# CHAPITRE III.

## DU PARABOLOIDE HYPERBOLIQUE.

**549.** (*Fig.* 115.) Nous appellerons ainsi la surface engendrée par *une droite mobile* A, *qui glisse sur deux droites fixes* B et B′ *non situées dans un même plan, et qui demeure en outre constamment parallèle à un plan donné* P, que l'on nomme le *plan directeur;* car il sera démontré plus loin (nº **558**) que cette surface est identique avec celle que nous avons déjà désignée sous ce nom au nº **89**. Pour construire les diverses positions de la génératrice, il suffira de mener par chaque point M, pris à volonté sur la génératrice B, un plan parallèle à P; puis, de chercher le point N où ce plan ira couper l'autre directrice B′, et de joindre ces deux points par une droite AMN. On voit ainsi que les conditions précédentes *règlent complétement* le mouvement de la droite mobile, puisque, pour chaque point M, elle ne peut prendre qu'une position unique.

**550.** Le paraboloïde hyperbolique est une *surface gauche;* car deux génératrices quelconques A et A′, même quand elles ne sont pas infiniment voisines, ne pourraient se trouver contenues dans un plan unique, qu'autant que les directrices B et B′, qui ont chacune deux points communs avec les premières, seraient elles-mêmes situées dans ce plan : or cela est contraire à la définition donnée au numéro précédent; donc la surface est gauche.

**551.** (*Fig.* 115.) La surface qui nous occupe admet, comme l'hyperboloïde gauche, un second mode de génération inverse du premier, et dans lequel deux des génératrices A, A′, A″,..., deviendront les directrices. Pour le prouver, démontrons que *tout plan* DUV, *parallèle aux deux directrices* B et B′, *coupe le paraboloïde suivant une droite;* ce qui se réduit à faire voir que les trois points D, D′, D″, où ce plan rencontre trois génératrices quelconques A, A′, A″, se trouvent en ligne droite.

Projetons la figure entière sur un plan QOX, parallèle aussi aux deux directrices B et B′, et employons pour lignes projetantes des droites obliques (*), mais parallèles toutes à une ligne PO menée arbitrairement dans le plan directeur POX. Alors B et B′ deviendront deux lignes quelconques $b$ et $b'$; mais les droites MDN, M′D′N′, M″D″N″, ayant leurs plans projetants parallèles à P, se projetteront suivant des droites $mdn$, $m'd'n'$, $m''d''n''$, nécessairement *parallèles* à l'intersection OX des deux plans P et Q. Cela posé, on aura évidemment

$$\frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{DN}} = \frac{md}{dn}, \quad \frac{\mathrm{M'D'}}{\mathrm{D'N'}} = \frac{m'd'}{d'n'}, \quad \frac{\mathrm{M''D''}}{\mathrm{D''N''}} = \frac{m''d''}{d''n''};$$

(*) Nous avions, dès l'année 1818, démontré cette proposition en conservant les projections orthogonales, et employant un plan QOX *perpendiculaire* au plan directeur P; ce qui laisse subsister tous les raisonnements et les calculs du texte. Mais la marche actuelle offre l'avantage de mettre sous les yeux du lecteur le second plan directeur Q qu'admet le paraboloïde hyperbolique.



mais, d'un autre côté, le plan DUV étant parallèle aux deux lignes B et B′, on peut regarder les droites A, A′, A″, comme coupées par trois plans parallèles, et, d'après un théorème connu de la géométrie ordinaire, on aura les rapports égaux

$$\frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{DN}} = \frac{\mathrm{M'D'}}{\mathrm{D'N'}} = \frac{\mathrm{M''D''}}{\mathrm{D''N''}},$$

qui, en vertu des égalités précédentes, donneront encore

$$\frac{md}{dn} = \frac{m'd'}{d'n'} = \frac{m''d''}{d''n''}.$$

Or, puisque ces rapports égaux subsistent entre des droites $mn$, $m'n'$, $m''n''$, qui sont *parallèles entre elles*, il en résulte nécessairement que les trois points $d$, $d'$, $d''$, sont sur une même droite qui convergerait avec $b$ et $b'$ vers un point unique; d'où il suit que les points de l'espace D, D′, D″, se trouvent *dans le plan projetant* passant par la droite $dd'd''$; et comme ils sont d'ailleurs dans le plan DUV, qui est distinct de ce plan projetant, il en résulte que ces trois points D, D′, D″, sont effectivement en ligne droite.

