

alors, par les droites  $B'$  et  $B''$ , conduire deux plans distincts  $B'DC$  et  $B''CD$ , parallèles l'un et l'autre à la directrice  $B$ , et ces deux plans se couperont suivant une droite  $ACD$  évidemment parallèle à  $B$ ; de sorte que cette ligne  $ACD$  sera une génératrice de l'hyperboloïde proposé, puisqu'elle s'appuiera sur  $B'$  et sur  $B''$ , et qu'elle ira rencontrer  $B$  à une distance infinie. De même, en conduisant par  $B''$  et par  $B$  deux plans  $B''GH$  et  $BHG$  parallèles à  $B'$ , ils se couperont suivant une droite  $A'GH$ , qui sera encore une génératrice de l'hyperboloïde; et l'on en trouvera une troisième  $A''KE$  au moyen de deux plans  $BHF$  et  $B'DI$ , parallèles à  $B''$ , et menés par  $B$  et  $B'$ . De là nous concluons d'abord que *chaque génératrice d'un système a sa parallèle dans le système opposé*; car ce que nous avons dit ici de  $B$  s'appliquera également à toute autre génératrice  $B''$ ,  $B'''$ , ..., laquelle peut être prise pour directrice au lieu de  $B$  (n° 528). Ensuite les six plans que nous avons construits ci-dessus forment évidemment un parallélépipède qui a, pour arêtes opposées, les six droites  $B$ ,  $B'$ ,  $B''$ , et  $A$ ,  $A'$ ,  $A''$ ; et je dis que le centre  $O$  de ce parallélépipède est aussi le centre de l'hyperboloïde.

Pour le démontrer, je mène par un point  $M$ , pris arbitrairement sur la directrice  $B$ , une droite  $M'MM''$  qui coupe les deux autres directrices en  $M'$  et  $M''$ , et qui sera ainsi une génératrice du système  $A$ ; puis, je la compare avec une génératrice du système  $B$ , qui, s'appuyant sur  $A$ ,  $A'$ ,  $A''$ , serait parallèle à  $M'MM''$ . Pour obtenir cette nouvelle génératrice, je prends les distances

$$DN = HM, \quad GN' = EM', \quad EN'' = GM'',$$

et les trois points  $N$ ,  $N'$ ,  $N''$ , ainsi déterminés, se trouveront en ligne droite. En effet, en tirant les lignes  $OM$  et  $ON$ , les triangles  $OMH$  et  $OND$ , qui sont visiblement égaux, prouvent que les côtés  $OM$  et  $ON$  sont égaux et en ligne droite; la même conséquence aura lieu pour les lignes  $OM'$  et  $ON'$ ,  $OM''$  et  $ON''$ , en vertu de triangles égaux que l'on aperçoit aisément. Ensuite, les triangles  $MOM'$  et  $NON'$ , égaux par ce qui précède, entraîneront le parallélisme des côtés  $MM'$  et  $NN'$ ; et enfin,  $MM''$  sera parallèle à  $NN''$  en vertu des triangles égaux  $MOM''$  et  $NON''$ . Par conséquent, les deux portions  $N'N$  et  $NN''$  ne formeront qu'une seule ligne droite, qui sera une génératrice du système  $B$ , parallèle à la génératrice  $M'MM''$  choisie à volonté dans le système  $A$ ; d'ailleurs, on voit par là que *deux génératrices parallèles se trouvent toujours dans un plan passant par le point  $O$ , et sont également éloignées de ce point.*

Cela posé, si, par un point arbitraire  $P$  de la droite  $M'MM''$ , on tire une corde  $POQ$  qui passe par le point  $O$ , elle ira nécessairement percer l'hyperboloïde en un point  $Q$  situé sur  $N'N''$ , et, d'après les relations ci-dessus établies, on aura évidemment  $OP = OQ$ ; donc, puisque cette conséquence est vraie pour tout point  $P$  pris sur l'hyperboloïde, il demeure prouvé que le point  $O$  est bien le centre de cette surface (\*).

