sera autorisé à négliger les branches des intersections des surfaces coniques qui existent au-dessous de ce plan, et par là le nombre des points possibles sera réduit à quatre : ce serait la même chose si le point de la station était au contraire placé au-dessous du plan. Ensuite, parmi ces quatre points, s'ils existent tous, il reconnaîtra facilement celui dont la position par rapport aux trois sommets, est la même que celle du point de la station par rapport aux points observés. »

507. « *Les circonstances étant les mêmes que dans la question précédente, avec cette seule différence que l'instrument n'est pas garni de fil à plomb, de manière que les angles avec la verticale ne puissent pas être mesurés, on demande encore que l'ingénieur, sans quitter la station, détermine sur la carte la position du point où il est et qu'il trouve la cote de ce point, c'est-à-dire son élévation au-dessus de la surface de niveau à laquelle tous les points de la carte sont rapportés.*

» Après avoir choisi trois points du terrain qui soient marqués d'une manière précise sur la carte, et tels, que le point de station ne soit pas avec eux dans le même plan, l'ingénieur mesurera les trois angles que forment entre eux les rayons visuels dirigés à ces trois points; et, au moyen de cette seule observation, il sera en état de résoudre la question.

» En effet, si nous nommons A, B, C les trois points observés, et si on les suppose joints par les trois droites AB, BC, CA, l'ingénieur aura les projections horizontales de ces droites tracées sur la carte; de plus, au moyen de cotes des trois points, il aura les différences de hauteur des extrémités de ces droites : il pourra donc avoir la grandeur de chacune d'elles.

» (*Fig.* 106.) Cela posé, si, dans un plan quelconque mené par AB, on conçoit un triangle rectangle BAD construit sur AB comme base, et dont l'angle en B soit le complément de l'angle sous lequel le côté AB a été observé, l'angle en D sera égal à l'angle observé, et la circonférence de cercle décrite par les trois points A, B, D, jouira de la propriété, que, si d'un point quelconque de l'arc ADB on mène deux droites aux points A et B, l'angle qu'elles comprendront entre elles sera égal à l'angle observé. Si donc on conçoit que le plan du cercle tourne autour de AB comme charnière, l'arc ADB engendrera une surface de révolution dont tous les points jouiront de la même propriété; c'est-à-dire que si, d'un point quelconque de cette surface, on mène deux droites aux points A et B, ces droites formeront entre elles un angle égal à l'angle observé. Or il est évident que les points de cette surface de révolution sont les seuls qui jouissent de cette propriété; donc la surface passera par le point de la station. Si l'on raisonne de la même manière pour les deux autres droites BC, CA, on aura deux autres surfaces de révolution, sur chacune desquelles se trouvera le point de la station : ce point sera donc en même temps sur trois surfaces de révolution différentes, déterminées de forme et de position; il sera donc un point de leur intersection commune. Ainsi, en construisant les projections horizontales et verticales des intersections de ces trois surfaces, considérées deux à deux, les points où les projections se couperont elles-mêmes toutes trois, seront les projections du point qui satisfait à la question. »

508. A la vérité, si, pour effectuer ces constructions par la méthode du n° **333**, on adopte le plan du triangle ABC pour le plan horizontal de l'épure, et que l'on dirige le plan vertical perpendiculairement à un des côtés, AB par exemple, on n'obtiendra ainsi que la projection du point demandé sur le plan ABC, et sa hauteur au-dessus ou au-dessous de ce plan; mais, comme ce dernier a lui-même une position connue par rapport à la surface de niveau à laquelle tous les points de la carte sont rapportés, il sera bien facile de retrouver ensuite la projection de la station sur le plan même de la carte, et sa hauteur au-dessus de ce plan.

509. Observons aussi que si l'on voulait résoudre ce problème analytiquement, en combinant les équations des trois surfaces de révolution décrites par les arcs ADB, BEC, CFA, on obtiendrait beaucoup de solutions qui seraient étrangères à la question, car l'analyse ne séparerait pas la nappe décrite par l'arc ADB, de celle qui décrirait l'arc A*d*B; mais une seule équation embrasserait ces deux nappes à la fois. Cependant, puisqu'ici les angles compris entre les rayons visuels sont donnés par l'observation, on sent bien qu'il n'est pas permis d'adopter indifféremment l'angle ADB, ou son supplément A*d*B. Par conséquent, on devra, dans les opérations graphiques, négliger entièrement les branches de courbes et les points qui seraient fournis par les nappes *supplémentaires*, engendrées par la révolution des trois arcs A*d*B, B*e*C et A*f*C.

LIVRE VII.

DES SURFACES GAUCHES.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES SURFACES GAUCHES.

