516. Dans toutes les surfaces réglées, on peut remplacer les courbes directrices par des *surfaces directrices* auxquelles la droite mobile devra être tangente. Par exemple, si l'on assigne *une courbe* A et *une surface* S pour diriger la génératrice, *avec un plan* P auquel cette droite mobile devra rester parallèle, on mènera par chaque point L pris sur A, un plan parallèle à P, lequel coupera la surface S suivant une courbe à laquelle on conduira des tangentes partant de L; ce seront bien là des positions de la génératrice demandée, et la surface réglée ainsi produite sera en général gauche. D'ailleurs, elle *touchera* S tout le long de la courbe formée par les points de contact α, β, γ,..., des tangentes dont nous venons de parler; car, pour la surface gauche comme pour la surface S, le plan tangent renfermera la génératrice rectiligne et la tangente de la courbe $\alpha\beta\gamma$ qui est commune aux deux surfaces.

Si l'on donnait deux surfaces S et S′ avec un plan directeur P, on couperait ces surfaces par divers plans parallèles à P, et l'on mènerait une tangente commune aux deux sections produites par chacun de ces plans sécants. Ce serait encore une des surfaces nommées *cylindroïdes*.

517. Lorsque la surface réglée n'admet point de *plan directeur*, on peut encore remplacer une ou plusieurs des trois courbes directrices A, B, C, par des surfaces auxquelles la génératrice devra être tangente. Supposons, en effet, que l'on assigne, pour diriger le mouvement de cette droite, les courbes A et B avec une surface S; pour chaque point L pris sur A, il faudra construire deux cônes ayant leurs sommets communs en L, et dont l'un aurait pour base la courbe B, tandis que l'autre serait circonscrit à la surface S (n° **348**) : les intersections de ces deux cônes, qui seront nécessairement des droites, fourniront les positions de la génératrice lorsqu'elle passe par le point L. Quand la surface S se trouvera développable, il sera plus court de lui mener un plan tangent qui coupe les deux courbes A et B en des points que l'on réunira par une droite; ce sera bien là une position de la génératrice.

Si l'on donne une seule courbe A avec deux surfaces directrices S et S′, il faudra combiner ensemble deux cônes circonscrits l'un à S, l'autre à S′, et dont le sommet commun serait en un point L de la ligne A.

518. Lorsqu'on assignera *trois surfaces* S, S′, S″, auxquelles la droite mobile devra rester constamment tangente, la construction des diverses positions de cette génératrice sera beaucoup plus laborieuse; mais on y parviendra en ramenant la question à l'un des cas précédents. En effet, si nous connaissions une droite G qui touchât la surface S en un certain point α, S′ en α', et S″ en α''; puis, que nous fissions glisser cette ligne $G\alpha\alpha'\alpha''$ sur les deux surfaces S et S′, en l'assujettissant d'ailleurs à demeurer parallèle à un plan directeur P, nous obtiendrions, par la méthode du n° **516**, une surface auxiliaire Σ, qui couperait S″ suivant une certaine courbe $\alpha''\beta''\gamma''$ passant par le point α'', et à laquelle la droite G serait nécessairement tangente en ce point : car G se trouve évidemment dans le plan tangent de S″, et dans celui qui touche la surface gauche Σ au point α''. Par conséquent, si l'on commence par construire la surface auxiliaire Σ qui a pour directrices S, S″, et le plan P; puis, si l'on détermine son intersection $\alpha''\beta''\gamma''$ avec la surface S″, il n'y aura plus qu'à mener à la courbe $\alpha''\beta''\gamma''$ une tangente qui soit parallèle au plan P, et cette tangente sera la position d'une génératrice G de la surface demandée qui a pour directrice S, S′, S″. Pour obtenir d'autres positions de cette génératrice, on fera varier la direction du plan P.

519. On peut encore diriger le mouvement de la droite qui engendre une surface réglée, en assignant *deux courbes directrices* A et B, avec la condition que *la génératrice coupe l'une d'elles sous un angle constant* et donné; ou bien, que *la position de cette génératrice comprise entre* A *et* B *conserve une longueur fixe*. On peut aussi faire glisser la droite mobile *le long d'une seule courbe* A *tracée sur une surface fixe* S, *à laquelle la génératrice devrait rester normale*, etc., etc. Mais toutes ces variétés de surfaces réglées, pour lesquelles il sera facile d'imaginer un mode de construction approprié aux conditions que chaque problème imposera, n'offrent pas assez d'intérêt pour que nous les discutions en détail; et, d'ailleurs, elles ne forment pas, au fond, des genres vraiment distincts, puisqu'on peut toujours les concevoir ramenées à celles du n° **513**, en adoptant pour directrices de la droite mobile trois sections faites à volonté dans la surface.