**552.** (*Fig.* 115.) D'après cela, *si l'on fait glisser sur deux génératrices* A et A′ *du premier mode une droite mobile* B″ *assujettie en outre à demeurer parallèle au plan* Q, *elle engendrera le même paraboloïde* que ci-dessus; car, lorsque B″ passera par le point D par exemple, elle ne pourra manquer de coïncider avec la droite DD′D″ qui est située (nº **551**) sur ce paraboloïde, et qui remplit déjà les conditions imposées à B″. Ainsi, voilà un second mode de génération où le nouveau *plan directeur* Q est parallèle aux deux directrices B et B′ de l'ancien mode, et où les directrices nouvelles sont deux génératrices quelconques du premier système A.

**553.** Maintenant, essayons de faire mouvoir une droite B″ de manière qu'elle s'appuie constamment sur trois droites quelconques A, A′, A″, du premier système, sans lui imposer la restriction d'être parallèle à un plan directeur. Ces conditions suffiront pour régler complétement (nº **521**) le mouvement de cette génératrice; et quand elle passera par le point D, par exemple, elle devra encore coïncider avec DD′D″, qui remplit déjà les conditions énoncées : donc B″ va ainsi décrire le même paraboloïde que précédemment. Par conséquent, voilà un troisième mode de génération, dans lequel cette surface est produite par *le mouvement d'une droite* B″ *qui glisse constamment sur trois droites fixes* A, A′, A″, lesquelles sont *parallèles à un même plan;* car ici ces trois directrices, au lieu d'être tout à fait quelconques, se trouvent, par la définition du nº **549**, parallèles toutes au plan P : de sorte que, sous ce point de vue, le paraboloïde hyperbolique est un cas particulier de l'hyperboloïde à une nappe (nº **521**). D'ailleurs, quoiqu'on n'ait pas imposé à la droite mobile B″ la restriction de demeurer parallèle à un plan fixe, elle ne laissera pas de remplir cette condition, puisque les positions qu'elle prendra, comme DD′D″, sont déjà toutes parallèles au plan Q; ce qui s'accorde avec la remarque du nº **529**.

Il est aussi évident que ce mode de génération admet, pour réciproque, un quatrième mode dans lequel on ferait mouvoir la droite A sur trois quelconques des génératrices du système B; car cette droite A ne pourrait prendre (n° **521**) que les positions A′, A″,..., qui remplissent déjà cette condition, et elle demeurerait ainsi parallèle au plan P, quoiqu'on ne lui eût pas imposé cette restriction.

**554.** (*Fig.* 115.) Il résulte évidemment de là : 1° que par chaque point D pris à volonté sur le paraboloïde, il passe deux droites situées tout entières sur la surface, et appartenant l'une au système A, l'autre au système B; 2° que deux génératrices appartenant au même mode ne sont jamais dans un plan unique, puisque ce qui a été prouvé (n° **550**) pour les droites A, A′, A″,..., s'applique évidemment aussi aux droites B, B′, B″,...; 3° que chaque génératrice d'un système coupe toutes les droites de l'autre mode, *sans qu'il y en ait deux de parallèles* : car, si cette circonstance avait lieu pour A″ et B″, par exemple, il s'ensuivrait que ces droites seraient aussi parallèles à l'intersection OX des deux plans directeurs, ce qui est impossible, à moins qu'on ne les regarde comme placées à une distance infinie; 4° une droite quelconque ne peut traverser le paraboloïde qu'en deux points : car, si elle avait trois points communs avec cette surface, elle s'appuierait sur trois génératrices, et, par conséquent (n° **553**), elle coïnciderait tout entière avec le paraboloïde. D'ailleurs, pour obtenir les points d'intersection, il faudra construire le section faite dans la surface par un plan vertical ou horizontal, conduit suivant la droite donnée.