510. Toutes les surfaces qui peuvent être engendrées par le mouvement d'une ligne droite sont désignées généralement sous le nom de SURFACES RÉGLÉES, parce qu'on peut évidemment les exécuter sur un corps solide, au moyen d'une *règle*, avantage qui en rend l'usage très-fréquent dans les arts; mais on doit les partager en deux classes bien distinctes, selon que la loi qui dirige le mouvement de la génératrice rectiligne satisfait, ou non, à la condition, que deux positions consécutives de la droite mobile soient situées dans un même plan. Lorsque cette condition est remplie, la surface réglée est DÉVELOPPABLE, et un même plan la touche tout le long de la génératrice, comme nous l'avons prouvé aux n^os **175** et **177**. Or, tout ce qui regarde la détermination du plan tangent, la construction des génératrices et le développement d'une telle surface, ayant été suffisamment expliqué dans les livres précédents, et notamment par l'exemple général du n° **465**, nous ne reviendrons plus sur ces questions; et ici nous nous occuperons seulement des SURFACES GAUCHES, c'est-à-dire des surfaces *engendrées par une droite qui se meut de telle sorte, que deux positions consécutives,* quelque rapprochées qu'on les suppose, *ne sont pas dans un même plan.*

511. (*Fig.* 107.) Avant d'indiquer diverses manières de réaliser la condition précédente, nous ferons observer qu'il en résultera toujours que *l'élément superficiel* indéfini en longueur, et compris entre les deux génératrices infiniment voisines G et G′, sera lui-même *gauche;* car, pour toutes les courbes A, B, C,..., que l'on tracera sur la surface, les éléments linéaires LL′, MM′, NN′,..., qui sont des droites ayant chacune deux points communs avec G et G′, ne pourront être situés dans un même plan dès que ces deux génératrices n'y sont pas. En outre, comme les tangentes LL′T, MM′U, NN′V,..., qui sont les prolongements de ces éléments linéaires, se trouveront ainsi dans des plans différents, il arrivera nécessairement que *les plans tangents* GLT, GMU, GNV,..., *relatifs aux divers points* L, M, N,..., *d'une même génératrice, seront distincts les uns des autres,* quoiqu'ils renferment tous la génératrice GLMN.

512. De là il résulte encore que, dans une surface gauche, chaque plan tel que GLT, quoique véritablement *tangent* en L, c'est-à-dire renfermant les tangentes à toutes les courbes tracées sur la surface par ce point, devient *sécant* dans tous les autres points qui lui sont communs avec elle; et son intersection se composera d'abord de la génératrice GLM elle-même, puis d'une seconde branche passant par le point L, et qui peut être *rectiligne* ou *curviligne,* suivant la forme de la surface gauche en question.

513. Voyons, maintenant, de quelle manière nous pourrons réaliser la condition (n° **510**) qui caractérise les surfaces gauches. Si nous assujettissons la droite mobile à glisser seulement sur *une* ou même sur *deux courbes directrices* A et B, invariables de forme et de position, le mouvement de cette droite ne sera pas complétement déterminé; puisque, pour chaque point L choisi à volonté sur A, la génératrice rectiligne pourra prendre une infinité de positions, situées toutes sur le cône qui aurait pour base B, et pour sommet le point L. Deux courbes ne suffisent donc pas pour diriger le mouvement d'une droite, à moins qu'on n'impose, *à priori,* la condition que la surface engendrée soit *développable,* comme on l'a vu n° **180**; mais cette condition est précisément celle que nous voulons écarter ici.

(*Fig.* 107.) *Assujettissons donc la droite mobile à glisser constamment sur trois courbes directrices* A, B, C, et nous allons voir que ces conditions suffisent pour régler complétement le mouvement de cette génératrice. En effet, si l'on imagine deux cônes qui auraient pour sommet commun le point L pris à volonté sur A, et pour bases, l'un la directrice B, l'autre la directrice C, on pourra aisément construire les traces de ces surfaces coniques sur un des plans de projection; et en joignant les points de section de ces deux traces avec le sommet commun L, on obtiendra une ou plusieurs droites, mais *en nombre fini,* qui, comme GLMN, s'appuieront évidemment sur les trois courbes A, B, C, puisqu'elles seront les intersections des deux cônes

passant par B et par C. Ces droites seront donc les positions déterminées que doit prendre la génératrice mobile, lorsqu'en glissant sur A, elle arrive au point L; et pour d'autres points L′, L″,..., on construira semblablement les positions de cette génératrice.