520. Pour compléter ces notions générales, nous ajouterons que, parmi les CYLINDROÏDES, on donne le nom particulier de CONOÏDES aux surfaces gauches qui admettent un plan directeur P avec deux directrices dont *une est rectiligne :* l'autre directrice peut être une courbe ou une surface. Le conoïde serait dit *droit*, si la directrice rectiligne était perpendiculaire au plan P (*voyez* n° **596**).

Lorsque les deux directrices sont l'une et l'autre *des droites*, le conoïde prend le nom de *paraboloïde hyperbolique*, ou de *conoïde du second degré*, parce que c'est le seul dont l'équation ne s'élève pas au-dessus de cet ordre.

Enfin, lorsqu'une surface réglée, qui n'admet pas de plan directeur, a pour directrices *trois droites* quelconques, elle reçoit le nom d'*hyperboloïde à une nappe :* cet hyperboloïde et le paraboloïde dont nous venons de parler se désignent encore simultanément sous le nom de *surfaces gauches du second degré*, parce que l'analyse montre que ce sont les seules surfaces de cette nature dont l'équation ne s'élève pas au delà du second ordre. Nous allons commencer par considérer ces deux genres particuliers, qui offrent des propriétés fort remarquables, et nécessaires à connaître pour étudier les autres surfaces gauches.

CHAPITRE II.

DE L'HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

521. (*Fig.* 109.) Nous appellerons ainsi la surface particulière engendrée par *une droite mobile* A, *qui s'appuie constamment sur trois droites fixes* B, B′, B″, *non parallèles à un plan unique*, et dont *deux quelconques ne se trouvent pas dans un même* *plan;* parce qu'il sera démontré plus loin (nº **535**) que cette surface est identique avec celle que nous avons déjà désignée sous ce nom au nº **83**. La construction des génératrices s'effectuera par le procédé général du nº **515**, qui deviendra ici très-simple, puisque les surfaces coniques auxiliaires se réduiront à des plans. Ainsi, après avoir pris un point arbitraire L sur la directrice B, on conduira par ce point deux plans dont l'un passe par B′, et l'autre par B″; puis, en cherchant l'intersection de ces deux plans, on obtiendra une droite ALMN, qui s'appuiera évidemment sur les trois directrices assignées. On arriverait au même résultat, en construisant l'intersection de la directrice B″ avec le seul plan mené par L et la droite B′, et en joignant ce point de section au point L. Ce procédé, appliqué successivement à d'autres points L′, L″,..., de la droite B, fournira les diverses génératrices A, A′, A″, A‴,..., de l'hyperboloïde en question; et comme chacune ne peut évidemment occuper qu'une position unique, lorsqu'elle passe par un point donné L ou L′, il s'ensuit que le mouvement de la droite mobile est *complétement déterminé* par la condition de s'appuyer sur les trois directrices assignées.

522. Cette surface est nécessairement *gauche;* car deux génératrices quelconques A et A′ ne pourraient se trouver dans un même plan, qu'autant que les droites B, B′, B″, dont chacune a deux points communs avec A et A′, seraient elles-mêmes situées dans ce plan unique; ce qui est contraire aux conditions formellement imposées dans la définition du nº **521**. D'ailleurs, ce raisonnement n'exigeant pas que les deux droites A et A′ soient ici infiniment voisines, comme on le suppose pour une surface gauche générale (nº **510**), il en résulte que, dans l'hyperboloïde, *deux génératrices quelconques ne sont jamais dans un même plan.*

523. (*Fig.* 110.) Si, parmi les trois directrices B, B′, B″, que l'on suppose n'être point parallèles à un plan unique, il y en avait *deux* qui fussent *dans un même plan* B′CB″, la droite mobile A ne pourrait satisfaire aux conditions imposées que des deux manières suivantes : 1º en passant constamment par le point de section C et en glissant sur B, ce qui lui ferait décrire le plan CDB; 2º en tournant dans le plan B′CB″, autour du point D où il est rencontré par la droite B. Donc, alors, la surface décrite serait le système de *deux plans* qui se couperaient. Mais cette variété de l'hyperboloïde, qui est analogue au cas d'une hyperbole réduite à ses asymptotes, ne présentant aucune recherche nouvelle, nous continuerons à exclure dorénavant l'hypothèse toute particulière que deux des directrices soient dans un même plan.

