tisferont au problème, puisqu'ils seront tangents quelque part à la surface (nº 545). D'ailleurs, comme le plan DMA renfermera évidemment la génératrice M'B', qui a un point M' dans ce plan, et qui nécessairement rencontre MA, et que l'autre plan DMB contiendra semblablement la génératrice M'A', on voit que les points de contact α et β de ces plans tangents seront fournis immédiatement par la rencontre de MA avec M'B', et de MB avec M'A'.

591. Il résulte de là que le problème en question sera impossible, toutes les fois que la droite D ne rencontrera pas l'hyperboloïde. Cependant, il ne faut pas comprendre dans cette exclusion le cas où cette droite, venant à coïncider avec une arête du cône asymptote, se trouverait elle-même asymptote de la surface : alors le plan tangent demandé serait celui qui touche ce cône le long de la droite D.

592. Considérons enfin le cas où le plan tangent cherché doit être *parallèle à un plan donné* π. Si la surface gauche S est quelconque, il faudra encore recourir à la marche générale du nº **421**; mais on pourra y substituer les méthodes suivantes, lorsque la surface sera du second degré.

593. Pour un *hyperboloïde* gauche, on cherchera, comme au nº **548**, les génératrices A et B, A' et B', qui, dans les deux systèmes, se trouvent parallèles au plan π; on sait que les deux premières seront parallèles entre elles, et que les deux autres offriront une relation semblable. Alors le plan conduit par les droites A et B', ainsi que celui qui passera par B et A', satisfera évidemment au problème, puisqu'ils renfermeront chacun deux droites parallèles à π et qui se coupent. D'ailleurs, les points de contact seront immédiatement fournis par la rencontre des génératrices A et B', B et A'; et le problème pourra admettre deux solutions, ou une seule, ou aucune, suivant la discussion faite au nº **547**.

594. Pour un *paraboloïde* gauche, on trouvera encore plus facilement par le nº **565**, les deux *seules* génératrices A et B qui, dans les deux systèmes, sont parallèles au plan π; et comme ces deux droites ne sauraient être ici parallèles entre elles (nº **554**, 3º), le plan conduit suivant ces deux lignes sera bien parallèle à π, et fournira la solution *unique* du problème actuel. D'ailleurs, le point de contact de ce plan tangent sera donné immédiatement par la rencontre des génératrices A et B.

On aurait pu se contenter de construire une seule A de ces génératrices, puis de mener par celle-ci un plan parallèle à π; mais alors il resterait à trouver le point de contact de ce plan tangent, en cherchant la seconde branche de son intersection avec le paraboloïde, laquelle serait précisément la génératrice B. Le problème peut être impossible ou indéterminé, selon ce que nous avons dit au nº **565**.

595. THÉORÈME. (*Fig.* 118.) *Dans toute surface gauche* S, *les diverses normales* MN, M'N', M''N'',..., *menées par tous les points d'une même génératrice* G, *forment toujours un paraboloïde hyperbolique.*

Si l'on désigne par Σ la surface lieu de toutes ces normales, et qu'on lui fasse faire un quart de révolution autour de la droite G, chaque normale MN, qui est déjà perpendiculaire à cet axe de rotation, décrira un plan et se rabattra suivant une droite MT, qui formera des angles droits avec GM et MN; par conséquent, MT se trouvera dans le plan tangent de la surface S. D'ailleurs, comme ce déplacement simultané de toutes les normales altère seulement la position de la surface Σ, et non sa forme, il suffira d'examiner quelle est la nouvelle surface Σ' produite par les diverses droites MT, M'T', M''T'',..., qui sont *tangentes* à S, et qui satisfont en outre à la condition d'être toutes *perpendiculaires à la génératrice* G.

Pour cela, je fais glisser la droite G sur trois quelconques de ces tangentes, savoir : MT, M'T', M''T''; et, comme ces directrices sont évidemment parallèles à un même plan, je forme ainsi un paraboloïde (nº **553**) qui, ayant les mêmes plans tangents que la surface S aux points M, M', M'', *touchera* cette surface (nº **575**) tout le long de GMM'. Or je dis que les autres tangentes M'''T''',..., sont pareillement situées sur ce paraboloïde; car si je le coupe par un plan perpendiculaire à GM et mené par le point M''', on sait (nº **551**) que la section sera *une droite* M'''R qui, à cause du *raccordement* établi entre S et le paraboloïde, se trouvera contenue dans le plan tangent de la surface primitive S, c'est-à-dire dans le plan GM'''T''' : d'où il suit que les deux droites M'''R et M'''T''' coïncideront entièrement, puisqu'elles seront l'une et l'autre perpendiculaires à GM''', et placées toutes trois dans un même plan GM'''T'''. Donc M'''T''' est bien située sur le paraboloïde que nous avons construit avec les trois premières tangentes. D'ailleurs, comme ce raisonnement s'appliquerait à toutes les autres tangentes de S, perpendiculaires à la génératrice G, il demeure prouvé que la surface Σ', lieu de ces tangentes, est un paraboloïde hyperbolique; et la même conclusion s'étend à la surface Σ, formée par les normales MN, M'N',..., puisque celle-ci ne diffère de Σ' que par sa position dans l'espace (*).