Au lieu d'employer deux surfaces coniques, dont il faut chercher les traces, il sera quelquefois plus commode de construire l'intersection du premier cône LBM, avec le cylindre vertical qui projettera la directrice C sur le plan horizontal. Par là, on obtiendra une courbe auxiliaire dont la rencontre avec la projection verticale de C fera connaître le point qu'il faut joindre avec L pour avoir une position de la génératrice.

514. D'ailleurs, la surface ainsi engendrée *sera gauche* en général; car, lorsque la droite mobile passera d'une position GLMN à une autre G′L′M′N′ infiniment voisine, elle pourra être censée glisser sur les trois tangentes LT, MU, NY, qui ont, avec les directrices, les éléments communs LL′, MM′, NN′ : donc, si ces tangentes ne sont pas situées toutes trois dans un seul et même plan, les deux génératrices G et G′ n'y seront pas non plus. Or, pour que ces tangentes se trouvassent dans un même plan, et surtout pour que la même circonstance se reproduisît à chaque système de points (L, M, N), (L′, M′, N′), (L″, M″, N″),..., situés trois à trois en ligne droite, il est clair qu'il faudrait faire un choix tout particulier dans la forme et la position des directrices A, B, C; par conséquent, en général, *la surface décrite par une droite mobile qui s'appuie constamment sur trois courbes fixes est gauche.*

Mais une telle surface peut offrir *une ligne singulière,* le long de laquelle il existera un élément *plan,* indéfini en longueur; c'est ce qui arriverait dans le cas où, pour un certain point L, les deux cônes dont nous avons parlé au numéro précédent auraient leurs traces tangentes l'une à l'autre. Alors, la génératrice menée de L à ce point de contact pourrait, sans quitter le point L, glisser sur la tangente commune aux deux traces, et elle décrirait ainsi un élément particulier qui serait plan. Cela revient à supposer que les deux tangentes MU et NV sont dans un même plan; et, à plus forte raison, en serait-il de même, si les trois tangentes en L, M, N, se trouvaient dans un plan unique.

515. CYLINDROÏDE. (*Fig.* 108.) On désigne ainsi une surface où *la droite mobile* G *doit glisser constamment sur deux courbes fixes* A *et* B, *en demeurant toujours parallèle à un plan donné* P, que l'on nomme *le plan directeur.* Pour construire ici les positions de la génératrice, il suffira de couper les courbes A et B (n° **235**) par divers plans parallèles à P; et en joignant par une droite les deux points de section de chaque plan, on aura des lignes GLM, G′L′M′,..., qui satisferont évidemment aux conditions imposées à la génératrice. La surface, lieu de toutes ces droites, sera encore *gauche* en général, parce que les tangentes LL′T, MM′U, sur lesquelles s'appuie la droite G lorsqu'elle passe à la position infiniment voisine G′, ne se trouveront pas ordinairement dans un même plan.

Au reste, ce genre de surfaces gauches rentre dans le précédent, lorsqu'on imagine que la troisième directrice C est située à l'infini *dans le plan* P.

516. Dans toutes les surfaces réglées, on peut remplacer les courbes directrices par des *surfaces directrices* auxquelles la droite mobile devra être tangente. Par exemple, si l'on assigne *une courbe* A et *une surface* S pour diriger la génératrice, *avec un plan* P auquel cette droite mobile devra rester parallèle, on mènera par chaque point L pris sur A, un plan parallèle à P, lequel coupera la surface S suivant une courbe à laquelle on conduira des tangentes partant de L; ce seront bien là des positions de la génératrice demandée, et la surface réglée ainsi produite sera en général gauche. D'ailleurs, elle *touchera* S tout le long de la courbe formée par les points de contact α, β, γ,..., des tangentes dont nous venons de parler; car, pour la surface gauche comme pour la surface S, le plan tangent renfermera la génératrice rectiligne et la tangente de la courbe $\alpha\beta\gamma$ qui est commune aux deux surfaces.

Si l'on donnait deux surfaces S et S' avec un plan directeur P, on couperait ces surfaces par divers plans parallèles à P, et l'on mènerait une tangente commune aux deux sections produites par chacun de ces plans sécants. Ce serait encore une des surfaces nommées *cylindroïdes*.

517. Lorsque la surface réglée n'admet point de *plan directeur*, on peut encore remplacer une ou plusieurs des trois courbes directrices A, B, C, par des surfaces auxquelles la génératrice devra être tangente. Supposons, en effet, que l'on assigne, pour diriger le mouvement de cette droite, les courbes A et B avec une surface S; pour chaque point L pris sur A, il faudra construire deux cônes ayant leurs sommets communs en L, et dont l'un aurait pour base la courbe B, tandis que l'autre serait circonscrit à la surface S (nº **348**) : les intersections de ces deux cônes, qui seront nécessairement des droites, fourniront les positions de la génératrice lorsqu'elle passe par le point L. Quand la surface S se trouvera développable, il sera plus court de lui mener un plan tangent qui coupe les deux courbes A et B en des points que l'on réunira par une droite; ce sera bien là une position de la génératrice.