(\*) C'est M. J. Binet qui a fait connaître (*Journal de l'École Polytechnique*, 16<sup>e</sup> cahier), parmi d'autres parallélépipèdes concentriques avec l'hyperboloïde, ceux qui sont ainsi formés par trois génératrices quelconques d'un système, jointes à leurs parallèles dans le système opposé. Ce savant géomètre en a déduit

533. Observons que, quand il s'agira seulement de *construire ce centre*, on l'obtiendra sans tracer le parallélépipède dont nous venons de parler, en cherchant l'intersection des trois plans menés par la droite donnée  $B$  et sa parallèle  $A$ , par  $B'$  et sa parallèle  $A'$ , par  $B''$  et sa parallèle  $A''$ ; car chacun de ces plans diagonaux passe évidemment par le centre du parallélépipède, qui est celui de l'hyperboloïde. D'ailleurs, on peut dire que ce sont là *trois plans asymptotiques* de la surface, comme nous l'expliquerons au n° 546.

534. En résumant les propositions précédentes, on voit que dans l'hyperboloïde à une nappe, 1° il existe deux systèmes de génératrices rectilignes

$$A, A', A'' A''', \dots, \quad \text{et} \quad B, B', B'', B''', \dots,$$

dont chacune coupe toutes les droites du système opposé (n° 528); cependant, chaque génératrice  $A'$  a sa parallèle dans le système  $B$  (n° 532), et réciproquement; de sorte que pour ces droites comparées deux à deux, la rencontre n'a plus lieu qu'à une distance infinie.

2° Deux génératrices du système  $A$  ne se trouvent jamais dans un plan unique (n° 522); il en est de même des génératrices du système  $B$ , puisque ces dernières s'appuient aussi (n° 528) sur trois droites du système  $A$ , lesquelles sont dans des plans différents.

3° Trois droites quelconques du système  $A$  ne sont jamais *parallèles à un même plan*; car, si cela avait lieu, il s'ensuivrait par le n° 529 que les directrices  $B$ ,  $B'$ ,  $B''$ , sur lesquelles s'appuient toutes les génératrices du premier mode, seraient aussi parallèles toutes trois à un même plan, ce qui est contraire à la définition du n° 521. Réciproquement trois quelconques des génératrices du système  $B$  ne se trouvent jamais parallèles à un même plan; car cela entraînerait aussi (n° 529) une restriction semblable pour les droites du système  $A$ , sur lesquelles s'appuient ces génératrices du second mode.

4° Le centre de l'hyperboloïde est placé au centre du parallélépipède construit avec trois droites quelconques du système  $A$ , jointes aux trois génératrices du système  $B$ , qui se trouvent respectivement parallèles aux trois premières (n° 532);

beaucoup de conséquences intéressantes; mais ici nous ferons seulement observer: 1° que chacun de ces parallélépipèdes est *circonscrit* à l'hyperboloïde, puisque chaque face renferme deux génératrices, et devient tangente dans le point où se coupent ces droites; 2° qu'ils offrent une construction graphique fort élégante, pour trouver le centre de la surface gauche définie par trois directrices rectilignes; 3° qu'ils ne sont pas moins utiles sous le rapport analytique, puisqu'en adoptant ce centre pour origine des axes coordonnés, choisis parallèles aux trois directrices assignées, l'équation de la surface se présentera sous la forme très-simple

$$\frac{xy}{a^2} + \frac{yz}{b^2} + \frac{xz}{c^2} + 1 = 0.$$

En effet, les axes actuels étant évidemment trois arêtes du cône asymptotique, il doit arriver que chaque plan coordonné coupe la surface suivant une hyperbole qui ait pour asymptotes les deux axes contenus dans ce plan.

ou plus simplement, il est donné par l'intersection de trois plans asymptotiques (n° 555).

5° Une droite quelconque D ne saurait percer l'hyperboloïde en plus de deux points; car, si elle avait trois points communs avec cette surface, la droite D s'appuierait sur trois génératrices de l'un ou de l'autre système, de sorte qu'elle coïnciderait tout entière avec la surface. D'ailleurs, pour obtenir ces points d'intersection, il faudra construire, comme au n° 531, la section faite dans l'hyperboloïde par un plan vertical ou horizontal, conduit suivant la droite D.