**555.** Enfin, puisque dans le premier mode de génération les diverses positions A, A′, A″,... de la génératrice sont fournies par des plans parallèles à P, qui coupent les directrices B et B′ aux points M et N, M′ et N′,..., on sait, par la géométrie ordinaire, que ces plans diviseront les droites B et B′ en parties proportionnelles, c'est-à-dire que l'on aura

$$\frac{MM'}{NN'} = \frac{M'M''}{N'N''} = \frac{M''M'''}{N''N'''} = \ldots;$$

d'où il résulte qu'au lieu d'un plan directeur, on pourrait assigner deux positions primitives A et A′ de la droite mobile, puis exiger que celle-ci glissât sur B et B′ *de manière à intercepter toujours des parties proportionnelles avec* MM′ *et* NN′. Cette marche sera d'un usage fort commode pour l'exécution en relief du paraboloïde hyperbolique; car, après avoir construit un quadrilatère *gauche*, tel que MNN‴M‴, dont les côtés et les angles soient invariables, il suffira de diviser les côtés opposés MM‴ et NN‴ en un même nombre de parties égales; puis, en joignant les divisions correspondantes par *des fils tendus en ligne droite*, on obtiendra une représentation fidèle de cette surface. Pour y introduire en même temps les génératrices du système B, il n'y aura qu'à diviser aussi les deux autres côtés MN et M‴N‴ en un même nombre de parties égales, et joindre les points de division correspondants par d'autres fils, qui devront alors s'appuyer d'eux-mêmes sur les premiers, et ne former qu'une seule et même surface, où les deux modes de génération se trouveront exprimés d'une manière bien sensible (*voyez* n° **566** et la *fig.* 120).

**556.** *Du plan tangent.* (*Fig.* 115.) Lorsque le point de contact G sera donné sur



une génératrice connue AMGN, il suffira de construire seulement une seconde génératrice A′ du même mode, en employant le procédé du n° **549**, si le paraboloïde est défini par un plan directeur P; et, s'il l'était par trois directrices B, B′, B″, parallèles à un même plan, on emploierait la marche du n° **521**. Quand une fois on connaîtra les deux génératrices A et A′, on les coupera par un plan mené du point G parallèlement aux directrices B et B′, et la droite GH, qui réunira les points de section, sera située (n° **551**) sur le paraboloïde; donc le système des deux droites AG et GH, qui sont elles-mêmes leurs propres tangentes, déterminera le plan tangent de la surface pour le point donné G.

**557.** Si l'on assignait seulement la projection horizontale *g* du point de contact, sans donner la génératrice qui le contient, il faudrait chercher d'abord la seconde projection de ce point. Pour cela, on ferait passer par *g* un plan vertical quelconque dont on déterminerait les intersections avec diverses génératrices, et la suite de ces points fournirait la projection verticale de la section faite dans la surface; alors on projetterait le point *g* sur cette courbe, et, ayant ainsi les deux projections *g* et *g′* du point de contact, il serait bien facile de mener la génératrice qui, passant par ce point, s'appuierait sur B et B′ : de sorte que l'on serait ramené au cas précédent.

**558.** La surface gauche qui nous occupe *est identique avec le paraboloïde hyperbolique* que nous avons décrit au n° **89**. En effet, cette surface gauche est *du second degré;* car, sans effectuer les calculs, il est facile de voir que les conditions par lesquelles on exprimerait que la droite mobile A a toujours un point de commun avec B et avec B′, et demeure parallèle au plan P choisi, si l'on veut, pour un des plans coordonnés, conduiraient à une équation qui ne dépasserait pas le second degré : et cette conséquence s'accorde avec la dernière remarque du n° **554**. Ensuite, cette surface gauche n'admet *aucune section plane qui soit une courbe* FERMÉE, comme nous allons le démontrer (n° **564**); d'ailleurs, elle ne peut être un cylindre à base hyperbolique ou parabolique, attendu qu'elle est gauche : il faut donc qu'elle coïncide avec le paraboloïde hyperbolique (n° **89**), puisque toutes les autres surfaces du second degré admettent, par leur génération même, des sections elliptiques (*voyez* livre II, chapitre I^er^).

**559.** Sections planes *du paraboloïde hyperbolique.* (*Fig.* 115.) On obtiendra la courbe d'intersection de cette surface avec un plan donné $\pi$, en construisant les points où ce plan coupe les diverses génératrices A, A′, A″,...; et la tangente à cette courbe en un point donné, résultera de l'intersection du plan $\pi$ avec le plan tangent au paraboloïde, pour le point en question, plan qui se construira comme au n° **556**. Quant à la nature de la section, on peut la prévoir d'avance par les règles suivantes.

