entière (nº **480**) sur la sphère fixe qui a pour centre le sommet S′ et pour rayon l'apothème S′A, le plan tangent de cette sphère en (M, M′) renfermera déjà la tangente demandée. Ensuite, comme nous avons démontré au nº **470** que la droite (AM, AM′), qui joint le point générateur avec le point de contact correspondant A, est une *normale* à l'épicycloïde, nous en pouvons conclure que la tangente cherchée se trouve aussi dans un plan perpendiculaire à cette droite, lequel peut être regardé comme le plan tangent d'une sphère qui aurait son centre en A, et pour rayon la droite (AM, AM′); mais cette seconde sphère est variable de position et de grandeur, en passant d'un point à un autre de l'épicycloïde, et elle ne fait que *toucher* cette courbe avec laquelle elle n'a de commun qu'un élément linéaire. D'après cela, le problème se réduit à chercher l'intersection du plan tangent à *la sphère fixe* avec le plan tangent à *la sphère variable*.

487. Pour y parvenir, coupons ces deux sphères par le plan B′AV, qui contient la base AB′ du cône mobile. La section faite ainsi dans la sphère S′A sera évidemment le cercle AB′ lui-même; rabattons-le suivant A*mb*, et menons-lui la tangente *m*P qui, étant relevée, rencontrera le plan horizontal en P sur la charnière AV : dès lors ce point P appartiendra à la trace horizontale du plan tangent de la sphère S′A, et cette trace sera la droite PT menée perpendiculairement sur la projection OM du rayon qui aboutit au point proposé (M, M′). Quant à la sphère variable dont le rayon est (AM, AM′), elle est coupée par le plan B′AV suivant un grand cercle qui, rabattu sur le plan horizontal autour de AV, deviendra le cercle décrit avec A*m* pour rayon. Menons-lui la tangente *m*Q (laquelle doit aboutir au point *b*), et relevons cette droite avec son cercle, pour trouver sa trace horizontale Q sur la charnière AV; dès lors ce point Q appartiendra à la trace du plan tangent de la sphère variable, et cette trace s'obtiendra en menant QX perpendiculaire sur la projection AM du rayon correspondant. Cela posé, les traces QX et PT des deux plans tangents allant se couper au point T, la droite TM sera la projection horizontale de la tangente à l'épicycloïde; et la projection verticale T′M′ s'en déduira, en projetant le point T sur la ligne de terre.

488. *Autre méthode.* (*Fig.* 100.) On peut obtenir cette tangente d'une manière beaucoup plus simple, par le procédé du *plan normal* (nº **214**), car ici nous connaissons immédiatement deux normales à l'épicycloïde : l'une est le rayon de la sphère constante, mené du sommet S′ au point (M, M′); l'autre est la droite (MA, M′A), d'après ce que nous avons prouvé au nº **470**. Par conséquent, si nous faisons passer un plan par ces deux normales, la tangente cherchée devra lui être perpendiculaire, et ses projections seront ainsi déterminées. Or la première de ces normales va évidemment percer le plan vertical en S′ et la seconde en A; donc S′A est la trace verticale du plan normal. Quant à l'autre trace, imaginons, dans le plan normal, une droite auxiliaire parallèle à S′A; ses projections M′R, MR donneront le point R, où elle perce le plan horizontal; et, par suite, AR sera la trace horizontale du plan normal. Dès lors la tangente à l'épicycloïde s'obtiendra en menant MT perpendiculaire sur AR, et M′T′ perpendiculaire sur AS′.

489. Il importe d'observer qu'aux points de *rebroussement* D et F, la projection horizontale de l'épicycloïde a pour tangentes les rayons OD et OF. En effet, la droite variable (AM, AM′), à laquelle la tangente dans l'espace est toujours perpendiculaire, étant prolongée indéfiniment, est une sécante par rapport au cercle mobile, comme on le voit par son rabattement A*m*. Or, ses deux points de section A et *m* se trouvant réunis quand le point de contact A du cercle mobile est arrivé en D, la droite indéfinie rabattue suivant A*m* devient alors *tangente* au cercle mobile dans le point *m*, et, par suite, tangente au cercle fixe dans le point D, puisque à cette époque les deux cercles sont en contact par les points *m* et D. Donc la tangente au point D du cercle fixe DA se trouvera être précisément la normale de l'épicycloïde et en même temps la trace horizontale du *plan normal;* et, conséquemment, la tangente de l'épicycloïde sera projetée horizontalement sur le rayon ODX′.