555. *La surface gauche engendrée par une droite qui glisse sur trois autres droites fixes non parallèles à un même plan, est IDENTIQUE avec l'hyperboloïde à une nappe que nous avons décrit au n° 85.* En effet, cette surface gauche est d'abord du second degré, puisque, sans effectuer les calculs, il est aisé de voir que les conditions par lesquelles on exprimerait que la droite mobile a un point de commun avec chaque directrice, ne pourraient conduire qu'à une équation du second degré. Ensuite, cette surface gauche est douée d'un centre (n° 552); donc, comme elle ne saurait être évidemment ni un cône, ni un cylindre, qui sont développables, il faut qu'elle soit un ellipsoïde ou l'un des deux hyperboloïdes. Or l'ellipsoïde est une surface limitée en tous sens (n° 81) qui ne saurait admettre pour génératrice une droite indéfinie; d'un autre côté, l'hyperboloïde du n° 85 présente deux nappes séparées par un intervalle imaginaire, de sorte qu'une droite indéfinie et continue ne saurait évidemment s'appliquer tout entière sur cette surface; par conséquent, on est ramené à la proposition énoncée au commencement de cet article.

556. (Fig. 119.) Pour manifester plus clairement l'identité dont il s'agit, et qui peut paraître assez étrange au premier coup d'œil, nous allons démontrer synthétiquement que l'hyperboloïde décrit au n° 85 admet en effet deux systèmes de génératrices rectilignes. D'après la définition de cette surface, toutes les sections perpendiculaires à son axe imaginaire sont des ellipses semblables: si donc nous la coupons par trois plans horizontaux  $e'a'$ ,  $V'X'$ ,  $V''X''$ , dont le premier passe par le centre et dont les deux autres soient à égales distances, au-dessous et au-dessus de ce point, nous obtiendrons l'ellipse de gorge ( $abef$ ,  $a'e'$ ) et deux autres ellipses égales, projetées horizontalement sur  $VUXY$  qui a ses axes parallèles et proportionnels à ceux de  $abef$ . Cela posé, en menant à cette dernière une tangente quelconque  $ADB$ , on sait que les parties  $AD$  et  $DB$  seront égales (\*); si donc, nous joignons le point  $(D, D')$  avec  $(A, A')$  et  $(B, B')$ , nous obtiendrons deux droites  $(AD, A'D')$  et  $(DB, D'B')$  qui seront nécessairement le prolongement l'une de l'autre, puisque ce sont les hypoténuses de deux triangles rectangles évidemment égaux, projetés sur  $D'I'A'$  et  $D'I'B'$ . D'où il résulte que la droite totale  $(ADB, A'D'B')$  a trois points de communs avec l'hyperboloïde, et, conséquemment, elle est tout entière sur cette surface, attendu que celle-ci est du second degré.

(\*) Cette proposition se démontre aisément, par la définition purement géométrique des diamètres conjugués et des courbes semblables.

Maintenant, projetons le point A sur l'ellipse supérieure en  $a'$ , et le point B sur l'ellipse inférieure en  $b'$ , puis, joignons ces deux points dans l'espace avec  $(D, D')$ ; nous obtiendrons encore deux droites  $(BD, B'D')$ ,  $(BA, D'a')$ , dont on prouvera de même la coïncidence; de sorte que la droite totale  $(BDA, B'D'a')$  aura trois points de communs avec l'hyperboloïde, et, par suite, elle sera située tout entière sur cette surface du second degré.

557. (Fig. 119.) De là nous pouvons conclure que tout plan vertical  $ADB$ , tangent à l'ellipse de gorge, coupe l'hyperboloïde suivant deux droites distinctes, qui se croisent en  $(D, D')$  sur cette gorge, et sont inclinées symétriquement de part et d'autre de la verticale D. Par conséquent, cette surface peut être regardée comme produite par le mouvement de la génératrice  $(AD, A'D')$ , ou de la génératrice  $(BD, B'D')$  assujettie à glisser constamment sur les trois ellipses semblables

$$(XYVU, X'V'), (abef, a'e'), (XYVU, X''V'');$$

car on sait (n° 515) que ces conditions règlent complètement le mouvement d'une ligne droite. Les diverses positions de ces deux génératrices présenteront donc deux systèmes de droites indéfinies, situées toutes sur l'hyperboloïde, savoir :

$$\begin{aligned} [A] & \quad (AD, A'D'), (A_2E, A_2'E'), (A_3F, A_3'F'), \dots, \\ [B] & \quad (BD, B'D'), (B_2E, B_2'E'), (B_3F, B_3'F'), \dots, \end{aligned}$$