**560.** D'abord, si le plan sécant $\pi$ passe déjà par une droite A du paraboloïde, l'autre branche d'intersection sera encore rectiligne, puisque cette surface est du second degré : on l'obtiendra en cherchant seulement les points D′ et D″, où $\pi$ va rencontrer deux autres génératrices A′ et A″, du même mode que A; et la section totale se composera des deux droites A et DD′D″, de sorte que le plan $\pi$ se trouvera tangent en D, et sécant partout ailleurs.

**561.** Dans le cas, plus particulier encore, où le plan $\pi$, qui passe par A, se trouverait parallèle au plan directeur P, qui correspond à cette génératrice, il ne couperait plus les autres génératrices du même mode; de sorte que la seconde branche d'intersection qui était tout à l'heure DD′D″, s'éloignerait tout entière à l'infini. Donc alors la section se réduirait à la droite unique A; mais le plan $\pi$ devrait toujours être considéré comme tangent au paraboloïde dans le point infiniment éloigné situé sur A, ou bien comme un plan *asymptote* de la surface.

**562.** Généralement, soit $\pi$ un plan quelconque qui n'est pas parallèle à l'intersection OX des deux plans directeurs; il coupera ceux-ci suivant des droites $\delta$ et $\delta'$, non parallèles à OX, et alors il existera dans chaque système une génératrice parallèle à $\pi$. En effet, conduisons par la directrice B un plan BCE parallèle à la trace $\delta$; ce plan coupera nécessairement la directrice B′ en un certain point N″, et en menant par ce point la droite N″M″A″ parallèle à $\delta$, elle ira rencontrer la directrice B, et sera évidemment une génératrice parallèle au plan $\pi$. Si l'on opère d'une manière semblable pour la trace $\delta'$, en menant par la génératrice A un plan parallèle à $\delta'$, il coupera une autre droite A′ du même système en un point D′, par lequel on pourra conduire une autre génératrice B″, qui sera parallèle à $\delta'$ et au plan $\pi$. De là on doit conclure que la section faite par ce plan $\pi$ présentera deux branches ouvertes, qui convergeront vers les points infiniment éloignés où $\pi$ irait rencontrer les deux génératrices A″ et B″; ainsi cette section sera *une hyperbole* dont nous allons construire les asymptotes.

Menons par la génératrice A″ un plan $\pi'$ parallèle à P : ce plan $\pi'$ sera tangent (nº **561**) au paraboloïde dans le point situé à l'infini sur A″; donc l'intersection de ce plan tangent avec le plan $\pi$ de la courbe, fournira l'asymptote de la branche qui converge vers A″, et cette asymptote sera évidemment parallèle à cette génératrice. L'autre asymptote sera donnée semblablement, par l'intersection du plan $\pi$ avec un plan $\pi''$ mené, suivant B″, parallèlement au second plan directeur Q, et elle sera parallèle à B″.

**563.** Enfin, supposons que le plan sécant $\pi$ soit parallèle à l'intersection OX des deux plans directeurs, auquel cas ses deux traces $\delta$ et $\delta'$ sur ces derniers se trouveront elles-mêmes parallèles à OX. Alors, si l'on veut essayer d'obtenir une génératrice parallèle à $\pi$, il faudra encore mener par B un plan BCE parallèle à $\delta$; mais ici ce plan ne coupera plus aucune des génératrices B′ et B″,..., puisqu'il deviendra évidemment parallèle à Q : donc la génératrice parallèle à $\pi$, dans le système A, est transportée tout entière à une distance infinie. Il en sera de même de la génératrice qui, dans le système B, serait parallèle à $\pi$; de sorte que la section faite par le plan $\pi$ sera encore ouverte, puisqu'il y aura des génératrices de plus en plus éloignées qui approcheront indéfiniment d'être parallèles à $\pi$ : mais cette courbe *n'aura plus d'asymptote*. En effet, cette dernière ligne serait donnée, comme on l'a vu au numéro précédent, par l'intersection du plan $\pi$ avec un plan $\pi'$ ou $\pi''$, parallèle à P ou Q, et mené suivant la génératrice parallèle à $\pi$ : or cette génératrice est ici transportée tout entière à l'infini; donc aussi le plan $\pi'$ s'éloigne indéfiniment, et ne fournit plus d'asymptote. Par conséquent, la section relative au cas actuel est *une parabole*.



