révolution entière du cercle mobile, occupera sur la base du cône un arc DAGF, égal à l'excès de la circonférence S″ sur la circonférence O; mais, en outre, il faut bien remarquer que cette branche se composera de deux parties réunies par un rebroussement au point G, au milieu de DGF, lequel est la projection de la position la plus élevée du point générateur. Pour se rendre compte de cette circonstance, il faut imaginer la nappe supérieure du cône S′AE prolongée jusqu'à ce qu'elle soit terminée par un cercle égal à celui du rayon OA, et observer que le cercle mobile S″ se trouve dans un plan variable qui touche à la fois les deux nappes du cône, suivant une génératrice égale au diamètre de ce cercle S″; d'où il résulte que, pendant qu'un certain arc Am de la circonférence mobile roule sur la base inférieure du cône, l'arc diamétralement opposé roule en même temps sur la base supérieure; et, conséquemment, lorsque le point générateur m est arrivé au milieu de sa course, il se trouve en contact avec cette base supérieure, et il y produit un rebroussement tout à fait identique avec celui qui avait eu lieu au point de départ D sur la base inférieure du cône. Quant aux autres lignes que renferme cette épure, nous en parlerons au n° **669**.

CHAPITRE III.

SUR LES SPHÈRES ET LES PYRAMIDES.

497. *Trouver l'intersection de trois sphères données.* (*Fig.* 102.) Adoptons pour plan horizontal celui qui contient les centres A, B, C des sphères proposées, et décrivons les grands cercles qui sont les traces horizontales de ces surfaces. Alors, si les circonférences A et B se rencontrent aux points D et E, il est clair que le cercle vertical, décrit sur DE comme diamètre, sera l'intersection des deux sphères A et B; tandis que les sphères A et C se couperont suivant un autre cercle vertical projeté sur FG. Maintenant, si les deux cordes DE et EG se rencontrent en M, on pourra affirmer que les circonférences projetées sur ces cordes se coupent effectivement en deux points qui seront projetés horizontalement en M; et ces points de l'espace se trouveront évidemment communs aux trois sphères en question. Pour achever de fixer la position de ces points, projetons-les sur un plan vertical quelconque XY; en rabattant le cercle DE autour de son diamètre horizontal, et tirant l'ordonnée Mm, cette droite mesurera évidemment la hauteur de l'un des points cherchés au-dessus du plan horizontal : donc, en prenant au-dessus et au-dessous de XY les distances IM′ et IM″, égales à Mm, on obtiendra les projections (M, M′) et (M, M″) des deux points demandés.

498. Si l'on avait cherché l'intersection des deux sphères B et C, on aurait obtenu un cercle vertical dont la projection HK aurait dû nécessairement passer aussi par le point M; d'où l'on peut conclure ce théorème de géométrie plane : *Quand trois circonférences tracées dans un même plan se coupent deux à deux, les points de section correspondants se trouvent situés sur des cordes qui passent toutes trois par un même point du plan.*

499. *Construire une pyramide triangulaire dont les six arêtes sont connues de grandeur.* (*Fig.* 102.) On tracera d'abord, sur le plan horizontal, une des faces ABC de la pyramide, au moyen des trois arêtes données qui se rapportent à cette face; ensuite on déterminera le quatrième sommet (M, M′) en cherchant, comme dans le problème précédent, l'intersection de trois sphères qui auraient pour centres les points A, B, C, et pour rayons les longueurs des trois autres arêtes assignées par la question. Il y aura évidemment deux pyramides symétriques l'une de l'autre, puisque le dernier sommet peut être placé en (M, M′) ou en (M, M″); et d'ailleurs on trouvera, par les méthodes du livre Ier, tout ce qui peut intéresser sur les angles plans, les angles dièdres, etc., de chacune de ces pyramides.