et les unes comme les autres se projeteront verticalement sur des tangentes à l'hyperbole  $X''a'X'$ ,  $V''e'V'$ , contenue dans le plan vertical  $VX$ . En effet, au point  $(N, N')$ , où l'une de ces génératrices vient percer ce plan  $VX$ , le plan tangent de la surface est perpendiculaire au plan vertical, attendu qu'il contient la tangente à l'ellipse horizontale qui aurait son sommet en  $(N, N')$ ; donc la génératrice  $(BND, B'N'D')$  se confond, en projection verticale, avec la tangente de l'hyperbole  $(X''a'X', aX)$  qui est aussi dans ce plan tangent. La même circonstance arrive pour la droite  $(ADN, A'D'N')$  dont la projection verticale touche cette hyperbole au point  $(N, N')$ ; et les asymptotes sont fournies par les génératrices  $(bK, O'K')$ ,  $(fB_2, O'B_2')$ , lesquelles, étant parallèles au plan vertical  $VX$ , ne toucheront plus l'hyperbole qu'à l'infini.

558. Deux génératrices quelconques du système A ne sont jamais dans un même plan, et la surface est GAUCHE. Considérons, en effet, les droites  $(AD, A'D')$  et  $(A_4G, A_4'G')$ . Si elles se coupaient, leur point de section serait projeté horizontalement en M; mais, pour la première de ces droites, le point M, étant au delà de D qui appartient à l'ellipse de gorge, devra se trouver sur la nappe supérieure en  $M''$ ; tandis que pour la droite  $(A_4G, A_4'G')$ , le point M, étant en deçà de G, appartiendra nécessairement à la nappe inférieure, et sera projeté en  $M'$ . Donc les droites proposées ne se coupent pas, et d'ailleurs il est bien évident qu'elles ne sauraient être parallèles.

On prouvera de même que deux génératrices du système B ne sont jamais dans un plan unique.

539. Au contraire, chaque génératrice ( $A_1G, A'_1G'$ ) du premier système coupe toutes les droites du second, par exemple ( $BD, B'D'$ ). Car le point  $M$ , où se rencontrent les projections horizontales de ces deux droites, est placé, sur l'une et sur l'autre, en deçà des points  $G$  et  $D$ , qui appartiennent à l'ellipse de gorge; donc les deux points projetés en  $M$  sont sur la nappe inférieure de l'hyperboloïde, et, par conséquent, ils se projettent à la fois en  $M'$ , puisque cette nappe ne peut évidemment être coupée par la verticale  $M$  qu'en un seul point. Observons, cependant, que quand on choisira une génératrice du système  $A$  et une du système  $B$  qui passeront par les extrémités d'un même diamètre de l'ellipse de gorge, ces deux droites se trouveront *parallèles*; mais du moins elles seront encore dans un plan unique.

On démontrera de même que chaque génératrice du système  $B$  coupe toutes celles du système  $A$ , excepté une seule qui lui est parallèle.

540. Or, le mouvement d'une droite étant complètement déterminé (n° 521) par la condition que cette ligne mobile s'appuie constamment sur trois droites fixes, il en résulte que si l'on fait glisser la génératrice ( $AD, A'D'$ ) sur trois droites quelconques du système  $B$ , elle ne pourra prendre que les positions  $A_2, A_3, A_4, \dots$ , qui toutes rencontrent ces trois directrices (n° 539); de même, la génératrice ( $BD, B'D'$ ), en glissant sur trois droites du système  $A$ , viendra coïncider nécessairement avec  $B_2, B_3, B_4, \dots$ . Par conséquent, l'hyperboloïde actuel nous offre bien toutes les propriétés que nous avons déjà reconnues dans la surface gauche du n° 521; et, si les trois ellipses directrices étaient des cercles, on retomberait sur l'hyperboloïde de révolution dont nous avons parlé dans les n°s 140, 141, *...*