**564.** En résumant cette discussion, on voit : 1° que *tout plan $\pi$, parallèle à l'intersection* OX *des deux plans directeurs* [1], *donne une* SECTION PARABOLIQUE; et *si, en outre, $\pi$ est parallèle à l'un de ces plans directeurs, cette parabole se réduit à une droite unique* (nº **561**).

2° *Si le plan sécant $\pi$ n'est point parallèle à l'intersection* OX *des deux plans directeurs, la section est* UNE HYPERBOLE; mais *elle dégénère* EN DEUX DROITES QUI SE COUPENT, *si le plan sécant contient déjà une génératrice de la surface* (nº **560**).

3° *Dans aucun cas, la section faite par un plan quelconque $\pi$ dans le paraboloïde ne peut être* UNE COURBE FERMÉE.

**565.** Observons aussi que les constructions indiquées au nº **562** serviront à résoudre ce problème : *Trouver sur un paraboloïde donné une génératrice qui soit parallèle à un plan connu $\pi$*. Il y aura deux solutions quand ce plan $\pi$ ne sera point parallèle à l'intersection des deux plans directeurs : et le problème sera impossible, lorsque $\pi$ se trouvera parallèle à cette intersection, à moins qu'il ne le soit en même temps à l'un des plans directeurs, auquel cas il existera une infinité de solutions, fournies par toutes les génératrices parallèles à ce plan directeur.

ROBLÈME. *Représenter un paraboloïde engendré par une droite mobile* A *qui glisse sur deux droites fixes* B *et* $B_2$, *en demeurant parallèle à un plan directeur donné* P; *et construire le plan tangent de cette surface, pour un point connu.*

**566.** Afin de donner à notre épure toute la symétrie qu'on devrait chercher à obtenir dans la construction d'un modèle en relief, nous ferons observer qu'un plan Q, parallèle aux droites données B et $B_2$, serait le plan directeur du second mode de génération (nº **552**) du paraboloïde cherché; et comme ce plan Q est évidemment déterminé, au moins en direction, par les données actuelles du problème, il nous sera toujours permis d'adopter les dispositions suivantes :

1° (*Fig.* 120.) Nous choisirons notre plan horizontal de projection, perpendiculaire aux deux plans directeurs P et Q, lesquels seront alors représentés par leurs traces horizontales *op* et *oq*.

2° Nous dirigerons le plan vertical de projection, de manière qu'il soit parallèle à la droite *oy* qui divise en parties égales l'angle *poq*; puis, nous tracerons les projections (CD, C′D′) de la droite donnée B, et les projections (EF, C′F′) de l'autre directrice $B_2$, en faisant attention que les deux projections horizontales CD et EF devront être nécessairement parallèles entre elles, d'après la condition 1°, puisqu'elles le seront à la trace *oq* du plan directeur Q.

[1] On verra au nº 572 que cette droite OX est l'*axe principal* du paraboloïde, ou du moins lui est parallèle, car les deux plans directeurs ne sont pas déterminés quant à la position absolue, mais seulement quant a la direction.

3° Nous pouvons encore élever ou abaisser notre plan horizontal de telle sorte, que la ligne de terre VY' passe par le point C', où se croisent les deux projections verticales des directrices B et $B_2$; et alors les traces horizontales C et E de ces droites se trouveront sur une même perpendiculaire CE à la ligne de terre.

