617. (*Fig.* 124.) *Représentation graphique de la surface.* Elle est donnée par l'ensemble des génératrices successives que nous avons construites; et si l'on restreint l'hélicoïde à sa nappe inférieure, et que l'on termine les génératrices aux points où elles s'appuient sur l'hélice directrice (ABCD,..., A′B′C′D′...), le contour apparent de la surface, sur le plan horizontal, se réduira au cercle ABCHLA.

Quant au plan vertical de projection, le contour apparent se composera d'abord des portions A′B′C′D′G′H′L′ et P′Q′A″B″C″F″H″L″ de l'hélice directrice; puis, de diverses courbes symétriques X′Y′B′, $x'y'$L′, X″Y″B″,..., qui seront les *enveloppes* des projections verticales des génératrices. En effet, les droites A′a', B′b', C′c', D′d', formant avec l'axe O′Z′ des angles qui vont toujours en diminuant, produiront par leurs intersections successives un polygone dont la convexité sera tournée vers l'axe; et si l'on conçoit ces génératrices multipliées indéfiniment, ce polygone deviendra une courbe X′Y′B′, tangente à chacune de ces droites, et qui aura pour *asymptote* la génératrice particulière a'A′ dont l'inclinaison sur l'axe est *maximum* en projection verticale. Cette courbe touchera aussi l'axe O′Z′, qui est lui-même la projection d'une génératrice de la surface, en un certain point X′, situé entre d' et e'; puis, elle continuerait à avoir pour tangentes les prolongements des génératrices E′e', F′f', G′g', H′h', dont la dernière serait une nouvelle *asymptote*. Mais, comme ici la nappe supérieure de l'hélicoïde n'existe pas, la courbe enveloppe des génératrices se réduira à la partie comprise depuis le point X′, jusqu'au point (situé vers B′) où la génératrice de l'hélicoïde se trouve en projection verticale, tangente à la sinusoïde A′B′C′D′; seulement, dans cette dernière partie, la courbe enveloppe se confondra sensiblement avec la droite B′b'.

De même, la branche $x'y'$L′ du contour apparent se tracera en la rendant tangente à l'axe entre les points n', p', et tangente aussi aux génératrices n'N′, m'M′, l'L′, jusqu'à ce qu'elle touche la sinusoïde H′L′M′; et si l'on devait la prolonger plus loin, elle aurait pour *asymptote* la génératrice h'H′. Enfin, on opérera semblablement pour les autres branches X″Y″B″, $x''y''$L″ (*).

618. *Sections remarquables.* Si l'on coupe l'hélicoïde gauche par un plan mené suivant l'axe (O, O′Z′), on aura évidemment pour section des lignes droites, qui seront autant de positions diverses de la génératrice; et si l'on employait, pour couper la surface, un cylindre vertical $\alpha\beta\gamma\delta\lambda\pi$, concentrique avec l'hélice directrice, il résulte de ce que nous avons prouvé au n° **614**, que la section serait une autre hélice $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\lambda'\pi'$..., de même pas que A′B′C′D′L′P′....

619. Maintenant, coupons l'hélicoïde par un plan horizontal quelconque G″a''K″.

(*) Nous conseillons ici de tracer les courbes X′Y′B′, $x'y'$L′,..., en les rendant simplement tangentes à la sinusoïde et aux projections des génératrices, parce que ce procédé offrira toute la précision graphique que l'on peut désirer, en multipliant suffisamment les génératrices qui sont très-faciles à construire. Cependant, si l'on voulait déterminer *les points de contact* de cette courbe, il n'y aurait qu'à mener par chaque génératrice *un plan perpendiculaire au plan vertical;* puis, chercher le point où ce plan serait *tangent à l'hélicoïde,* en employant la méthode que nous exposerons au n° 627 : alors, la suite de tous ces points de contact appartiendrait rigoureusement au contour apparent X′Y′B′ de la surface; mais cette marche serait très-laborieuse.

Il suffira de projeter, sur le plan horizontal, les points G″, W″, ε'', S″,..., où le plan sécant rencontre les projections verticales des génératrices de la surface, et l'on obtiendra la spirale OIKSεWG..., qui s'étendrait indéfiniment, si l'on prolongeait assez loin les génératrices suivantes h''H″, l''L″,.... D'ailleurs, si la nappe supérieure (n° **616**), formée par le prolongement des droites R′r', Q′q',..., existait ici, elle serait coupée par le même plan G″a''K″, suivant une autre branche O$ik\delta$... appartenant à la même spirale, et ces deux branches auraient pour tangente commune le diamètre AOH; car les rayons OKC, OIB sont des sécantes dont les deux points de section avec la spirale se réunissent en un seul O, quand on arrive à la position OA.

