrive à coïncider avec B, ensuite c avec C, d avec D, et ainsi des autres. Cela équivaut à dire que le lieu du contact, qui est actuellement en A et a, doit parcourir, dans le même temps, des espaces égaux sur les deux courbes à la fois; tandis que, si ces espaces étaient inégaux, et que le point b vînt à coïncider avec C, il y aurait à la fois *roulement* et *glissement* d'une courbe sur l'autre; et enfin, il n'y aurait qu'un simple glissement, sans aucune rotation, si c'était le même point a de la courbe mobile qui vînt coïncider successivement avec B, C, D,... D'ailleurs, ces distinctions s'appliquent pareillement à des courbes gauches, comme à celles qui seraient situées dans le même plan ou dans des plans différents, pourvu que la courbe mobile ait toujours *une tangente commune* avec la courbe fixe.

470. Pendant la rotation de la courbe xay, un point quelconque m, fixe sur cette ligne mobile et entraîné avec elle, décrira dans l'espace une autre courbe mz que nous allons apprendre à construire par divers exemples; mais, dans tous les cas, la tangente mt, relative à une position quelconque, sera toujours *perpendiculaire à la droite* Am, qui réunit le point générateur avec le point de contact correspondant. En effet, lorsque les deux courbes xy et XY se touchent en A, elles ont en cet endroit un élément commun AA'; or, pendant que les deux éléments ainsi confondus se détachent, et jusqu'à ce que les éléments voisins ab et AB soient parvenus à coïncider, le sommet A reste *immobile*, et le point générateur m décrit un arc mm' infiniment petit et situé évidemment sur la sphère du rayon Am. Donc, la tangente mt, qui doit être le prolongement de cet élément mm', sera bien perpendiculaire à la droite Am, laquelle se trouve ainsi *normale* à la courbe $mm'z$. D'ailleurs on voit bien que ce raisonnement s'appliquerait de même à tout point n qui, sans être situé sur le périmètre de la courbe roulante xy, se trouverait lié fixement avec elle, et décrirait une autre courbe nu dont la normale serait encore An. Donc, dans tous les cas, *la droite qui joint le point de contact de la courbe roulante avec le point générateur, est une* NORMALE *à la courbe que décrit ce dernier point.*

Si l'on voulait conserver à la démonstration précédente toute la rigueur de forme dont elle est susceptible, il faudrait d'abord substituer aux deux courbes xy et XY deux polygones (*fig.* 2) à côtés respectivement égaux; puis, en les faisant rouler

l'un sur l'autre, de manière que leurs plans fissent entre eux un angle constant ou variable, le point m décrirait une ligne discontinue $mm'm''$... composée d'arcs *sphériques* qui auraient leurs centres successifs en A, B, C..., et telle, que la tangente mt au point m serait perpendiculaire sur Am. Or il est évident que cette dernière propriété subsistera toujours, quelle que soit la grandeur des côtés et des angles des deux polygones : seulement, à mesure que les angles augmentent et que les côtés décroissent, les arcs mm', $m'm''$,..., diminuent de longueur, et deux rayons consécutifs sont plus près d'être égaux, ce qui rapproche de plus en plus la ligne $mm'm''$... d'une courbe continue. Donc, puisque dans toutes ces variations l'angle Amt reste constamment droit, il en sera encore de même quand les deux polygones seront devenus deux courbes quelconques, par exemple deux cercles; ainsi, dans ce dernier état, la courbe continue décrite alors par le point m aura pour tangente en m une droite perpendiculaire sur Am.

Épicycloïdes planes.