Ce théorème, remarquable par sa grande généralité, puisqu'il subsiste pour toutes les surfaces gauches, servira à assigner la nature des *joints* normaux dans les voûtes où la *douelle* sera gauche, et à prévoir aussi la forme des sections faites dans ces joints par ces divers plans.

CHAPITRE V.

EXEMPLES DIVERS DE SURFACES GAUCHES.

§ 1er. *Conoïde droit.*

596. (*Fig.* 121.) Nous avons dit (nº **520**) qu'un *conoïde* était la *surface engendrée par une droite mobile, qui s'appuie constamment sur* UNE DROITE *et sur une courbe fixes, en demeurant parallèle à un plan donné.* Ici, nous prendrons ce plan directeur pour le plan horizontal de projection, et pour directrices, l'ellipse (AZ'H, AH) et la verticale (O'Z', O); cette dernière étant perpendiculaire au plan directeur, le conoïde sera *droit*. Les diverses génératrices se construiront bien aisément, puis-

(*) Cette démonstration fort simple, et purement synthétique, est due à M. *J. Binet*.

qu'il suffira de conduire un plan horizontal arbitraire B′G′, qui coupera l'axe au point (O, O″) et l'ellipse au point (B′B), (G′G); puis, en joignant ces points, on trouvera (OB, O″B′) et (OG, O″G′) pour deux génératrices du conoïde, et les autres s'obtiendront d'une manière semblable.

597. Il est certain que cette surface sera *gauche;* car, quelque rapprochés que soient deux points B′ et C′ pris sur la directrice, les génératrices correspondantes (BO, B′O″) et (CO, C′O″) ne seront point parallèles, puisque leurs projections horizontales se coupent en O : et d'ailleurs ces génératrices ne pourront se couper dans l'espace, attendu qu'elles sont situées dans des plans horizontaux différents. En outre, il faut observer que ces droites, prolongées indéfiniment, formeront une seconde nappe projetée dans l'espace angulaire aOh; et que la verticale (O, O′Z′), suivant laquelle se coupent les deux nappes de la surface, sera une *ligne de striction*, attendu qu'elle indiquera la direction de la plus courte distance entre deux génératrices quelconques.

598. Le plan tangent de ce conoïde, pour un point (M, M′) donné sur une génératrice, s'obtiendra en appliquant ici la méthode générale indiquée au nº **580**. Je trace donc la tangente B′T au point de l'ellipse où aboutit la génératrice en question (OMB, O″M′B′); et, comme l'autre directrice (O, O′Z′) est une droite qui est elle-même sa propre tangente, je la conserve, et je fais glisser sur cette verticale O et sur la tangente B′T la génératrice (OMB, O″M′B′), toujours horizontale : par là, j'obtiens un *paraboloïde de raccordement*, dont une seconde génératrice du même système est évidemment la droite TO, tracée dans le plan horizontal de projection. Alors, je coupe les deux génératrices OT et (OMB, O″M′B′) par le plan vertical MP, évidemment *parallèle aux deux directrices*, lequel devra donner (nº **551**) pour section dans le paraboloïde *une droite* du second système, qui sera (MP, M′P′). Cela posé, le plan qui passera par les deux droites (MP, M′P′) et (MB, M′B′), situées l'une et l'autre sur le paraboloïde, sera bien le plan tangent de cette surface auxiliaire, et aussi du conoïde proposé, puisque ces deux surfaces se raccordent (nº **576**) tout le long de la génératrice (OMB, O″M′B′). Or il est facile de voir que ce plan aura pour trace horizontale la droite $P\alpha$, parallèle à MB, et pour trace verticale la droite $\alpha B'$, qui doit se trouver aussi parallèle à M′P′; ainsi, $P\alpha B'$ est le plan tangent du conoïde pour le point (M, M′).