500. *Circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire donnée.* (*Fig.* 103.) Soient (A, A′), (B, B′), (C, C′), (S, S′) les projections des quatre sommets, sur deux plans rectangulaires, dont un renferme la face ABC; si ces projections n'étaient pas données immédiatement, elles se détermineraient comme au problème précédent. Le centre de la sphère cherchée, devant être à égale distance de ces quatre sommets, se trouvera à la fois dans les deux plans verticaux FO et GO, élevés perpendiculairement sur les milieux des arêtes AB et AC; donc ce centre sera quelque part sur la verticale (O, I′O′), intersection de ces plans. De même, il doit être contenu dans le plan élevé perpendiculairement sur le milieu d'une troisième arête appartenant à une autre face, telle que (SA, S′A′); donc, si l'on prend la peine de construire les traces de ce plan, ainsi que le point où il ira couper la verticale (O, I′O′), on obtiendra le centre demandé. Mais comme ces opérations seraient un peu longues, à moins qu'on n'ait eu le soin de choisir le plan vertical parallèle à l'arête (SA, S′A′), on pourra ordinairement les remplacer par la construction suivante :

Avec le rayon OB, traçons le cercle circonscrit au triangle ABC. Cette circonférence appartiendra à la sphère demandée, et si elle est coupée par le plan vertical SD parallèle à la ligne de terre, en un point (D, D′), on pourra dire que la droite (SD, S′D′) sera *une corde* de la sphère, *parallèle au plan vertical;* par conséquent, le centre de cette surface devra être situé dans le plan KL′ élevé perpendiculairement sur le milieu de cette corde. Or ce plan va couper la verticale (O, I′O′) au point (O, O′); donc c'est là le centre de la sphère en question.

Quant au rayon de cette sphère, qui est projeté sur (OB, O′B′), on obtiendra sa véritable longueur en le rabattant parallèlement au plan vertical suivant (Ob, O′b′); donc, si des points O et O′, avec un rayon égal à O′b′, on décrit deux cercles, ce seront les contours apparents de la sphère demandée, qui est ainsi complétement déterminée de grandeur et de position.

501. *Inscrire une sphère dans une pyramide triangulaire donnée.* (*Fig.* 104.) Prenons encore le plan d'une des faces ABC pour le plan horizontal, et soit (S, S′) le sommet situé hors de ce plan. Si, par l'arête AB, nous menions un plan qui divisât en deux parties égales l'angle dièdre formé par les faces SAB et CAB, ce plan *bissecteur* renfermerait évidemment tous les points de l'espace qui sont à égale distance de ces deux faces; donc la sphère demandée, qui doit toucher chacune de celles-ci, aurait son centre situé nécessairement dans ce plan bissecteur. De même, deux autres plans bissecteurs menés suivant les arêtes AC et BC, de manière à diviser en deux parties égales les angles dièdres qui ont ces droites pour arêtes, contiendraient aussi le centre cherché; par conséquent, ce centre est à l'intersection de ces trois plans bissecteurs, c'est-à-dire au sommet de la *pyramide intérieure* qu'ils forment avec la base primitive ABC : ainsi la question est ramenée à trouver le sommet de cette nouvelle pyramide, ou bien les trois arêtes qui y aboutissent.

Pour cela, mesurons d'abord l'angle dièdre SABC, en le coupant par un plan vertical SD, perpendiculaire à AB, et rabattons sur le plan vertical la section ainsi faite, laquelle deviendra évidemment l'angle S'D''H; construisons de même les angles S'E''H et S'F''H qui mesurent les angles dièdres AC et BC, puis divisons ces trois angles plans chacun par moitiés, au moyen des droites D''I, E''L, F''K : alors ces trois bissectrices, ramenées dans les plans verticaux SD, SE, SF, appartiendraient aux faces de la pyramide intérieure, qui a aussi pour base le triangle ABC. Par conséquent, si l'on coupe ces bissectrices par un plan horizontal quelconque X'Y', on obtiendra trois points δ'', ε'', φ'', qui, ramenés en δ, ε, φ, appartiendront à la section triangulaire *abc* faite par le plan X'Y' dans la pyramide intérieure; donc ce triangle *abc* est maintenant facile à tracer, puisque ses trois côtés doivent être évidemment parallèles à ceux de ABC. Alors, si l'on tire les droites A*a*, B*b*, C*c*, ce seront les arêtes latérales de la pyramide intérieure, et elles devront aller se couper en un point unique O, qui sera la projection horizontale du centre de la sphère demandée.