471. PREMIER CAS. (*Pl.* 47, *fig.* 3.) Considérons un cercle mobile O' qui roule extérieurement sur un cercle fixe O, en demeurant toujours dans le même plan que ce dernier, et adoptons pour point générateur le point de contact actuel D de ces deux circonférences. Lorsque le cercle O' aura roulé jusqu'à toucher l'autre en un point quelconque A_4, on retrouvera la position correspondante M du point générateur D, en décrivant, du point O'_4 comme centre et avec le rayon O'D, une circonférence sur laquelle on prendra un arc A_4M de même longueur absolue que l'arc A_4D, ce qui s'effectuera en mesurant ce dernier au moyen d'une très-petite ouverture de compas. Mais ces opérations s'exécuteront avec plus de rapidité, si l'on a eu soin d'abord de diviser la circonférence mobile en parties égales, et de les reporter sur le cercle fixe suivant DA_1, A_1A_2, A_2A_3,...; car alors il suffira de décrire deux arcs de cercle, l'un du centre O'_4 avec un rayon $O'_4M = O'D$, l'autre du centre A_4 avec un rayon A_4M égal à la corde D4 du cercle primitif O'. Des constructions semblables effectuées pour d'autres points de contact A_3, A_6,..., permettront de tracer aisément la courbe DMGF nommée ÉPICYCLOIDE *extérieure*, laquelle comprend une infinité de branches identiques à celles que nous venons de citer, et qui se rattachent les unes aux autres par des points de rebroussement tels que D et F.

472. La tangente au point M de cette courbe sera précisément la droite MT, corde supplémentaire de MA_4, puisque nous savons (n° **470**) que cette dernière est *normale* à l'épicycloïde. Cette propriété fournit même un tracé beaucoup plus simple et bien suffisant pour les engrenages; car, si l'on décrit divers arcs de cercle ayant pour centres les points A_1, A_2, A_3,..., et pour rayons les cordes D1, D2, D3,..., du cercle primitif O'; puis, si l'on trace une courbe enveloppe de tous ces arcs, cette enveloppe sera précisément l'épicycloïde DMGF, attendu que les cordes dont nous venons de parler indiquent évidemment (n° **470**) les longueurs des *normales* telles que MA_1, qui aboutiraient aux points de contact successifs A_1, A_2, $A_3, \ldots$, du cercle mobile. C'est la méthode proposée par M. *Poncelet*.

473. On pourrait adopter un point générateur D′ situé hors du cercle mobile, mais lié avec celui-ci d'une manière invariable. Alors ce point D′ décrirait une courbe à nœud D′M′G′... que l'on nomme *épicycloïde rallongée*, et qui se construirait en prenant, sur chaque rayon O'_4M, déterminé comme au n° **471**, une distance $MM' = DD'$. La droite A_4M' serait encore (n° **470**) normale à cette courbe; ainsi la tangente M′T′ devra être menée perpendiculairement à A_4M'.

Si le point générateur D″ était en dedans du cercle mobile, la courbe décrite alors serait une *épicycloïde raccourcie* D″M″G″, laquelle offrirait des points d'inflexion au lieu d'un nœud. Un point quelconque M″ de cette courbe s'obtiendra aussi en prenant, sur le rayon O'_4M, construit comme au n° **471**, une distance $MM'' = DD''$; et puisque la droite A_4M'' sera encore (n° **470**) normale à cette épicycloïde, la tangente M″T″ s'en déduira immédiatement.

On pourrait aussi (n° **472**) se contenter de tracer ces courbes comme l'enveloppe de tous les arcs décrits des centres A_1, A_2, $A_3, \ldots$, avec les normales D′1, D′2, D′3..., ou D″1, D″2, D″3,...

474. Deuxième cas. (*Fig.* 4.) Lorsque le cercle mobile O′ roule dans la concavité du cercle fixe O, et que le premier a un rayon $R' < \frac{1}{2}R$, le point générateur D décrit une épicycloïde *intérieure* qui présente la forme DGF, et qui se construit, du reste, comme précédemment. Si l'on choisissait le rayon $R' = \frac{1}{4}R$, comme dans la *fig.* 5, la courbe DMFD′F′ aurait une forme et une équation toutes semblables à celles de la développée de l'ellipse (*fig.* 76), avec la seule différence que les quatre points de rebroussement seraient ici placés à égales distances du centre (*voyez la note* du n° **492**).