599. Si l'on voulait avoir le plan tangent relatif à un autre point (N, N′) situé sur la même génératrice, le paraboloïde déjà construit servirait encore; il suffirait de le couper par le plan vertical NQ, parallèle aux deux génératrices, et la section, qui serait la droite (NQ, N′Q′), combinée avec la génératrice (NB, N′B′), fournirait le plan Q$\mathfrak{S}$B′ pour celui qui touche le conoïde en (N, N′). On reconnaît ici que les divers plans tangents de cette surface, le long de la génératrice (OB, OB″), sont bien distincts les uns des autres, quoiqu'ils contiennent tous cette génératrice; et, par suite, leurs traces horizontales sont toutes parallèles à OB. Enfin, si l'on assignait le point de contact en (O, O″), le plan tangent deviendrait le plan vertical OBB′.

600. Il est bon d'observer que toutes les droites B′T, M′P′, N′Q′,..., doivent aller rencontrer la verticale O′Z′ en un même point que j'appellerai ω'; car ce sont les projections d'autant de génératrices du paraboloïde, appartenant au second système, et qui doivent toutes s'appuyer sur la génératrice du premier mode (OO′ω'). D'ailleurs, comme les droites M′P′, N′Q′,..., seraient évidemment les tangentes des sections faites dans le conoïde par les plans verticaux MP, NQ,.. ., la relation précédente s'accorde bien avec la nature de ces courbes, qui sont ici des ellipses ayant toutes *un axe commun* O′Z′. Elles se construiraient aisément, en projetant sur le plan vertical les points où chaque plan, tel que MP, rencontre les diverses droites OA, OB, OB′,..., du conoïde.

§ 2. *Conoïde circonscrit à une sphère*

601. (*Fig.* 123.) Imaginons *une droite mobile qui, restant toujours horizontale, s'appuie sur une droite fixe* (AH, A′H′) *et sur une sphère* (RI, O′I′) *à laquelle elle demeure tangente :* la surface ainsi décrite sera encore un conoïde, dans lequel la directrice curviligne sera remplacée par une surface que devront toucher les diverses génératrices. Pour obtenir ces dernières, on mènera un plan horizontal quelconque C′S′, qui rencontre la droite fixe au point (C, C′), et coupe la sphère suivant un cercle du rayon K′S′; alors, en conduisant à la projection horizontale de ce cercle les deux tangentes CM et Cm, ce seront deux génératrices du conoïde, qui seront projetées verticalement suivant la droite unique C′m'. D'ailleurs, si l'on projette sur cette dernière droite les points de contact M et m en M′ et m', puis si l'on répète des opérations semblables pour tous les plans horizontaux qui peuvent couper la sphère donnée, on obtiendra une courbe fermée

(RLMNPQR$qpnml$R, R′L′M′N′P′Q′R″$q'p'n'm'l'$R′)

pour la ligne de contact de la sphère avec le conoïde circonscrit : cette courbe, si elle avait été connue primitivement, aurait pu remplacer la sphère directrice.

602. Afin d'obtenir plus de netteté dans notre épure, nous avons supposé ici que les génératrices du conoïde étaient terminées à leurs points de contact avec la sphère, ce qui laisse *visible* toute la partie de cette surface, située au delà de la courbe de contact par rapport à la droite (AH, A′H′); mais, en deçà de cette droite, il existe une seconde nappe du conoïde, dont la partie *supérieure* et *visible sur le plan horizontal* se trouve formée par les prolongements Bλ, Cμ, Dν,..., des génératrices *inférieures* Bl, Cm, Dn,..., de l'autre nappe, et réciproquement. D'ailleurs, pour compléter le contour apparent du conoïde sur le plan horizontal, il faudrait tracer les courbes *enveloppes* des droites AR, Bl, Cm,..., et GR, FQ, EP,...; courbes qui seraient fournies immédiatement par les intersections successives de ces génératrices, si, en les multipliant davantage, nous n'avions pas craint de jeter quelque confusion dans l'épure.

603. Ici, la droite (AH, A′H′) n'est plus une ligne de *striction*, comme cela arrivait dans l'exemple du nº **597**; mais, par les raisons citées dans cet article, on verra que la surface actuelle est encore *gauche*, aussi bien que *tous les conoïdes*.