Quant à la projection verticale O' de ce même centre, elle s'obtiendra en projetant le point O sur l'arête C'*c*' de la pyramide intérieure; et le rayon de la sphère sera la perpendiculaire O'R' abaissée du centre sur la face inférieure. Donc, en traçant avec cette droite O'R' deux cercles dont les centres soient en O et O', on aura les projections de la sphère cherchée.

502. Si l'on désire connaître les points de contact de cette sphère avec les faces latérales, on pourra facilement construire les traces du plan indéfini qui contient la face SAC par exemple; puis, on abaissera du point (O, O') une perpendiculaire sur ce plan, par la méthode générale du n° **35**. Mais il sera bien plus court d'observer qu'un plan perpendiculaire à AC, et mené par le point O, couperait la sphère et la face SAC suivant un grand cercle et une droite qui lui serait tangente; d'ailleurs, cette droite rabattue sur le plan vertical, autour de (O, O'R'), deviendrait évidemment parallèle à S'E''. Si donc, sans tracer cette parallèle, on abaisse du point O' un rayon perpendiculaire sur S'E'', ce rayon ira couper le contour vertical de la sphère en un point qui sera le rabattement du point de contact cherché; et il sera facile ensuite de ramener ce point dans sa véritable position.

503. (*Fig.* 104.) Les considérations employées au n° **501** peuvent servir à

résoudre ce problème général : *Trouver une sphère qui soit tangente à quatre plans donnés*. En effet, les quatre faces de la pyramide SABC, étant prolongées indéfiniment, formeront autour des arêtes AB, AC, BC, trois angles dièdres *extérieurs* et supplémentaires de ceux que nous avons employés ci-dessus, et ces nouveaux angles auront pour mesures S'D''B', S'E''C', S'F''C'. Donc, si l'on divise ces derniers en deux parties égales, par des droites qui couperont le plan X'Y' en des points analogues à δ''', ε'', φ'', on pourra combiner trois à trois ces divers points pour former plusieurs triangles, tels que *abc*; et ceux-ci conduiront à divers centres, tels que (O, O'). Par exemple, adoptons la droite D''*d''* qui divise par moitiés l'angle *extérieur* S'D''B', et qui rencontre le plan X'Y' au point *d''*, que l'on ramènera en *d* sur le plan horizontal; puis, conservons les deux anciens points ε et φ : alors nous obtiendrons le triangle *ca''b''* dont les sommets, étant joints avec A, B, C, fourniront le point (O'', O''') pour le centre d'une sphère qui touchera la face SAB *en dehors* de la pyramide primitive, tandis qu'elle sera tangente aux trois autres faces prolongées à droite de SAB. De cette manière, on trouvera généralement *huit* sphères tangentes aux quatre plans indéfinis qui contiennent les faces de la pyramide SABC; car, en désignant par α, α', α'', les trois angles dièdres *intérieurs*, et par ω, ω', ω'', les trois angles dièdres *extérieurs*, qui ont pour arêtes les côtés AB, AC, BC, on pourra évidemment adopter, pour centre de la sphère demandée, le point d'intersection des trois *plans bissecteurs* qui diviseront les angles dièdres compris dans chacune des combinaisons suivantes :

$$\begin{array}{c|c|c|c}
\alpha,\ \alpha',\ \alpha'' & \alpha,\ \alpha',\ \omega'' & \alpha,\ \omega',\ \omega'' & \omega,\ \omega',\ \omega''. \\
 & \alpha,\ \alpha'',\ \omega' & \alpha',\ \omega,\ \omega'' & \\
 & \alpha',\ \alpha'',\ \omega & \alpha'',\ \omega,\ \omega' &
\end{array}$$

On sentira aisément pourquoi il faut exclure toute combinaison où entreraient deux angles adjacents à la même arête, comme α et ω; et, d'ailleurs, le nombre des solutions pourra devenir moindre, suivant les inclinaisons de quatre plans donnés. Cette question est analogue au problème de la géométrie plane, dans lequel on propose de trouver un cercle qui soit tangent à trois droites connues.

504. *Construire un point dont on connaît les distances à trois points donnés*, ou bien *à trois plans connus*, ou enfin *à trois droites données*.