524. (*Fig.* 109.) L'hyperboloïde à une nappe jouit d'une propriété bien remarquable, et fort importante pour la détermination des plans tangents aux surfaces gauches générales : c'est qu'il admet un second mode de génération par la ligne droite, dans lequel les premières génératrices deviennent directrices, et réciproquement. C'est-à-dire que, *si l'on fait glisser une droite mobile sur trois quelconques des droites* A, A′, A″, A‴,... que nous venons de construire, *cette nouvelle génératrice*, qui coïncidera évidemment dans trois de ses positions avec B, B′, B″, *décrira une surface* IDENTIQUE *avec le premier hyperboloïde*, tant pour la forme que pour la

position. Mais avant de démontrer cette belle propriété, nous rappellerons deux théorèmes connus de la *théorie des transversales.*

525. Lemme Iᵉʳ. (*Fig.* 111.) Lorsque, dans un triangle ABC, on mène une transversale quelconque PQR, qui, en coupant leurs trois côtés ou leurs prolongements, forme six segments, *le produit de trois segments non contigus est égal au produit des trois autres segments;* c'est-à-dire que l'on a

$$(x)\qquad AP.CR.BQ = AQ.BR.CP.$$

En effet, menons la droite BH parallèle à PQR, et nous aurons évidemment les proportions

$$AQ : QB :: AP : PH = \frac{AP.QB}{AQ},$$

$$CR : BR :: CP : PH = \frac{CP.BR}{CR};$$

puis, en égalant les deux valeurs de PH, on obtiendra la formule (x).

526. Lemme II. (*Fig.* 112 et 113.) Si dans un quadrilatère *gauche* ABCD on trace deux droites MN et PQ, qui, en s'appuyant chacune sur deux côtés opposés, ou sur leurs prolongements, se coupent elles-mêmes en un certain point O, *le produit de quatre segments non contigus sera toujours égal au produit des quatre autres segments;* c'est-à-dire que l'on aura

$$(y)\qquad AP.BN.CQ.DM = AM.DQ.CN.BP.$$

D'abord, observons que si les deux transversales MN et PQ se coupent effectivement, elles doivent être dans un même plan, lequel contiendra les droites PN et MP, qui, par conséquent, iront se couper en un certain point R; mais comme ces droites PN et MQ se trouvent, l'une dans le plan du triangle ABC, l'autre dans le plan du triangle ADC, et que ces plans se coupent suivant la diagonale AC, il faudra que le point de rencontre R des lignes PN et MQ soit placé précisément sur cette diagonale. D'où il suit que, pour obtenir dans un quadrilatère gauche deux transversales opposées qui se coupent réellement, on peut prendre à volonté l'une d'entre elles MN, et choisir arbitrairement le point P de la seconde; mais ensuite on devra tracer la droite PNR, qui ira couper la diagonale AC en un point R, puis tirer RM, qui déterminera la position du point Q, qu'il faudra joindre avec P.

Cela posé, les triangles ABC et ADC, coupés par les transversales PNR et MQR, donnent, d'après le lemme précédent,

$$AP.BN.CR = AR.CN.BP,$$
$$CQ.DM.AR = CR.DQ.AM;$$

d'où, en multipliant ces égalités membre à membre, et supprimant les facteurs communs, on déduit la relation annoncée,

$$(y)\qquad AP.BN.CQ.DM = AM.DQ.CN.BP.$$

laquelle peut s'écrire ainsi :

$$(z)\qquad \frac{AP}{PB}\cdot\frac{CQ}{QD}=\frac{AM}{MD}\cdot\frac{CN}{NB}.$$

527. Réciproquement, si deux droites PQ et MN coupent les côtés opposés d'un quadrilatère gauche ABCD, de telle sorte que la formule (y) soit vérifiée, ces deux transversales sont dans un même plan. En effet, si cela n'était pas, on pourrait mener par le point P une droite PQ', qui couperait MN, et alors on aurait

$$AP.BN.CQ'.DM = AM.DQ'.CN.BP,$$

équation incompatible avec la formule (y), que l'on suppose vérifiée, puisque si CQ' est plus grand que CQ, nécessairement DQ' sera moindre que DQ.

528. (*Fig.* 109.) Maintenant, revenons au double mode de génération que nous avons annoncé au n° **524** pour l'hyperboloïde à une nappe, et prouvons que *toute droite* B'''DD'D''', *qui s'appuiera sur trois génératrices quelconques* A, A', A'' *du premier mode, coupera nécessairement toutes les droites de ce système;* par exemple, qu'elle rencontrera la génératrice A'' en un certain point D''. Il s'ensuivra évidemment que tous les points de cette ligne B''' se trouveront sur le premier hyperboloïde déjà construit avec les trois directrices fixes B, B', B'', et qu'ainsi une de ces dernières peut décrire encore cette même surface, en glissant sur trois droites du système A.