475. (*Fig.* 4.) *Épicycloïde rectiligne*. Ce cas très-particulier, et fort utile pour les engrenages, se présente quand on choisit le cercle mobile O″ de manière que son rayon $R'' = \frac{1}{2}R$; car alors l'épicycloïde décrite par un point du cercle O″ se trouve *confondue avec le diamètre* D″OD qui passe par la position initiale D″ du point générateur. En effet, si nous considérons le cercle mobile à une époque quelconque de sa rotation, où il touche le cercle O en A et où il coupe le diamètre D″OD en M, il suffira de prouver que les arcs AM et AD″ sont égaux en *grandeur absolue*, puisque alors il sera certain que le point générateur, placé d'abord en D″, sera venu en M sur le diamètre D″OD. Or l'angle AO″M est évidemment double de AOD″; donc les arcs AM et AD″ sont aussi doubles l'un de l'autre, quant au nombre de degrés qu'ils contiennent : mais le premier de ces arcs appartient à une circonférence qui n'est que la moitié de l'autre; donc la longueur absolue de AM égale celle de AD″.

476. Troisième cas. (*Fig.* 6.) Supposons maintenant que le cercle mobile O′, qui roule dans la concavité du cercle O, ait son rayon $R' > \frac{1}{2}R$; je dis que l'épicycloïde DGF, décrite alors par le point générateur D, coïncidera avec celle que décrirait un troisième cercle O″ qui aurait un rayon $R'' = R - R'$, et qui roulerait *en*

sens contraire de O′. Pour le prouver, je considère le cercle mobile O′ parvenu dans la situation quelconque O'_2 où le point générateur D occupera une position M telle que l'arc $AM = AD$: je tire la droite MO'_2, et sa parallèle OB; puis, j'achève le parallélogramme OO'_2MO'', qui me donne $O''B = O''M = R - R'$, et je trace enfin le cercle O″. Cela fait, il n'y a plus qu'à démontrer que les arcs BM et BD ont la même longueur absolue; or les trois arcs BA, AM, MB, qui mesurent des angles évidemment égaux, doivent être proportionnels à leurs rayons, ce qui donne

$$\frac{BA}{R} = \frac{AM}{R'} = \frac{BM}{R''},$$

et puisque l'on a pris $R'' + R' = R$, il en résulte que $BM + MA = BA$: mais déjà l'on sait que l'arc $AM = AD$; donc il reste $BM = BD$.

477. Quatrième cas. (*Fig.* 7.) Enfin, supposons que le cercle mobile O′ ait un rayon $R' > R$, auquel cas il enveloppera le cercle fixe. Alors l'épicycloïde décrite par le point générateur D se trouvera *extérieure*, et chaque branche DGF occupera, sur le cercle fixe, un arc DEF égal à l'excès de la circonférence O′ sur la circonférence O. D'ailleurs on démontrera aisément, comme au n° **476**, que cette épicycloïde DGF coïncide avec celle que décrirait un cercle O″ tangent extérieurement au cercle O, et dont le rayon serait $R'' = R' - R$.

478. (*Fig.* 8.) Lorsqu'on suppose *infini* le rayon R du cercle fixe, ce cercle devient une droite DAF sur laquelle roule le cercle O′; et un point quelconque M de la circonférence de ce dernier décrit alors la *cycloïde* DMGF, dont la normale est encore MA et la tangente MT. Le tracé de cette courbe s'effectuera aisément par les moyens indiqués aux n^os^ **471** et **472**, sans qu'il soit besoin de les répéter ici. D'ailleurs, la cycloide serait *rallongée* ou *raccourcie*, comme au n° **473**, si le point générateur était placé au dehors ou au dedans du cercle mobile. Quant aux autres lignes de cette figure, nous en parlerons au n° **822** *bis*.