541. Du plan tangent. (Fig. 119.) Lorsque l'hyperboloïde à une nappe est défini par les trois ellipses semblables citées n° 537 (courbes que l'on peut aisément construire, dès que les trois axes  $Oa = O'a', Ob, O'c'$  de la surface sont assignés), il est bien facile de trouver le plan tangent relatif à un point donné par sa projection horizontale  $M$ . En effet, si nous tirons par le point  $M$  une tangente  $AMB$  à l'ellipse de gorge, ce sera la projection de deux génératrices, représentées sur le plan vertical par  $A'D'$  et  $B'D'$ , et sur lesquelles il faudra projeter le point donné en  $M''$  ou en  $M'$ ; de sorte qu'il y aura deux positions pour le point proposé. Considérons d'abord le point ( $M, M''$ ) situé sur la droite ( $ADM, A'D'M''$ ): il y passe une seconde génératrice appartenant au système  $B$ , savoir ( $B_1GM, B'_1G'M''$ ), laquelle s'obtient en tirant par le point  $M$  la nouvelle tangente  $MGB_1$  à l'ellipse de gorge. Alors, l'ensemble de ces deux génératrices déterminera complètement (n° 550) le plan qui touchera l'hyperboloïde au point ( $M, M''$ ), et les pieds de ces droites fourniront immédiatement la trace horizontale  $AB_1P$  de ce plan tangent.

Quant à sa trace verticale  $PQ''$ , on l'obtiendra par le secours de l'horizontale ( $MQ, M''Q''$ ) menée parallèlement à  $AB_1$ .

Pour l'autre point ( $M, M'$ ) on combinera ensemble les deux génératrices ( $BMD, B'M'D'$ ) et  $A_1MG, A'_1M'G'$  qui s'y coupent; et la trace horizontale du plan tangent relatif à ce nouveau point sera la droite  $A_1B$ , qui se trouvera évidem-

ment parallèle à  $AB_1$ . La trace verticale s'obtiendrait par le même moyen que précédemment.

542. Pour obtenir une symétrie convenable dans la représentation de l'hyperboloïde au moyen de ses génératrices rectilignes, il est essentiel de choisir les cordes  $AB, A_2B_2, A_3B_3, \dots$ , sur le plan horizontal, de manière qu'elles reviennent tôt ou tard aboutir deux à deux aux mêmes points de l'ellipse  $XYVU$ . Or, si cette courbe était un cercle, on sait (n° 150) que l'on remplirait cette condition en partageant la circonférence en un certain nombre de parties égales, et en tirant des cordes qui sous-tendissent un nombre constant de ces arcs partiels; d'ailleurs, ces cordes se trouveraient bien tangentes au cercle de gorge, qu'elles traceraient par leurs seules intersections successives. Si donc, en supposant cette construction effectuée pour le cercle décrit sur  $VX$  comme diamètre, on imagine qu'il tourne autour de  $VX$ , d'une certaine quantité angulaire propre à lui donner pour projection l'ellipse  $XYVU$ , il arrivera bien que les cordes primitives se projettent sur d'autres cordes, qui viendront nécessairement aboutir, deux à deux, aux mêmes points de cette ellipse; et en outre, ces nouvelles cordes seront évidemment tangentes à l'ellipse intérieure suivant laquelle se projettera le cercle de gorge primitif. D'où je conclus qu'il faut choisir les points  $A, A_2, A_3, \dots$ , de telle sorte qu'ils répondent aux ordonnées qui diviseront le cercle  $VX$  en arcs égaux; et tracer ensuite dans l'ellipse  $XYVU$ , des cordes  $AB, A_2B_2, \dots$ , qui sous-tendent un nombre constant de ces arcs d'ellipse, quoique ceux-ci ne soient plus de même longueur. Une fois que les génératrices seront ainsi déterminées sur le plan horizontal, on en conclura aisément les projections verticales, en projetant les extrémités  $A$  et  $B$  en  $A'$  et  $B'$ , et aussi en  $\alpha'$  et  $\beta'$ , sur les deux parallèles  $V'X'$  et  $V''X''$ . D'ailleurs, les intersections consécutives de toutes ces génératrices, si elles sont assez multipliées, suffiront pour dessiner par elles-mêmes le contour de l'ellipse de gorge sur le plan horizontal, et les deux branches de l'hyperbole parallèle au plan vertical.