1° Désignons les points donnés par A, B, C, et leurs distances respectives au point inconnu x, par α, β, γ. Alors, en imaginant une sphère qui ait son centre en A et pour rayon la distance α, le point x devra évidemment se trouver quelque part sur la surface de cette sphère; il sera pareillement sur deux autres sphères qui auraient leurs centres en B, C, et pour rayons les longueurs β, γ : par conséquent, la question revient à trouver *l'intersection de trois sphères données*, problème que nous avons résolu au n° **497**.

2° Si l'on désigne à présent par P, P', P'' les plans donnés, et par δ, δ', δ'' leurs distances au point inconnu x, ce dernier devra être à la fois dans trois plans p, p', p'', respectivement parallèles à P, P', P'', et éloignés de ceux-ci de quantités égales à

δ, δ', δ''. Donc, en construisant les plans p, p', p'', d'après les méthodes du livre I^er^, la question se réduira à trouver l'intersection de trois plans connus, problème que le lecteur saura aisément résoudre. Observons seulement que, comme le plan p, par exemple, pourra être mené à la distance δ, soit au-dessus, soit au-dessous de P, il y aura ainsi *huit solutions* pour la position du point demandé x.

3° Soient enfin A, B, C trois droites données, dont le point inconnu x est éloigné des quantités α, β, γ. Si l'on imagine un cylindre de révolution qui ait pour axe la ligne A, et pour *section droite* un cercle du rayon α, cette surface cylindrique contiendra nécessairement le point x. De même, ce point se trouvera aussi sur deux autres cylindres de révolution, qui auront par axes et pour rayons B et β, C et γ; par conséquent, la question est réduite à trouver tous les points communs à ces trois cylindres. Or, en supposant que les traces horizontales de ces trois surfaces ont été construites comme nous allons l'expliquer plus bas, il n'y aura plus qu'à chercher, par la méthode du n° **288**, la courbe d'intersection du cylindre A avec le cylindre B, puis celle des cylindres A et C; et ces deux courbes, qui pourront se couper au plus dans *huit* points, attendu que les trois surfaces sont évidemment du second degré, feront connaître par leurs rencontres les diverses positions que peut avoir le point demandé x. Toutefois observons que, pour obtenir les points vraiment communs aux deux courbes dans l'espace, il ne faudra prendre, parmi les sections des deux projections horizontales, que les points qui correspondront exactement à des sections sur le plan vertical; c'est-à-dire que ces points devront être deux à deux sur des perpendiculaires à la ligne de terre. D'ailleurs on pourra, comme vérification, construire aussi la courbe d'intersection des cylindres B et C, laquelle devra encore passer par les points communs aux deux premières courbes.

505. (*Fig.* 105.) Quant à la manière de trouver la trace horizontale de chaque cylindre, représentons, sur deux plans de projection, l'axe de l'un d'entre eux par (AF, A'F'). En faisant tourner cette droite autour de la verticale A, pour la rabattre parallèlement au plan vertical, elle deviendra (Af, Af'); et alors la section circulaire du cylindre se projettera suivant une droite G'H', égale à 2α et perpendiculaire sur $A'f'$. Donc le contour apparent du cylindre sera fourni par les droites G'K', H'L', parallèles à $A'f'$, et la trace horizontale de cette surface dans la position actuelle sera une ellipse ayant évidemment pour grand axe la distance L'K'. Par conséquent, si l'on ramène les points K' et L' en a et d, la droite ad et sa perpendiculaire $bAe = 2\alpha$ seront les axes de l'ellipse suivant laquelle le cylindre primitif coupait le plan horizontal; de sorte que cette courbe sera maintenant facile à construire.

506. « *Un ingénieur* (*), *parcourant un pays de montagnes, est muni d'une carte topographique sur laquelle sont marquées exactement les projections des différents points du terrain, ainsi que les cotes qui indiquent les hauteurs de ces points au-dessus d'une même surface de niveau. Il rencontre un point remarquable qui n'est pas marqué sur la*

(*) Cet article et le suivant sont extraits de la *Géométrie descriptive* de Monge.

carte, et il ne porte avec lui d'autre instrument propre à mesurer les angles, qu'un graphomètre garni d'un fil à plomb. On demande que, sans quitter la station, l'ingénieur construise sur la carte le point où il est, et qu'il trouve la cote qui convient à ce point, c'est-à-dire sa hauteur au-dessus de la surface de niveau.