479. (*Fig.* 9.) Au contraire, si c'est le cercle mobile qui acquiert un rayon infini, ce cercle deviendra une droite indéfinie DX, qui, en roulant sur la circonférence O, décrira, par chacun de ses points D, une spirale DM′M″M‴..., laquelle n'est autre chose que la *développante* du cercle O (n° **197**). D'ailleurs, comme les normales M′A′, M″A″,..., sont précisément les rayons de courbure (n° **198**) de cette spirale, si des points A′, A″, A‴,..., on décrit avec des rayons égaux à D*a*′, D*a*″, D*a*‴,..., des arcs de cercle, ces arcs se confondront dans une étendue assez considérable avec la spirale même, et ils fourniront un moyen très-exact et très-commode pour tracer cette courbe.

Épicycloïdes sphériques.

480. (*Fig.* 99.) Considérons maintenant deux cercles OA et CA, dont le second roule sur le premier, en lui demeurant toujours tangent, mais de manière que leurs plans fassent entre eux un angle constant $CAX = \omega$: pendant cette rotation, un point quelconque M, fixe sur la circonférence mobile et entraîné avec elle, décrira dans l'espace une courbe DM... qui se nomme une épicycloide *sphérique*, parce qu'elle est située tout entière sur la surface d'une sphère constante. En effet, si, par les centres des deux cercles, on élève sur leurs plans les perpendiculaires OS et CS, ces deux *axes* iront se rencontrer nécessairement dans chacune des positions du cercle mobile; car, pour chaque point de contact tel que A, les plans AOS et ACS se trouveront évidemment perpendiculaires à la tangente commune AV, et dès lors ils coïncideront. D'ailleurs, comme l'angle OAC est le supplément de $CAX = \omega$, qui demeure constant pendant la rotation, il s'ensuit que le quadrilatère OACS aura deux côtés et trois angles dont la grandeur restera invariable, et conséquemment il en sera de même pour les côtés OS et CS, dont le point de rencontre demeurera *immobile*. D'où il résulte que la distance de ce point S au point mobile M sera constamment égale à SA, et qu'ainsi l'épicycloïde tout entière se trouvera située sur la sphère qui aurait SA pour rayon.

481. En outre, si l'on imagine deux cônes de révolution, ayant pour sommet commun le point S, et pour bases les cercles OA et CA, il est évident que ces cônes auront un plan tangent commun SAV; et, par conséquent, la génération de l'épicycloïde peut s'énoncer de la manière suivante : *Si deux cônes de révolution, qui ont toujours même sommet et des génératrices de même longueur, roulent l'un sur l'autre,* sans glisser, et en demeurant tangents le long d'une génératrice variable, *un point quelconque, fixe sur la base du cône mobile, décrira la courbe nommée épicycloïde sphérique*. En effet, on doit voir que, par là, les circonférences des deux bases seront toujours *tangentes*, et que leurs plans conserveront *une inclinaison constante*; et même c'est là le moyen le plus commode pour réaliser mécaniquement ces deux conditions pendant le roulement du cercle mobile sur le cercle fixe.

482. (*Fig*. 100.) Construisons la projection de l'épicycloïde sur le plan de la base du cône fixe, en regardant ce plan comme horizontal, et adoptons pour plan vertical celui qui passe par l'axe S'O de ce cône et par le point de contact A des deux bases, dans la position actuelle qui se rapporte à une époque quelconque du mouvement. D'après cela, les deux cônes seront projetés verticalement sur les triangles isocèles S'AE, S'AB', et la droite AB' représentera la projection verticale du cercle mobile qui, rabattu autour de la tangente commune AV, deviendra le cercle A*mb*. Cela posé, soit D l'origine de l'épicycloïde, c'est-à-dire la position qu'occupait le point générateur, quand il se trouvait en contact avec le cercle fixe : maintenant que le cercle mobile a parcouru, en roulant sur l'autre, l'arc DA, le point générateur se trouvera placé sur le rabattement en *m*, à une distance curviligne A*m*, égale en longueur absolue à l'arc AD (*). Mais en relevant le cercle A*mb*