Quant à la projection verticale de cette même tangente, il suffira de projeter son pied D en D′ sur la ligne de terre, et d'abaisser de ce dernier point une perpendiculaire sur la trace verticale du plan normal relatif au point D. Or cette trace s'obtiendra fort aisément, puisqu'elle passera évidemment par le point S′ et par le point où la ligne de terre rencontrera la seconde normale, qui est, comme nous venons de le prouver, confondue avec la tangente de l'arc DA.

On agira d'une manière toute semblable pour trouver les projections de la tangente à l'autre extrémité F de l'épicycloïde; et l'on doit apercevoir que chacune de ces tangentes en D ou en F coïncide précisément avec la tangente du *grand cercle vertical* de la sphère constante dont le rayon est S′A.

490. Pour le *sommet* de l'épicycloïde, qui est projeté en G, la tangente sera horizontale et perpendiculaire au plan vertical OKG; car ce plan contiendra évidemment les deux normales du nº **488**, quand le point générateur sera parvenu à l'extrémité supérieure B′ du diamètre mené par le point de contact du cercle mobile.

491. (*Fig.* 100.) Lorsque nous avons cherché (nº **487**) la trace QX du plan tangent à la *sphère variable* dont le rayon est (AM, AM′), nous nous sommes appuyés sur ce que ce plan devait contenir la tangente rabattue suivant Q*mb*. Or, quand elle sera relevée dans le plan B′AV du cercle mobile, elle ira percer le plan vertical en B′; donc B′X est la trace verticale du plan tangent à la sphère variable. En outre, cette droite doit se trouver perpendiculaire à B′A, car c'est sur cette dernière droite que se projette le rayon (AM, AM′) mené au point de contact de ce plan tangent.

492. Observons d'ailleurs que, dans les diverses positions A, A_6,..., que prend le point de contact du cercle mobile, la projection AB′ de ce cercle, sur les plans verticaux correspondants OA, OA_6,..., aura toujours la même grandeur et la même inclinaison; de sorte que pour tous ces plans, le triangle rectangle AB′X restera invariable de grandeur, et, par suite, les traces XB′ des divers plans tangents aux sphères variables iront toutes rencontrer la verticale OS′ au même point Z′. De là il résulte que si l'on avait à considérer un cône dont le sommet fût en Z′, et qui eût pour base l'épicycloïde sphérique, tous les plans tels que Z′XQ lui seraient tangents, puisque chacun d'eux renfermerait le sommet et une tangente de la base.

En outre, tous ces plans tangents viendraient passer successivement par la droite fixe Z′X, lorsque le cône *épicycloïdal*, en tournant autour de OZ′, amènerait en M les divers points N″, G, N‴,... Cette propriété est employée dans les engrenages coniques, qui servent à faire mouvoir les *roues d'angles* (voyez le n° **883**) [*].

493. DÉVELOPPANTE SPHÉRIQUE. (*Fig.* 101.) Lorsque le cône mobile acquiert une ouverture telle, que l'angle au centre ASB (*fig.* 99) devient égal à 180°, ce cône se réduit à un cercle dont le rayon égale l'apothème SA du cône fixe, et dont le plan est tangent à ce dernier cône; dans ce cas particulier, l'épicycloïde décrite alors par un point M du cercle mobile, reçoit le nom de *développante sphérique*, attendu que la question revient à dire simplement que l'on fait rouler sur un cône fixe S′AO un de ses plans tangents S′AV, comme, dans la *fig.* 9 de la *Pl.* 47, nous avions obtenu la spirale *développante du cercle* en faisant rouler sur cette circonférence une de ses tangentes.