543. DU CONE ASYMPTOTE de l'hyperboloïde. (Fig. 119.) Si par le centre ( $O, O'$ ) de cette dernière surface, on menait des droites respectivement parallèles aux diverses génératrices du système  $A$ , elles le seraient en même temps aux génératrices du système  $B$ , puisque chaque droite d'un système a sa parallèle dans l'autre (n° 552); et l'on formerait ainsi une surface conique qui serait *asymptote* de l'hyperboloïde proposé. Pour le prouver, cherchons d'abord quelle sera la trace horizontale de ce cône. En considérant l'arête quelconque  $Om$  et les deux génératrices  $DA$  et  $HR$  qui lui sont parallèles, ces trois droites seront dans un même plan passant par le diamètre horizontal ( $DOH, D'O'$ ); donc la trace de ce plan sera une corde  $RA$  parallèle à  $DOH$ , et le milieu  $m$  de cette corde sera évidemment le pied de l'arête  $Om$ . En raisonnant de même pour une autre arête et pour les deux génératrices de l'hyperboloïde, qui lui sont parallèles, on verra que la trace horizontale *enmyx* du cône en question sera fournie par les milieux de toutes les cordes qui sous-tendront, comme  $RA$ , un nombre constant de divisions dans l'ellipse  $VYX$ . Or, d'après ce que nous avons dit au numéro précédent, on sait que toutes ces cordes

ont pour enveloppe une ellipse qu'elles touchent en leurs milieux, et qui est semblable à  $VXY$ ; donc la trace  $vmx$  est effectivement une ellipse qui jouit de cette propriété, et dont le demi-grand axe  $Ov$  est égal à  $bK$ .

Maintenant le cône que nous venons de construire est *asymptote* de l'hyperboloïde; car, en coupant ces deux surfaces par des plans horizontaux, les sections seraient des ellipses respectivement semblables à  $VYX$  et  $vyx$ , et qui, comme ces dernières, auraient pour différence de leurs demi-axes une quantité variable  $Vv$  égale à l'intervalle  $V'K'$  qui sépare l'hyperbole  $V'v''$  de son asymptote  $O'K'$ . Or cet intervalle approche indéfiniment de zéro, à mesure que l'on s'abaisse davantage au-dessous du centre  $O'$ ; donc aussi les deux sections faites dans l'hyperboloïde et dans le cône par un même plan horizontal qui s'éloigne de plus en plus du centre, seront des ellipses semblables qui approcheront *indéfiniment* de se confondre, quoique la première enveloppe toujours la seconde; donc ces deux surfaces sont bien asymptotes l'une de l'autre.

544. DES SECTIONS PLANES de l'hyperboloïde. (Fig. 109.) Pour obtenir l'intersection de cette surface par un plan donné  $\pi$ , il suffit de chercher les points dans lesquels ce plan va couper les diverses génératrices  $A, A', A'', \dots$ , que l'on sait construire (n° 521) d'après la connaissance des trois directrices  $B, B', B''$ ; puis, de réunir tous ces points par un trait continu. La tangente à cette courbe sera donnée par l'intersection du plan  $\pi$  avec le plan tangent de l'hyperboloïde pour le point en question, plan que nous avons enseigné à construire (n° 530).

545. Dans le cas particulier où le plan donné  $\pi$  passerait par une génératrice  $A$  du premier système, la seconde branche d'intersection serait nécessairement *rectiligne*, puisque la surface est du second degré; et cette droite, qui appartiendrait au système  $B$ , s'obtiendrait en cherchant seulement les deux points où le plan  $\pi$  coupe deux génératrices  $A'$  et  $A''$  du premier système. D'ailleurs, ce plan  $\pi$  serait *tangent* à la surface dans le point de rencontre des deux génératrices qu'il renfermerait.

546. Lorsque ces deux génératrices se trouveront parallèles entre elles, le plan  $\pi$  devra être considéré comme *asymptote* de l'hyperboloïde, ou tangent dans le point infiniment éloigné où concourraient ces deux droites; alors le plan  $\pi$  passerait nécessairement par le centre (n° 535) de la surface, et serait tangent au cône asymptote, comme on l'a vu (n° 545) pour les génératrices  $DA$  et  $HR$  de la fig. 119. Ainsi, *tout plan tangent au cône asymptote coupe l'hyperboloïde suivant deux droites parallèles à l'arête de contact* de ce plan avec le cône.