(*) Pour tracer l'épure, il est bon de commencer par diviser le cercle mobile en parties égales, de mesurer une de ces parties au moyen de très-petites cordes; puis, de transporter celles-ci sur le cercle fixe, ce qui donnera un arc égal à l'une des divisions du cercle mobile. Ensuite, on répétera cet arc du grand cercle autant de fois qu'il y avait de divisions dans le cercle mobile, et l'on obtiendra l'étendue DAF occupée par une branche de l'épicycloïde, sur le cercle fixe. Cependant, si le rapport des deux rayons AO et C'A était exprimé par un nombre assez simple, il serait plus exact de prendre d'abord sur le cercle fixe un arc DAF, égal à une fraction de cette circonférence, exprimée par ce rapport; puis, on diviserait l'arc DAF en autant de parties égales qu'on en aurait marqué dans le cercle mobile.

autour de AV, on voit bien que le point (m, m') va décrire alors un arc perpendiculaire à la charnière AV, lequel se trouvera projeté horizontalement sur la droite mM, parallèle à la ligne de terre, et verticalement sur m'M'; d'où l'on conclura que (M, M') est un point de l'épicycloïde demandée.

483. Pour en obtenir un second, il faudra imaginer que le cercle mobile a roulé jusqu'à venir toucher le cercle fixe en A_6, par exemple : alors, on pourrait recommencer, sur le plan vertical OA_6 rabattu, des opérations semblables à celles que nous avons exécutées sur le plan vertical OA; mais il sera bien plus simple de ramener toutes les constructions à s'effectuer sur ce dernier. Pour cela, imaginons que les deux cônes, parvenus à se toucher le long de l'arête qui aboutit en A_6, tournent simultanément, et *sans changer leurs positions relatives,* autour de la verticale OS', jusqu'à ce que le rayon OA_6 vienne coïncider avec l'ancienne ligne de terre OAX. Alors le point générateur sera situé sur le cercle mobile rabattu, non plus en *m*, mais à une distance A*n*, égale à l'intervalle DA_6 compris entre l'origine D et le point de contact dans sa vraie position, qui est A_6. De sorte que si l'on construit, comme ci-dessus, les projections N et N' du point rabattu *n*, il n'y aura plus qu'à ramener OA en OA_6, puis à trouver un point N'' placé, relativement à cette dernière droite, dans une situation toute semblable à celle de N par rapport à OA; ce qui s'exécutera au moyen du cercle décrit avec la distance ON, sur lequel on prendra l'arc I''N'' égal à IN.

484. On agira de même pour toute autre position du point de contact des deux cercles; et quand ce contact aura lieu au milieu K de l'arc DKF, égal à la circonférence du cercle mobile, on voit bien que le point générateur se trouvera rabattu en *b*, qui se projette en B' et B : si donc on ramène ce dernier point sur OK, au moyen d'un arc de cercle BG, on obtiendra le *sommet* G où la projection horizontale de l'épicycloïde s'écarte le plus du cercle fixe.

Observons enfin que les points D, M, N'', transportés symétriquement au delà du rayon OG, au moyen d'arcs de cercle, fourniront des points F, M''', N''', qui appartiendront encore à l'épicycloïde, laquelle aura pour *axe* la droite OG, et admettra une infinité de branches identiques avec DGF.

485. Les constructions précédentes donnent aussi le moyen de tracer la projection verticale de l'épicycloïde, puisque M' appartient à cette projection; et quant au point (N, N'), qui a été transporté en N'', sans changer de hauteur, on retrouverait bien aisément sa projection verticale dans cette dernière situation. Mais nous n'avons pas voulu effectuer ce tracé, dans la crainte de rendre l'épure un peu confuse, et surtout parce que nous regardons ici le plan vertical de projection seulement comme un moyen d'exécuter nos opérations graphiques, et non comme existant réellement; attendu que sa présence aurait rendu invisibles une grande partie des lignes de l'épure. D'ailleurs l'épicycloïde est suffisamment déterminée par l'intersection du cylindre vertical DMGF, avec la sphère du rayon S'A qu'il est facile de représenter sur le plan horizontal.

486. *De la tangente à l'épicycloïde*. (*Fig*. 100.) Puisque cette courbe est tout