Si l'on donne une seule courbe A avec deux surfaces directrices S et S', il faudra combiner ensemble deux cônes circonscrits l'un à S, l'autre à S', et dont le sommet commun serait en un point L de la ligne A.

518. Lorsqu'on assignera *trois surfaces* S, S', S'', auxquelles la droite mobile devra rester constamment tangente, la construction des diverses positions de cette génératrice sera beaucoup plus laborieuse; mais on y parviendra en ramenant la question à l'un des cas précédents. En effet, si nous connaissions une droite G qui touchât la surface S en un certain point α, S' en α', et S'' en α''; puis, que nous fissions glisser cette ligne G$\alpha\alpha'\alpha''$ sur les deux surfaces S et S', en l'assujettissant d'ailleurs à demeurer parallèle à un plan directeur P, nous obtiendrions, par la méthode du nº **516**, une surface auxiliaire Σ, qui couperait S'' suivant une certaine courbe $\alpha''\beta''\gamma''$ passant par le point α'', et à laquelle la droite G serait nécessairement tangente en ce point : car G se trouve évidemment dans le plan tangent de S'', et dans celui qui touche la surface gauche Σ au point α''. Par conséquent, si l'on commence par construire la surface auxiliaire Σ qui a pour directrices S, S'', et le plan P; puis, si l'on détermine son intersection $\alpha''\beta''\gamma''$ avec la surface S'', il n'y aura plus qu'à mener à la courbe $\alpha''\beta''\gamma''$ une tangente qui soit parallèle au plan P, et cette tangente sera la position d'une génératrice G de la surface demandée qui a pour directrice S, S', S''. Pour obtenir d'autres positions de cette génératrice, on fera varier la direction du plan P.

519. On peut encore diriger le mouvement de la droite qui engendre une surface réglée, en assignant *deux courbes directrices* A et B, avec la condition que *la génératrice coupe l'une d'elles sous un angle constant* et donné; ou bien, que *la position de cette génératrice comprise entre* A *et* B *conserve une longueur fixe*. On peut aussi faire glisser la droite mobile *le long d'une seule courbe* A *tracée sur une surface fixe* S, *à laquelle la génératrice devrait rester normale*, etc., etc. Mais toutes ces variétés de surfaces réglées, pour lesquelles il sera facile d'imaginer un mode de construction approprié aux conditions que chaque problème imposera, n'offrent pas assez d'intérêt pour que nous les discutions en détail; et, d'ailleurs, elles ne forment pas, au fond, des genres vraiment distincts, puisqu'on peut toujours les concevoir ramenées à celles du nº **515**, en adoptant pour directrices de la droite mobile trois sections faites à volonté dans la surface.

520. Pour compléter ces notions générales, nous ajouterons que, parmi les CYLINDROÏDES, on donne le nom particulier de CONOÏDES aux surfaces gauches qui admettent un plan directeur P avec deux directrices dont *une est rectiligne :* l'autre directrice peut être une courbe ou une surface. Le conoïde serait dit *droit*, si la directrice rectiligne était perpendiculaire au plan P (*voyez* nº **596**).

Lorsque les deux directrices sont l'une et l'autre *des droites*, le conoïde prend le nom de *paraboloïde hyperbolique*, ou de *conoïde du second degré*, parce que c'est le seul dont l'équation ne s'élève pas au-dessus de cet ordre.

Enfin, lorsqu'une surface réglée, qui n'admet pas de plan directeur, a pour directrices *trois droites* quelconques, elle reçoit le nom d'*hyperboloïde à une nappe :* cet hyperboloïde et le paraboloïde dont nous venons de parler se désignent encore simultanément sous le nom de *surfaces gauches du second degré*, parce que l'analyse montre que ce sont les seules surfaces de cette nature dont l'équation ne s'élève pas au delà du second ordre. Nous allons commencer par considérer ces deux genres particuliers, qui offrent des propriétés fort remarquables, et nécessaires à connaître pour étudier les autres surfaces gauches.

CHAPITRE II.

DE L'HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

521. (*Fig.* 109.) Nous appellerons ainsi la surface particulière engendrée par *une droite mobile* A, *qui s'appuie constamment sur trois droites fixes* B, B', B'', *non parallèles à un plan unique*, et dont *deux quelconques ne se trouvent pas dans un même*