4° Nous limiterons ces directrices aux deux points (D, D'), (F, F') où elles vont rencontrer le plan vertical DOF mené perpendiculairement sur le milieu de CE; de sorte que la figure CDEF sera un losange, dont le centre O sera la projection de l'*axe* du paraboloïde, ainsi que nous le verrons plus loin (n° **572**), pourvu cependant que les directrices B et $B_2$ soient *également inclinées* sur le plan horizontal actuel. A la vérité, cette dernière condition pourrait bien ne pas être remplie par les directrices que la question assigne; mais *nous admettrons qu'elle est vérifiée ici*, et, par suite, que les points (D, D'), (F, F'), sont à la même hauteur, attendu que, dans tous les cas, nous saurons retrouver (n° **572**) parmi les génératrices du paraboloïde deux droites qui seraient également inclinées sur la verticale, et qui, dès lors, pourraient être substituées aux directrices données (CD, C'D'), (EF, C'F'), si ces dernières ne remplissaient pas cette condition.

**567.** (*Fig.* 120.) Cela posé, la droite qui réunira les points (D, D') et (E, C') sera évidemment parallèle au plan directeur P, puisque sa projection horizontale DE se trouvera parallèle à la trace *op* de ce plan vertical P, d'après les conditions 2° et 4° du numéro précédent. Donc (DE, D'C') est une position de la génératrice mobile A; et comme il en sera de même de la droite (CF, C'F'), on voit que, si l'on divise en un même nombre de parties égales les deux directrices données (CD, C'D'), (EF, C'F'); puis, que l'on joigne les points de division 0 et 16, 1 et 15, 2 et 14, 3 et 13,..., on obtiendra ainsi les diverses génératrices du système A, savoir :

$$(DE, D'C'),\ldots,\quad (GH, G'H'),\ldots,\quad (CF, C'F');$$

et d'ailleurs toutes ces droites seront projetées horizontalement sur des parallèles à la trace *op* du plan directeur P.

**568.** Quant aux projections verticales de ces mêmes génératrices, elles formeront, par leurs intersections successives, une courbe D'O'F' *enveloppe* de toutes ces droites, et qui sera une parabole. Car chaque génératrice G'H' fournissant évidemment la proportion F'G' : G'C' :: C'H' : H'D', il en résulte que, dans la courbe enveloppe, deux tangentes menées du même point sont coupées par une troisième tangente en parties réciproquement proportionnelles; ce qui est une propriété connue de la parabole du second degré. D'ailleurs, puisque la courbe D'O'F' forme le contour apparent de la surface, sur le plan vertical, il faudra *ponctuer* les parties des génératrices qui se trouveront au delà de ce contour apparent; ainsi la droite (GMH, G'M'H'), par exemple, sera visible sur le plan vertical dans la portion G'M', et invisible dans la portion M'H' : en outre, le point de contact M', qui sépare ces parties, se trouvera nécessairement projeté en M sur la diagonale DF. En effet dans la parabole D'O'F', on aura, par le principe rappelé ci-dessus,

$$G'M' : M'H' :: C'H' : H'D' :: 11 : 5;$$



mais, dans le losange CDEF, on a aussi évidemment

$$GM : MH :: GF : DH :: 11 : 5;$$

d'où l'on conclut G'M' : M'H' :: GM : MH, et, par conséquent, le point M' se projette en M. Cette circonstance, qui se reproduit pour toutes les génératrices, prouve que la parabole D'O'F' n'est autre chose que la section faite par le plan vertical DOF, dans le paraboloïde en question.

**569.** Maintenant, si l'on projetait ce même paraboloïde sur un plan vertical VZ'', parallèle à la diagonale CE, les directrices primitives deviendraient les droites (CD, C''D''), (EF, E''D''); et l'on prouverait, comme ci-dessus, que les projections des génératrices formeraient, par leurs intersections successives, une autre parabole C''O''E'', qui représenterait la section faite dans la surface par le plan vertical COE. Les lecteurs familiarisés avec l'application de l'analyse à la géométrie des trois dimensions reconnaîtront, dans les plans verticaux OY et OZ qui fournissent ces paraboles, *les deux plans diamétraux principaux* du paraboloïde hyperbolique, lesquels doivent se couper (n° **91**) suivant l'*axe* unique de cette surface; et, en effet, nous allons démontrer (n° **572**) que cet axe est la droite (O, O'X').