494. (*Fig.* 101.) Comme la courbe en question est tout entière sur la sphère du rayon S′A, il suffira de construire sa projection horizontale. A cet effet, rabattons le cercle mobile dont le centre est au sommet (S′, O), autour de la tangente AV qui lui est commune avec le cercle fixe; et sur ce rabattement S″ prenons un arc Am égal à l'arc AD, si l'on adopte D pour l'origine de la développante, c'est-à-dire pour la position qu'occupait le point générateur lorsqu'il se trouvait en contact avec le cône fixe. Alors m sera le rabattement de ce point générateur quand le contact est arrivé en A, et sa position véritable (M, M′) se déduira aisément de là, en relevant le cercle S″ dans le plan tangent S′AV, autour de la charnière AV.

Lorsque le cercle mobile aura roulé jusqu'à toucher le cercle fixe en A_5, on imaginera que tout le système tourne simultanément, sans rouler, autour de la verticale S′O, pour amener le rayon OA_5 sur la ligne de terre OA; alors, en prenant l'arc $An = DA_5$, le point générateur se trouvera rabattu en n, et projeté en N et N′: mais ensuite, pour reporter le cercle mobile dans sa vraie position, on décrira avec le rayon ON une circonférence sur laquelle on prendra l'arc NN_5 égal à l'arc II_5, compris entre les rayons OA et OA_5; de sorte que N_5 sera le point cherché. On trouvera ainsi DMN_5PGQF pour la projection horizontale de la développante sphérique.

495. *La tangente* au point quelconque (M, M′) devra être menée perpendiculaire sur le plan des deux normales dont nous avons parlé au n° **488**, lesquelles sont les droites qui réunissent le point générateur (M, M′) avec le centre (O, S′) et avec le point de contact actuel A. Or ce *plan normal* coïncide évidemment avec le plan S′AV où est situé le cercle mobile, et qui est *tangent au cône fixe;* donc il suffira de tirer MT perpendiculaire sur AV, et M′T′ perpendiculaire sur S′A.

496. On doit apercevoir que la branche DMPGQF, qui sera décrite au bout d'une

---

[*] Cherchons les équations qui déterminent l'épicycloïde sphérique (*fig.* 100), en rapportant cette courbe aux trois axes rectangulaires OX′, OY′, OZ′, dont le premier passe par le point de rebroussement D. Si l'on pose

$$OS' = h, \quad OA = R, \quad C'A = R', \quad \text{angle } B'Ab = \omega,$$

on aura évidemment

$$x'^2 + y'^2 + z^2 - 2zh = R^2 \tag{1}$$

pour l'équation de la sphère constante, sur laquelle est située l'épicycloïde tout entière; de sorte que cette courbe se trouvera complétement définie, en joignant à l'équation précédente celle de sa projection horizontale DMGF. Or, si nous appelons α l'angle DOA, nous en conclurons que

$$R.\alpha = AD = Am; \quad \text{d'où} \quad \text{angle } Acm = \frac{R\alpha}{R'},$$

et alors nous aurons pour les coordonnées du point M, rapporté d'abord aux axes OX et OY,

$$x = OA + AH = R + \left(R' - R'\cos\frac{R\alpha}{R'}\right)\cos\omega,$$

$$y = -MH = -R'\sin\frac{R\alpha}{R'}.$$

Mais pour revenir de ces axes, qui seraient mobiles avec le point de contact A, aux axes fixes OX′ et OY′, il faut employer les formules connues

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \quad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha;$$

donc, en substituant ici les valeurs précédentes de x et de y, il viendra

$$x' = (R + R'\cos\omega)\cos\alpha - R'\cos\frac{R\alpha}{R'}\cos\omega\cos\alpha + R'\sin\frac{R\alpha}{R'}\sin\alpha, \tag{2}$$

$$y' = (R + R'\cos\omega)\sin\alpha - R'\cos\frac{R\alpha}{R'}\cos\omega\sin\alpha - R'\sin\frac{R\alpha}{R'}\cos\alpha. \tag{3}$$

Il resterait maintenant à éliminer l'arc α entre ces deux équations pour obtenir celle de la courbe DMGF

sur le plan horizontal; mais cette élimination ne pouvant s'effectuer que quand on aura fixé numériquement le rapport des rayons R, R′, et quand ce rapport sera un nombre commensurable, nous garderons les deux équations (2) et (3) qui suffiront pour calculer les coordonnées x' et y' des divers points, en attribuant à α différentes valeurs successives.