604. Cherchons le plan tangent relatif à un point quelconque (V, V′) situé sur la génératrice (CM, C′M′); et comme ici la seconde directrice est une surface et non une courbe, employons la méthode du n° **581**. Je construis donc, d'abord, une tangente de la sphère au point (M, M′), et, pour plus de simplicité, j'adopte la tangente du méridien, qui est évidemment (RMT, Z′M′T′); puis, en faisant glisser sur cette tangente et sur la directrice rectiligne (AH, A′H′) la droite (CM, C′M′), toujours horizontale, je forme un paraboloïde qui *raccordera* (n° **576**) le conoïde tout le long de cette génératrice : d'ailleurs, une seconde position de cette droite mobile sera évidemment la ligne TH, située dans le plan horizontal de projection. Cela posé, je mène par le point (V, V′) un plan parallèle aux deux directrices (AH, A′H′) et (MT, M′T′); ce plan, qui a pour trace horizontale la ligne XY, facile à trouver, doit donner, dans le paraboloïde, une section rectiligne (n° **551**), laquelle est, par conséquent, la droite (αV, α'V′) : alors cette droite, jointe à (CVM, C′V′M′), déterminera un plan $\alpha\beta\gamma$, qui sera tangent au paraboloïde, et aussi au conoïde primitif dans le point (V, V′).

605. Ce plan, quoique tangent au conoïde, doit couper cette surface (n^os^ **512** et **583**); et l'intersection totale se composera de la droite (CVM, C′V′M′) et d'une courbe passant par le point (V, V′), laquelle s'obtiendra aisément en cherchant les points de rencontre du plan $\alpha\beta\gamma$ avec les diverses génératricss du conoïde que nous avons construites.

§ 3. *Le Biais passé, dit Corne de vache.*

606. (*Fig.* 122.) Cette surface, employée quelquefois à voûter un *passage biais* compris entre deux plans verticaux parallèles AC et BD, a pour génératrice une droite mobile qui s'appuie constamment : 1° sur le cercle vertical (AZ′B, AB); 2° sur un second cercle (C′Z′D′, CD), égal et parallèle au premier; 3° sur une droite O′OO″, perpendiculaire aux deux cercles précédents, et menée par le centre O du parallélogramme ABCD. Pour construire les diverses positions de la génératrice mobile, on mènera par la droite OO′ un plan quelconque OO′K′; il coupera les deux cercles aux points (K′, K), (L′, L), et en les joignant par une droite (KL, K′L′), ce sera une génératrice de la surface en question. De même (M′N′O′, MNO″) sera une autre position de la droite mobile; et, quand cette ligne viendra passer par les deux points des circonférences qui sont projetées en Z′, elle se trouvera horizontale, et ne rencontrera plus la directrice OO′ qu'à l'infini. Au delà de cette position, la génératrice mobile s'inclinera en sens contraire, et ira couper la directrice OO′ derrière le plan vertical (*).

(*) Il y aurait, à la vérité, un autre moyen de faire remplir à la droite mobile la condition de s'appuyer constamment sur les trois directrices assignées. Car, si cette droite, passant toujours par le point fixe O, glissait sur le demi-cercle *supérieur* (AZ′B, AB), elle rencontrerait nécessairement aussi la moitié *inférieure* du second cercle, et réciproquement; de sorte que la surface ainsi produite serait un cône du second degré. Mais, comme on aperçoit bien que la position de cette surface n'est point propre à former une voûte qui recouvre l'espace ACDB, nous négligeons ici ce mode de génération.

607. La surface ainsi produite est *gauche*. En effet, pour passer de la position (M′N′O′, MNO″) à une position infiniment voisine, la génératrice peut être censée glisser sur les deux tangentes M′T′ et (N′V′, NV) : et comme évidemment ces tangentes ne sont pas dans un même plan, il en arrivera autant pour deux génératrices voisines. D'ailleurs, deux génératrices quelconques se trouvent dans des plans menés suivant OO′, et ne pourraient se couper que sur cette droite; or elles vont la rencontrer en des points différents, comme on le voit par les projections horizontales BD, KL, MN,.... Il est bon d'observer que ces diverses projections formeront, par leurs intersections successives, une courbe enveloppe de toutes ces droites, et qui sera le contour apparent de la surface sur le plan horizontal. Quant à la nature de cette courbe, et à l'équation de la surface elle-même, on pourra consulter l'*Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions*, chapitre XV.