**570.** *Fig.* 120.) Le paraboloïde hyperbolique admet, comme nous l'avons vu au n° **551**, un second système de génératrices rectilignes qui sont parallèles au plan directeur Q, déterminé par les deux directrices primitives B et $B_2$, ou (CD, C'D') et (EF, C'F'); c'est ici le plan vertical *oq*. Par conséquent, ces nouvelles génératrices seront projetées horizontalement sur des parallèles à la trace *oq*; et comme elles doivent en outre s'appuyer sur deux droites du premier système A, par exemple sur (DE, D'C') et (CF, C'F'), dont les extrémités correspondent déjà (n° **566**) à des plans verticaux DC et EF parallèles à *oq*, on voit qu'il suffira de diviser en un même nombre de parties égales ces deux nouvelles directrices (DE, D'C'), (CF, C'F'), puis de joindre ensemble les points de division 0 et 16, 1 et 15, 2 et 14, 3 et 13,...; par là, on obtiendra les diverses génératrices du système B, savoir :

$$(CD, C'D'),\ldots,\ (gMh, G'M'H'),\ldots,\ (FE, F'C').$$

**571.** Ces droites du système B se confondront en projection verticale avec celles du système A déjà construites; car, dans le losange CDEF, il est évident que les points G et *g*, H et *h* se trouveront deux à deux sur des perpendiculaires à la ligne de terre. Ainsi, les projections verticales de ces génératrices B seront encore tangentes à la parabole principale D'O'F'; mais les parties visibles, comme (M*h*, M'H'), tomberaient sur les parties ponctuées des génératrices A, et réciproquement. C'est pourquoi, afin de laisser subsister pour l'œil la distinction des deux nappes *antérieure* et *postérieure* au plan vertical DOF, nous n'avons pas voulu représenter les génératrices du système B comme réellement existantes, mais nous les avons marquées seulement en lignes mixtes sur le plan horizontal.

Une coïncidence analogue aura lieu sur le plan vertical VZ'', où les génératrices du système B se trouveront aussi tangentes à la parabole principale C''O''E''.

**572.** Pour trouver le *sommet* et l'*axe* du paraboloïde hyperbolique, il faut emprunter à l'analyse, ou bien admettre comme des définitions qu'il est loisible de poser, les relations suivantes : L'AXE *du paraboloïde est une droite parallèle aux deux plans directeurs* P *et* Q, *et telle, qu'elle coupe la surface en un point par lequel passent deux génératrices qui sont l'une et l'autre perpendiculaires à cet axe : ce point est d'ailleurs appelé* SOMMET (n° **91**). D'après cela, on voit que, pour des données quelconques, il faudra généralement mener un plan $\pi$ perpendiculaire à P et Q, puis chercher, par le n° **565**, les deux génératrices qui sont parallèles à $\pi$. Alors le point de rencontre de ces deux droites sera le sommet demandé, et une perpendiculaire à $\pi$ menée par ce point, sera l'axe de la surface.

(*Fig.* 120.) Mais ici, nous avons adopté (n° **566**) les données les plus symétriques, il est clair que l'axe du paraboloïde est vertical, et que par le point (O, O′) il passe deux génératrices horizontales (K′O′I′, KOI) et (K′O′I′, $kOi$); donc le point (O, O′) est le sommet demandé, et, par suite, l'axe est la droite (O, C′O′X′).

Parmi les conditions admises au n° **566**, il y en a une seule qu'on ne sera pas toujours maître de remplir, c'est celle qui suppose que les deux directrices données sont *également inclinées* sur le plan horizontal, choisi comme nous l'avons fait. Lorsque cette relation ne sera pas vérifiée, il en résultera seulement que les points D′ et F′ ne se trouveront plus à la même hauteur, et que le centre O du losange CDEF, formé comme il a été dit (n° **566**), ne sera plus la projection du sommet de la surface; mais alors on obtiendra ce sommet par la méthode générale, ou, plus simplement, en menant à la parabole D′O′F′ *une tangente horizontale*. D'ailleurs, on pourra aussi se procurer deux directrices telles que nous les avons admises, en conduisant à cette parabole deux tangentes également inclinées sur la verticale; et en regardant ces droites comme deux génératrices du paraboloïde, on trouvera aisément leurs projections horizontales, qui serviront alors à former le losange dont le centre répondra exactement au sommet de la surface.