Pour passer de là à l'épicycloïde plane, il suffira de poser $\cos\omega = \pm 1$, selon que le cercle mobile roulera au dehors ou au dedans du cercle fixe; et si, en nous arrêtant à ce dernier cas, nous supposons d'ailleurs que R′ est le quart de R, comme dans la *fig.* 5 de la *Pl.* 47, les équations (2) et (3) deviendront

$$x' = \tfrac{3}{4}R\cos\alpha + \tfrac{1}{4}R\cos\alpha\cos 4\alpha + \tfrac{1}{4}R\sin\alpha\sin 4\alpha, \tag{4}$$

$$y' = \tfrac{3}{4}R\sin\alpha + \tfrac{1}{4}R\sin\alpha\cos 4\alpha - \tfrac{1}{4}R\cos\alpha\sin 4\alpha; \tag{5}$$

puis, si l'on substitue dans ces dernières valeurs connues

$$\cos 4\alpha = 1 - 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha, \quad \sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$$

on trouvera, en supprimant les accents qui deviennent inutiles à présent,

$$x = R\cos^3\alpha, \quad y = R\sin^3\alpha.$$

Maintenant l'élimination de α est facile; car, en ajoutant ces équations après les avoir élevées à la puissance $\frac{2}{3}$, il restera pour l'épicycloïde représentée dans la *fig.* 5 de *Pl.* 47,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$$

C'est donc un cas particulier de la développée de l'ellipse qui a pour équation

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

et ces deux courbes appartiennent à la famille des *storoïdes*, qui sont représentées généralement par

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{m} + \left(\frac{y}{B}\right)^{m} = 1.$$

révolution entière du cercle mobile, occupera sur la base du cône un arc DAGF, égal à l'excès de la circonférence S″ sur la circonférence O; mais, en outre, il faut bien remarquer que cette branche se composera de deux parties réunies par un rebroussement au point G, au milieu de DGF, lequel est la projection de la position la plus élevée du point générateur. Pour se rendre compte de cette circonstance, il faut imaginer la nappe supérieure du cône S′AE prolongée jusqu'à ce qu'elle soit terminée par un cercle égal à celui du rayon OA, et observer que le cercle mobile S″ se trouve dans un plan variable qui touche à la fois les deux nappes du cône, suivant une génératrice égale au diamètre de ce cercle S″; d'où il résulte que, pendant qu'un certain arc A*m* de la circonférence mobile roule sur la base inférieure du cône, l'arc diamétralement opposé roule en même temps sur la base supérieure; et, conséquemment, lorsque le point générateur *m* est arrivé au milieu de sa course, il se trouve en contact avec cette base supérieure, et il y produit un rebroussement tout à fait identique avec celui qui avait eu lieu au point de départ D sur la base inférieure du cône. Quant aux autres lignes que renferme cette épure, nous en parlerons au n° **669**.

CHAPITRE III.

SUR LES SPHÈRES ET LES PYRAMIDES.

497. *Trouver l'intersection de trois sphères données.* (*Fig.* 102.) Adoptons pour plan horizontal celui qui contient les centres A, B, C des sphères proposées, et décrivons les grands cercles qui sont les traces horizontales de ces surfaces. Alors, si les circonférences A et B se rencontrent aux points D et E, il est clair que le cercle vertical, décrit sur DE comme diamètre, sera l'intersection des deux sphères A et B; tandis que les sphères A et C se couperont suivant un autre cercle vertical projeté sur FG. Maintenant, si les deux cordes DE et EG se rencontrent en M, on pourra affirmer que les circonférences projetées sur ces cordes se coupent effectivement en deux points qui seront projetés horizontalement en M; et ces points de l'espace se trouveront évidemment communs aux trois sphères en question. Pour achever de fixer la position de ces points, projetons-les sur un plan vertical quelconque XY; en rabattant le cercle DE autour de son diamètre horizontal, et tirant l'ordonnée M*m*, cette droite mesurera évidemment la hauteur de l'un des points cherchés au-dessus du plan horizontal : donc, en prenant au-dessus et au-dessous de XY les distances IM′ et IM″, égales à M*m*, on obtiendra les projections (M, M′) et (M, M″) des deux points demandés.