547. Pour reconnaître d'avance la nature de la section produite par un plan donné  $\pi$ , il faudra examiner s'il existe quelque génératrice *parallèle au plan sécant*; parce qu'alors la section admettrait une ou deux branches infinies. A cet effet, on construira la trace du cône asymptote sur le plan horizontal, en menant par le centre  $O$  de l'hyperboloïde, déterminé comme au n° 535 (ou même par un point quelconque de l'espace), des parallèles à un nombre suffisant de génératrices  $A, A', A'', \dots$ ; puis, on conduira par le sommet de ce cône un plan  $\pi'$  parallèle à  $\pi$ , et alors il pourra se présenter trois cas distincts.

1° Si la trace horizontale du plan  $\pi'$  ne rencontre pas la base du cône asymptote, il n'existera sur ce cône aucune arête parallèle à  $\pi$ ; et il en sera de même des génératrices de l'hyperboloïde, qui sont (n° 545) respectivement parallèles à ces arêtes. Donc, dans ce cas, la courbe de section n'aura aucun point situé à l'infini, et elle sera *une ellipse*.

2° Si la trace horizontale du plan  $\pi'$  coupe en deux points la base du cône asymptote, il y aura sur ce cône deux arêtes  $\alpha$  et  $\alpha'$  *parallèles au plan  $\pi$* , et aussi dans l'hyperboloïde deux génératrices de chaque mode ( $a$  et  $b, a'$  et  $b'$ ) qui rempliront cette condition; par conséquent, la section faite par le plan  $\pi$  admettra deux branches infinies, et sera *une hyperbole*. Pour en trouver les asymptotes, on mènera le plan  $P$ , qui touche le cône asymptote (\*) le long de l'arête  $\alpha$ ; et comme ce plan renfermerait (n° 546) les deux génératrices  $a$  et  $b$  qui, sur l'hyperboloïde, seraient parallèles à  $\alpha$ , il est tangent à cette surface pour le point infiniment éloigné où  $a$  et  $b$  iraient rencontrer le plan sécant  $\pi$ : donc l'intersection des plans  $P$  et  $\pi$  donnera l'asymptote de cette branche. L'autre asymptote sera fournie par l'intersection du plan  $\pi$  avec le plan  $P'$  qui touchera le cône asymptote suivant l'arête  $\alpha'$ ; car c'est dans ce plan  $P'$  que seraient contenues les deux génératrices  $a'$  et  $b'$ , qui sont parallèles à  $\alpha'$ .

3° Si le plan  $\pi'$ , mené par le sommet du cône asymptote, *touche* ce cône suivant une arête unique  $\alpha$ , il n'y aura sur l'hyperboloïde qu'une seule génératrice ( $a$  et  $b$ ) de chaque système, qui soit parallèle à  $\alpha$ ; donc alors la section faite par le plan  $\pi$  n'aura qu'une branche infinie, et sera *une parabole*. D'ailleurs, elle n'admettra pas d'asymptote; car c'est le plan  $\pi'$  lui-même qui, touchant le cône asymptote, renfermerait (n° 546) les deux génératrices  $a$  et  $b$  parallèles à  $\alpha$ . Donc ce plan est tangent à l'hyperboloïde pour le point infiniment éloigné de la courbe; mais, comme il se trouve ici parallèle au plan sécant  $\pi$ , leur intersection, qui serait l'asymptote, se transporte tout entière à l'infini et n'existe plus.

548. Par les constructions précédentes, on saura résoudre le problème suivant, quand il sera possible : *Trouver sur un hyperboloïde donné une génératrice qui soit parallèle à un plan connu  $\pi$* . Car, en menant par le sommet du cône asymptote le plan  $\pi'$ , parallèle à  $\pi$ , si le plan  $\pi'$  coupe ce cône suivant une ou deux arêtes  $\alpha$  et  $\alpha'$ , les plans tangents au même cône le long de ces arêtes donneront, par leurs intersections avec l'hyperboloïde, les génératrices  $a$  et  $b$ , parallèles à  $\alpha$ , et les génératrices  $a'$  et  $b'$ , parallèles à  $\alpha'$ , lesquelles satisferont toutes quatre à la question proposée.

(\*) Il faut, ici, que ce cône ait été construit de manière que son sommet soit précisément au centre  $O$  de l'hyperboloïde, que l'on sait trouver par le n° 533.