608. Construisons le plan tangent de cette surface gauche, pour le point (G, G′) donné sur la génératrice (MNO″, M′N′O′); et pour cela, formons d'abord un paraboloïde auxiliaire ayant pour directrices trois tangentes de la surface qui soient *parallèles à un même plan* (n° **579**). Deux de ces directrices seront les tangentes M′T′ et (N′V′, NV); la troisième doit être une droite parallèle au plan vertical, et menée par le point O″ dans le plan qui touche la surface en ce point. Or ce plan tangent, devant contenir la droite O″O′ et la génératrice (MNO″, M′N′O′), est précisément le plan O″O′M′; et, par suite, la troisième directrice du paraboloïde auxiliaire est (O″μ, O′M′).

Cela posé, je fais glisser sur ces trois directrices la droite mobile (MNO″, M′N′O′), et je cherche la position qu'elle prend, lorsqu'elle arrive au point (V′, V) par exemple. Pour cela, je conduis par ce point et par la directrice (O″μ, O′M′) un plan dont la trace horizontale est évidemment O″Vα, et la trace verticale une droite $\alpha\beta'$, parallèle à O′M′; puis, comme ce plan rencontre la première directrice M′T′ au point (β', β), j'en conclus que (βVγ, β'V′γ') est une seconde position de la génératrice (MNO″, M′N′O′) du paraboloïde auxiliaire. Maintenant, je coupe ces deux lignes par le plan vertical GH, parallèle aux trois directrices, et la droite (GH, G′H′) est une génératrice (n° **551**) appartenant au second mode de génération du paraboloïde; par conséquent, le plan qui passera par les droites (GH, G′H′) et (MNO″, M′N′O′), savoir O″PM′, sera bien le plan tangent du paraboloïde, et aussi de la surface gauche proposée, pour le point en question (G, G′). On observera que la trace PM′ doit se trouver précisément parallèle à la projection verticale G′H′ d'une des droites que contient ce plan.

S'il fallait (comme dans la *Stéréotomie*, n° **660**) trouver la tangente au point (G, G′) de la section faite dans cette surface par un plan vertical XY, parallèle aux cercles de tête, on n'aurait pas besoin d'achever la construction du plan tangent; car la droite (GH, G′H′), qui doit être dans ce plan tangent, et qui se trouve déjà dans le plan de la courbe, serait évidemment la tangente demandée.

609. De là on conclura aisément la normale de la surface gauche au point (G, G′); et en construisant de même les autres normales pour divers points de la portion (M'N', MN) de la génératrice, on obtiendrait un paraboloïde hyperbolique (nº **595**), qui serait propre à former *le joint normal* de cette petite voûte.

§ 4. *Des Hélicoïdes gauches.*

610. (*Fig.* 124.) Après avoir construit une hélice à base circulaire (ABCD..., A'B'C'D'H'A''H''), imaginons *une droite mobile* (AO, A'a') *qui glisse sur cette hélice et sur son axe* (O, O'Z'), *en formant d'ailleurs un angle constant avec cet axe :* nous produirons ainsi *un hélicoïde* qu'il ne faut pas confondre avec *l'hélicoïde développable* déjà considéré au nº **456**; car celui dont il est ici question est *gauche*, comme nous allons le démontrer, après avoir appris à construire les diverses positions de sa génératrice.

611. Pour obtenir celle qui passera par le point quelconque (F, F') de l'hélice, prenons sur l'axe vertical un intervalle $a'f'$, égal à la différence de niveau des points (F, F') et (A, A'), et la droite (F'f', FO) sera la génératrice demandée; car elle formera, avec l'axe et le rayon du cylindre qui aboutirait au point (F, F'), un triangle rectangle évidemment égal à A'a'O' : de sorte que les angles aux sommets de ces deux triangles seront bien les mêmes, comme l'exige la loi de mouvement citée plus haut. Mais, pour rendre cette opération plus uniforme et plus simple, on observera que le tracé de l'hélice primitive a déjà conduit (nº **451**) à diviser la circonférence ABCH... et *le pas* de l'hélice A'A'' en un même nombre de parties égales, ici *quatorze;* par conséquent, si l'on commence par marquer sur l'axe vertical, à partir du point a', des intervalles $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'e'$, $e'f'$, ..., tous égaux aux divisions du pas de l'hélice, il n'y aura plus qu'à joindre par des droites les points correspondants B' et b', C' et c', D' et d',..., pour obtenir les projections verticales B'b', C'c', D'd', ..., des diverses génératrices projetées horizontalement sur les rayons BO, CO, DO, ...

612. D'après cette construction, il est évident que deux génératrices, quelque rapprochées qu'elles soient, ne se trouveront jamais dans un même plan. Car, 1º elles ne sont point parallèles, puisque leurs projections horizontales se coupent en O; 2º elles ne se coupent pas, puisque les points situés sur la verticale O y seront placés à des hauteurs différentes : donc cet hélicoïde est une *surface gauche*.