498. Si l'on avait cherché l'intersection des deux sphères B et C, on aurait obtenu un cercle vertical dont la projection HK aurait dû nécessairement passer aussi par le point M; d'où l'on peut conclure ce théorème de géométrie plane : *Quand trois circonférences tracées dans un même plan se coupent deux à deux, les points de section*

correspondants se trouvent situés sur des cordes qui passent toutes trois par un même point du plan.

499. *Construire une pyramide triangulaire dont les six arêtes sont connues de grandeur.* (*Fig.* 102.) On tracera d'abord, sur le plan horizontal, une des faces ABC de la pyramide, au moyen des trois arêtes données qui se rapportent à cette face; ensuite on déterminera le quatrième sommet (M, M′) en cherchant, comme dans le problème précédent, l'intersection de trois sphères qui auraient pour centres les points A, B, C, et pour rayons les longueurs des trois autres arêtes assignées par la question. Il y aura évidemment deux pyramides symétriques l'une de l'autre, puisque le dernier sommet peut être placé en (M, M′) ou en (M, M″); et d'ailleurs on trouvera, par les méthodes du livre Ier, tout ce qui peut intéresser sur les angles plans, les angles dièdres, etc., de chacune de ces pyramides.

500. *Circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire donnée.* (*Fig.* 103.) Soient (A, A′), (B, B′), (C, C′), (S, S′) les projections des quatre sommets, sur deux plans rectangulaires, dont un renferme la face ABC; si ces projections n'étaient pas données immédiatement, elles se détermineraient comme au problème précédent. Le centre de la sphère cherchée, devant être à égale distance de ces quatre sommets, se trouvera à la fois dans les deux plans verticaux FO et GO, élevés perpendiculairement sur les milieux des arêtes AB et AC; donc ce centre sera quelque part sur la verticale (O, I′O′), intersection de ces plans. De même, il doit être contenu dans le plan élevé perpendiculairement sur le milieu d'une troisième arête appartenant à une autre face, telle que (SA, S′A′); donc, si l'on prend la peine de construire les traces de ce plan, ainsi que le point où il ira couper la verticale (O, I′O′), on obtiendra le centre demandé. Mais comme ces opérations seraient un peu longues, à moins qu'on n'ait eu le soin de choisir le plan vertical parallèle à l'arête (SA, S′A′), on pourra ordinairement les remplacer par la construction suivante :

Avec le rayon OB, traçons le cercle circonscrit au triangle ABC. Cette circonférence appartiendra à la sphère demandée, et si elle est coupée par le plan vertical SD parallèle à la ligne de terre, en un point (D, D′), on pourra dire que la droite (SD, S′D′) sera *une corde* de la sphère, *parallèle au plan vertical;* par conséquent, le centre de cette surface devra être situé dans le plan KL′ élevé perpendiculairement sur le milieu de cette corde. Or ce plan va couper la verticale (O, I′O′) au point (O, O′); donc c'est là le centre de la sphère en question.

Quant au rayon de cette sphère, qui est projeté sur (OB, O′B′), on obtiendra sa véritable longueur en le rabattant parallèlement au plan vertical suivant (O*b*, O′*b*′); donc, si des points O et O′, avec un rayon égal à O′*b*′, on décrit deux cercles, ce seront les contours apparents de la sphère demandée, qui est ainsi complétement déterminée de grandeur et de position.

501. *Inscrire une sphère dans une pyramide triangulaire donnée.* (*Fig.* 104.) Prenons encore le plan d'une des faces ABC pour le plan horizontal, et soit (S, S′) le sommet situé hors de ce plan. Si, par l'arête AB, nous menions un plan qui divi-