Or, puisque, d'après le premier mode de génération, les trois droites A, A', A'' coupent B, B', B'', le quadrilatère LNN'''L''' donnera, en vertu de la formule (z),

$$(1)\qquad \frac{LL'}{L'L'''}\cdot\frac{N'''N'}{N'N}=\frac{LM}{MN}\cdot\frac{N'''M'''}{M'''L'''};$$

mais, puisque la droite A'' rencontre les trois droites B, B', B'', et que B''' coupe aussi les droites A, A', A''', le même quadrilatère fournira encore, d'après la formule (z), les deux relations suivantes :

$$(2)\qquad \frac{LL''}{L''L'''}\cdot\frac{N'''N''}{N''N}=\frac{LM}{MN}\cdot\frac{N'''M'''}{M'''L'''},$$

$$(3)\qquad \frac{LD}{DN}\cdot\frac{N''D'''}{D'''L'''}=\frac{LL'}{L'L'''}\cdot\frac{N'''N'}{N'N},$$

alors, les seconds membres des équations (2) et (3) étant égaux en vertu de l'équation (1), nous en conclurons cette nouvelle égalité

$$(4)\qquad \frac{LD}{DN}\cdot\frac{N'''D''}{D'''L'''}=\frac{LL''}{L''L'''}\cdot\frac{N'''N''}{N''N},$$

laquelle prouve (n° **527**) que les deux droites A'' et B''' se coupent effectivement en un point D''.

529. Remarquons ici que le second membre commun des équations (1) et (2) est une quantité constante k qui demeure invariable, dès que la position des cinq droites

B, B', B'', A, A''' est fixée; d'où il suit que, pour une nouvelle droite quelconque A', qui s'appuiera sur les trois premières, on aura toujours

$$(5)\qquad \frac{LL'}{L'L'''}=k\frac{NN'}{N'N'''}.$$

Or, si les trois droites B, B', B'' se trouvaient *parallèles à un même plan*, on sait qu'elles diviseraient A et A''' en parties proportionnelles, de sorte qu'on aurait $k=1$: par conséquent, l'équation (5), qui devient alors

$$\frac{LL'}{L'L'''}=\frac{NN'}{N'N'''},$$

prouve que, dans ce cas, les droites A, A', A''' seraient nécessairement aussi *parallèles à un plan unique*, mais différent du premier. Nous retrouverons plus loin cette conséquence, dans le paraboloïde hyperbolique (n° **553**). — Sbre - 21 - 89.

530. *Du plan tangent.* (*Fig.* 109.) Puisque, par chaque point de l'hyperboloïde, il passe deux droites (n° **528**), l'une du système A, l'autre du système B, et que ces lignes sont elles-mêmes leurs propres tangentes, elles devront se trouver toutes deux dans le plan tangent relatif au point où elles se coupent; et, par conséquent, elles suffiront pour déterminer ce plan et pour trouver ses traces. Ainsi, lorsqu'on définira un hyperboloïde par les trois directrices B, B', B'', et qu'on assignera le point de contact D sur une génératrice donnée A, il faudra construire (n° **521**) au moins deux autres positions A', A'' de cette génératrice; puis en adoptant ces lignes A, A', A'' pour directrices, on construira une droite DD'D'' qui s'appuie sur ces dernières, et qui parte du point D. Alors cette droite DD'D'' sera située sur l'hyperboloïde, et en conduisant un plan par les deux lignes AD et DD'D'', ce sera le plan tangent relatif au point D. Cette solution est trop simple pour que nous croyions nécessaire de la construire dans une épure spéciale.

531. Lorsque les données d'un hyperboloïde seront assignées sur deux plans de projection, et qu'on citera seulement *la projection horizontale* D, par exemple, d'un point de cette surface pour lequel on demandera le plan tangent, il ne sera plus possible de mener immédiatement la génératrice AD, avant d'avoir trouvé la projection verticale du point D. Pour cela il faudra, en général, conduire par ce point un plan vertical quelconque; chercher la section qu'il produira dans la surface, en construisant les points de rencontre de ce plan sécant avec diverses génératrices qui s'appuieraient sur les droites données B, B', B'', et enfin projeter, sur cette section, le point D assigné sur le plan horizontal. Alors, connaissant les deux projections du point de contact, on pourra aussi construire les projections de la génératrice A qui passe par ce point, et l'on rentrera dans le cas du numéro précédent.

532. Du CENTRE *de l'hyperboloïde.* (*Fig.* 114.) Cette surface est douée d'un centre, c'est-à-dire qu'il existe *un point tel, que toutes les cordes* de la surface *qui passent par ce point s'y trouvent divisées chacune en deux parties égales.* Pour démontrer cette proposition, représentons par B, B', B'', trois directrices primitives qui satisfassent aux conditions énoncées dans la définition du n° **521** : nous pourrons