**573.** Pour manifester clairement la forme inverse des deux nappes du paraboloïde, qui sont l'une au-dessus, l'autre au-dessous du sommet unique (O, O′) où elles se réunissent sans discontinuité, coupons cette surface par divers plans perpendiculaires à l'axe (O, C′O′X′). Soit L′R′ un de ces plans; il rencontre les projections verticales des génératrices que nous avons construites, en des points que l'on projettera sur le plan horizontal, et qui formeront une courbe composée de deux branches indéfinies, mais séparées, LM$l$, RN$r$. Cette courbe est nécessairement une hyperbole (n° **562**) dont l'axe réel est ici (MN, M′N) : mais si le plan sécant était au-dessous du sommet, comme T′W′, alors la section, qui serait encore (n° **562**) une hyperbole TUW, *tuw*, aurait pour axe réel la droite (U$u$, U′); et si ce plan sécant passait précisément par le sommet (O, O′), la section se réduirait aux deux droites (KOI, K′I′) et ($kOi$, K′I′) dont les projections horizontales sont les asymptotes communes aux deux sections précédentes.

**574.** *Le plan tangent* pour un point quelconque du paraboloïde, donné par sa projection horizontale $\lambda$, s'obtiendra en menant les génératrices $\lambda\alpha$ et $\lambda\beta$, respectivement parallèles à DE et DC; puis, si l'on projette sur le plan vertical les deux points où chacune de ces droites ira couper les côtés opposés du losange CDEF, on trouvera ainsi les projections verticales de ces génératrices, et il restera à faire passer un plan par ces deux droites. Nous n'effectuerons pas ici ces constructions, dans la crainte de rendre l'épure un peu confuse; mais elles n'offriront aucune difficulté pour le lecteur.



## CHAPITRE IV.

### DES PLANS TANGENTS AUX SURFACES GAUCHES GÉNÉRALES.

L'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique sont, parmi les surfaces gauches, les plus simples que l'on puisse concevoir, puisque *toutes leurs directrices* sont *rectilignes;* aussi ce sont les seules dont l'équation ne s'élève pas au delà du second degré, et, pour cette raison, on les appelle *les deux surfaces gauches du second degré*. Comme la construction de leurs plans tangents est facile, on a cherché à y ramener la solution des questions semblables pour les surfaces gauches générales, et l'on y est parvenu au moyen du lemme suivant.

**575.** LEMME. (*Fig.* 116.) *Lorsque deux surfaces gauches* S *et* S′ *ont une génératrice commune* GLMN, *et qu'elles* SE TOUCHENT *en trois points* L, M, N *de cette droite, alors ces deux surfaces* SE RACCORDENT *complétement tout le long de cette génératrice;* c'est-à-dire que, pour chaque point de cette droite, le plan tangent est commun à l'une et à l'autre surface.

Puisqu'en L les deux surfaces ont un plan tangent commun, et qu'il en est de même aux points M et N, trois plans quelconques menés par ces points couperont les surfaces S et S′ suivant des courbes respectivement tangentes,

$$\mathrm{A}a,\ \mathrm{B}b,\ \mathrm{C}c,\quad \text{et}\quad \mathrm{A}'a',\ \mathrm{B}'b',\ \mathrm{C}'c',$$

dont les trois premières pourront être adoptées pour *directrices* de la droite mobile G, quand elle décrit la surface S, tandis que les trois autres courbes seront les directrices relatives à S′. Cela posé, je fais glisser la génératrice G sur les trois directrices A$a$, B$b$, C$c$, et je l'amène dans une position infiniment voisine *glmn* : cette droite mobile n'aura pas cessé d'être en même temps sur la seconde surface S′, parce que les courbes directrices de celles-ci, qui sont tangentes aux autres, ont de commun avec elles les éléments linéaires L$l$, M$m$, N$n$; donc les droites G et $g$, ainsi que toutes les positions intermédiaires de la génératrice, sont communes aux surfaces S et S′, ce qui permettrait déjà de conclure que ces surfaces ayant de commun *l'élément superficiel* compris entre G et $g$, et indéfini en longueur, elles *se touchent* tout le long de la droite G. Mais pour établir encore plus clairement cette conséquence, coupons les surfaces S et S′ par un quatrième plan arbitraire, mené par le point quelconque H : alors les sections seront deux courbes D$d$ et D′$d'$, qui passeront nécessairement par les deux points H et $h$, où ce plan sécant rencontrera les