» Parmi les points du terrain marqués d'une manière précise sur la carte, et qui seront les plus voisins, l'ingénieur en distinguera trois, dont deux au moins ne soient pas à la même hauteur que lui; puis il observera les angles formés par la verticale et les rayons visuels dirigés à ces trois points, et, d'après cette seule observation, il pourra résoudre la question.

» En effet, nommons A, B, C les trois points observés dont il a les projections horizontales sur la carte, et dont il pourra construire les projections verticales au moyen de leurs cotes. Puisqu'il connait l'angle formé par la verticale et par le rayon visuel dirigé au point A, il connait aussi l'angle formé par le même rayon avec la verticale élevée au point A; car, en négligeant la courbure de la terre, ce qui est convenable ici, ces deux angles sont alternes-internes, et, par conséquent, égaux. Si donc il conçoit une surface conique à base circulaire, dont le sommet soit au point A, dont l'axe soit vertical, et dont l'angle formé par l'axe et par la droite génératrice soit égal à l'angle observé, ce qui détermine complétement cette surface, elle passera par le rayon visuel dirigé au point A, et conséquemment par le point de la station : ainsi, il aura une première surface courbe déterminée, sur laquelle se trouvera le point demandé. En raisonnant pour les deux autres points B, C, comme pour le premier, le point demandé se trouvera encore sur deux autres surfaces coniques à bases circulaires, dont les axes seront verticaux, dont les sommets seront aux points B, C, et pour chacune desquelles l'angle formé par l'axe avec la génératrice sera égal à l'angle formé par la verticale avec le rayon visuel correspondant. Le point demandé sera donc en même temps sur trois surfaces coniques, déterminées de forme et de position, et, par conséquent, dans leur intersection commune. Il ne s'agit donc plus que de construire, d'après les données de la question, les projections horizontales et verticales des intersections de ces trois surfaces considérées deux à deux (*); les intersections de ces projections donneront les projections horizontale et verticale du point demandé, et, par conséquent, la position de ce point sur la carte, et sa hauteur au-dessus ou au-dessous des points observés, ce qui déterminera sa cote.

» Cette solution doit en général produire huit points qui satisfont à la question; mais il sera facile à l'observateur de distinguer, parmi ces huit points, celui qui coïncide avec le point de la station. D'abord, il pourra toujours s'assurer si le point de la station est au-dessus ou au-dessous du plan qui passe par les trois points observés. Supposons que ce point soit au-dessus du plan des sommets des cônes; il

(*) L'intersection de deux de ces cônes se construira par la méthode du n° 297, ou, mieux encore, en les coupant par divers plans horizontaux; car les sections seront des cercles, dont les centres se projetteront au même point que le sommet, et dont les rayons se trouveront marqués sur le plan vertical.

sera autorisé à négliger les branches des intersections des surfaces coniques qui existent au-dessous de ce plan, et par là le nombre des points possibles sera réduit à quatre : ce serait la même chose si le point de la station était au contraire placé au-dessous du plan. Ensuite, parmi ces quatre points, s'ils existent tous, il reconnaîtra facilement celui dont la position par rapport aux trois sommets, est la même que celle du point de la station par rapport aux points observés. »

507. « *Les circonstances étant les mêmes que dans la question précédente, avec cette seule différence que l'instrument n'est pas garni de fil à plomb, de manière que les angles avec la verticale ne puissent pas être mesurés, on demande encore que l'ingénieur, sans quitter la station, détermine sur la carte la position du point où il est et qu'il trouve la cote de ce point, c'est-à-dire son élévation au-dessus de la surface de niveau à laquelle tous les points de la carte sont rapportés.*

» Après avoir choisi trois points du terrain qui soient marqués d'une manière précise sur la carte, et tels, que le point de station ne soit pas avec eux dans le même plan, l'ingénieur mesurera les trois angles que forment entre eux les rayons visuels dirigés à ces trois points; et, au moyen de cette seule observation, il sera en état de résoudre la question.

» En effet, si nous nommons A, B, C les trois points observés, et si on les suppose joints par les trois droites AB, BC, CA, l'ingénieur aura les projections horizontales de ces droites tracées sur la carte; de plus, au moyen de cotes des trois points, il aura les différences de hauteur des extrémités de ces droites : il pourra donc avoir la grandeur de chacune d'elles.