613. Puisque les divers triangles rectangles formés par chaque génératrice avec l'axe et le rayon du cylindre qui aboutit au point correspondant de l'hélice, sont (nº **611**) tous égaux à A'a'O', il s'ensuit que la portion de la droite mobile, comprise entre l'axe et l'hélice directrice, conserve toujours la même longueur; par conséquent, on peut aussi regarder l'hélicoïde gauche qui nous occupe, comme engendré par *une droite de longueur constante* (AO, A'a') *qui glisse sur une hélice à base circulaire et sur son axe*.

614. Dans ce mouvement, où la longueur de la génératrice et son inclinaison sur l'axe demeurent invariables, il est évident qu'un point quelconque (α, α') de cette droite mobile, reste à une distance constante αO de l'axe vertical (O, O'Z'),

c'est-à-dire que ce point se meut sur le cylindre droit qui a pour base le cercle $\alpha\beta\gamma$.... En outre, comme les deux extrémités de la génératrice s'élèvent, à la fois, d'une quantité égale $a'b'$, ou $a'c'$, ou $a'd'$, ..., il en sera de même du point (α, α'), dont les ordonnées verticales, *comptées à partir du plan horizontal* $\alpha'\omega'$, seront toujours égales aux ordonnées du point (A, A') au-dessus du plan A'O'. Or celles-ci sont, par la nature de l'hélice que parcourt le point (A, A'), proportionnelles aux arcs AB, AC, AD,..., ou bien aux arcs $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$,...; donc aussi ces derniers sont proportionnels aux ordonnées des positions qu'occupe le point (α, α') au-dessus du plan horizontal $\alpha'\omega'$, lorsqu'il se projette successivement en β, γ, δ,... : par conséquent (nº **446**), *la courbe*

$$(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda\ldots,\ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\lambda'\pi'\alpha''\beta''\gamma''\lambda''),$$

décrite par un point quelconque (α, α') *de la génératrice, pendant son mouvement, est une hélice de même pas que l'hélice primitive*, mais tracée sur un cylindre concentrique au premier.

Pour construire cette hélice, il suffirait, après avoir décrit le cercle du rayon Oα, de projeter les points β, γ, δ,..., en β', γ', δ',..., sur les génératrices déjà tracées; mais, afin d'éviter la rencontre de lignes très-obliques, il vaudra mieux couper ces génératrices par des horizontales élevées au-dessus de $\alpha'\omega'$, de 1, 2, 3,..., fois l'intervalle $a'b'$.

615. D'après cette propriété, on pourrait aussi définir l'hélicoïde gauche comme engendré *par une droite qui glisse constamment sur deux hélices concentriques, de rayons inégaux, mais de même pas, et sur l'axe commun de ces deux courbes*. Par là, on assignerait trois directrices à la surface, et les autres conditions énoncées aux nºs **610** et **613** se trouveraient remplies d'elles-mêmes.

616. Il est évident que l'hélicoïde gauche admet encore *une nappe supérieure*, laquelle serait engendrée par le prolongement a'U' de la droite (a'A', OA) qui a déjà décrit *la nappe inférieure*. Cette dernière est la seule que nous ayons voulu représenter ici, afin d'en laisser voir plus distinctement la forme; toutefois, nous ferons observer que non-seulement les deux nappes auraient de commun la droite (O, O'Z'), mais *qu'elles se couperaient encore suivant une ou plusieurs hélices de même pas que l'hélice* (ABCD, A'B'C'D'...). En effet, si l'on compare deux positions de la génératrice qui soient situées dans le même méridien, telles que (AO, A'a'U') et (OH, h'H'), on voit qu'elles se coupent en un point u' commun aux deux nappes, et qui restera constamment sur l'une et sur l'autre, lorsqu'il sera entraîné par le mouvement simultané de ces deux droites autour de l'axe. Or nous avons démontré (nº **614**) que, dans ce mouvement, un point quelconque α' ou u' de la génératrice décrivait une hélice concentrique avec (ABCD, A'B'C'D'...) et de même pas que celle-ci : donc, c'est bien une telle courbe qui formera l'intersection des deux nappes de l'hélicoïde; et il existerait d'autres sections analogues, si l'on prolongeait les génératrices assez loin pour que A'a'U' rencontrât h''H'', h'''H''',..., en des points u'', u''',..., qui décriraient encore des hélices communes aux deux nappes.