» (*Fig.* 106.) Cela posé, si, dans un plan quelconque mené par AB, on conçoit un triangle rectangle BAD construit sur AB comme base, et dont l'angle en B soit le complément de l'angle sous lequel le côté AB a été observé, l'angle en D sera égal à l'angle observé, et la circonférence de cercle décrite par les trois points A, B, D, jouira de la propriété, que, si d'un point quelconque de l'arc ADB on mène deux droites aux points A et B, l'angle qu'elles comprendront entre elles sera égal à l'angle observé. Si donc on conçoit que le plan du cercle tourne autour de AB comme charnière, l'arc ADB engendrera une surface de révolution dont tous les points jouiront de la même propriété; c'est-à-dire que si, d'un point quelconque de cette surface, on mène deux droites aux points A et B, ces droites formeront entre elles un angle égal à l'angle observé. Or il est évident que les points de cette surface de révolution sont les seuls qui jouissent de cette propriété; donc la surface passera par le point de la station. Si l'on raisonne de la même manière pour les deux autres droites BC, CA, on aura deux autres surfaces de révolution, sur chacune desquelles se trouvera le point de la station : ce point sera donc en même temps sur trois surfaces de révolution différentes, déterminées de forme et de position; il sera donc un point de leur intersection commune. Ainsi, en construisant les projections horizontales et verticales des intersections de ces trois surfaces, considérées deux à deux, les points où les projections se couperont elles-mêmes toutes trois, seront les projections du point qui satisfait à la question. »

508. A la vérité, si, pour effectuer ces constructions par la méthode du n° 333, on adopte le plan du triangle ABC pour le plan horizontal de l'épure, et que l'on dirige le plan vertical perpendiculairement à un des côtés, AB par exemple, on n'obtiendra ainsi que la projection du point demandé sur le plan ABC, et sa hauteur au-dessus ou au-dessous de ce plan; mais, comme ce dernier a lui-même une position connue par rapport à la surface de niveau à laquelle tous les points de la carte sont rapportés, il sera bien facile de retrouver ensuite la projection de la station sur le plan même de la carte, et sa hauteur au-dessus de ce plan.

509. Observons aussi que si l'on voulait résoudre ce problème analytiquement, en combinant les équations des trois surfaces de révolution décrites par les arcs ADB, BEC, CFA, on obtiendrait beaucoup de solutions qui seraient étrangères à la question, car l'analyse ne séparerait pas la nappe décrite par l'arc ADB, de celle qui décrirait l'arc A*d*B; mais une seule équation embrasserait ces deux nappes à la fois. Cependant, puisqu'ici les angles compris entre les rayons visuels sont donnés par l'observation, on sent bien qu'il n'est pas permis d'adopter indifféremment l'angle ADB, ou son supplément A*d*B. Par conséquent, on devra, dans les opérations graphiques, négliger entièrement les branches de courbes et les points qui seraient fournis par les nappes *supplémentaires*, engendrées par la révolution des trois arcs A*d*B, B*e*C et A*f*C.

LIVRE VII.

DES SURFACES GAUCHES.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES SURFACES GAUCHES.

510. Toutes les surfaces qui peuvent être engendrées par le mouvement d'une ligne droite sont désignées généralement sous le nom de SURFACES RÉGLÉES, parce qu'on peut évidemment les exécuter sur un corps solide, au moyen d'une *règle*, avantage qui en rend l'usage très-fréquent dans les arts; mais on doit les partager en deux classes bien distinctes, selon que la loi qui dirige le mouvement de la génératrice rectiligne satisfait, ou non, à la condition, que deux positions consécutives de la droite mobile soient situées dans un même plan. Lorsque cette condition est remplie, la surface réglée est DÉVELOPPABLE, et un même plan la touche tout le long de la génératrice, comme nous l'avons prouvé aux n^os 175 et 177. Or, tout ce qui regarde la détermination du plan tangent, la construction des génératrices et le développement d'une telle surface, ayant été suffisamment expliqué dans les livres précédents, et notamment par l'exemple général du n° 465, nous ne reviendrons