620. La section que nous venons d'obtenir est *une spirale d'Archimède.* En effet, d'après la manière dont nous avons construit (n° **611**) les génératrices de l'hélicoïde, chacune de ces droites a pour différence de niveau, entre ses deux extrémités, un intervalle constant égal à O′a', qui comprend ici *six* divisions du pas de l'hélice; puis, comme les points F″, E″, D″,..., sont au-dessous du plan G″a'' de 1, 2, 3,..., de ces divisions, il en résulte évidemment que, dans l'espace, on a

$$\mathrm{F''W''} = \tfrac{1}{6}\mathrm{F''}f'', \quad \mathrm{E''}\varepsilon'' = \tfrac{2}{6}\mathrm{E''}e'', \quad \mathrm{D''S''} = \tfrac{3}{6}\mathrm{D''}d'', \ldots.$$

Or, les projections horizontales de ces droites devant être divisées dans le même rapport, on aura aussi

$$\mathrm{FW} = \tfrac{1}{6}\mathrm{FO}, \quad \mathrm{E}\varepsilon = \tfrac{2}{6}\mathrm{EO}, \quad \mathrm{DS} = \tfrac{3}{6}\mathrm{DO}, \ldots,$$

ou bien

$$\mathrm{OI} = \tfrac{1}{6}\mathrm{OB}, \quad \mathrm{OK} = \tfrac{2}{6}\mathrm{OC}, \quad \mathrm{OS} = \tfrac{3}{6}\mathrm{OD}, \ldots.$$

D'après cela, on voit que, pour un point quelconque W de la spirale, on aurait la relation générale

$$\frac{\mathrm{OW}}{\mathrm{OF}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AG}}, \quad \text{ou} \quad \frac{\rho}{\mathrm{R}} = \frac{u}{\frac{6}{7}\pi},$$

en appelant ρ le rayon vecteur de ce point, u l'angle correspondant mesuré dans le cercle qui a pour rayon l'unité, et R le rayon donné OA. Ainsi, puisque l'équation précédente prouve que ρ et u croissent proportionnellement, la courbe est bien *une spirale d'Archimède;* mais pour y introduire, suivant l'usage, le rayon vecteur constant R′ qui correspond à la première révolution totale, il n'y aura qu'à prendre

$$\mathrm{R'} = \tfrac{14}{6}\mathrm{R}, \quad \text{et il viendra} \quad \rho = \mathrm{R'}\frac{u}{2\pi}.$$

La fraction $\frac{14}{6}$ exprime ici le rapport du pas de l'hélice A′A″, avec la hauteur O′d' que nous nous sommes donnée arbitrairement, pour fixer la première génératrice de l'hélicoïde gauche.

621. (*Fig.* 124.) *Du plan tangent pour un point donné* sur une génératrice quelconque (DO, D′d'). Supposons d'abord que le point assigné soit (D, D′), situé sur l'hélice directrice : alors, en tirant la droite DT égale à l'arc AD, et perpendiculaire à ce point (δ, δ'), il faudrait (nos **621** et **622**) tirer, dans le triangle ODT, la droite $\delta\theta$ perpendiculaire sur δO, puis prendre $\delta\xi$ égale à DV, et la ligne $\theta\xi$ serait la trace de ce plan tangent sur le plan de naissance $\alpha'\omega'$ de l'hélice passant par (δ, δ'). Or il est évident que, d'après les constructions employées ci-dessus, la ligne $\theta\xi$ se trouvera parallèle à Vt; ainsi, le plan donné et le plan tangent pour le point (δ, δ') auront leurs traces horizontales parallèles, et, comme ils passent tous les deux par la droite (ODV, d'D'V'), ils coïncideront certainement l'un avec l'autre.

628. HÉLICOIDE *à plan directeur.* La définition générale du n° **610** suppose que *la droite mobile glisse sur une hélice et sur son axe, en formant avec ce dernier un angle constant*, mais quelconque : lorsque cet angle est *droit*, toutes les positions de la génératrice se trouvent évidemment *parallèles au plan horizontal* qui devient ainsi un *plan directeur* de la surface; et celle-ci, toujours *gauche*, rentre alors dans le genre des conoïdes droits (n° **520**). Il est facile de voir comment toutes les propriétés reconnues dans l'hélicoïde gauche général se reproduiront, avec des simplifications remarquables, dans l'hélicoïde particulier qui nous occupe; c'est pourquoi nous nous contenterons d'indiquer la forme de ce dernier, en employant un seul plan de projection, comme dans la *fig.* 126, qui doit nous servir plus tard à représenter *une vis*. On y aperçoit l'hélice directrice ABCDE..., et les diverses positions Ao, B1, C2,..., de la droite mobile; puis, on démontrera plus facilement encore qu'au n° **614**, que tout point α de la génératrice décrit *une hélice* $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$... *concentrique avec la première*, et qui a *le même pas* et *le même plan de naissance* que celle-là.

629. Quant au plan tangent de cet hélicoïde, pour un point assigné sur une génératrice, il se construira aussi en cherchant, comme au n° **621**, le pied de la tangente à l'hélice qui passera par le point donné; et ce pied se déterminera encore au moyen du triangle rectangle ODT de la *fig.* 124 : mais, dans le cas actuel, les traces horizontales des divers plans tangents le long de la génératrice OD, partiront des points T, θ, ζ,..., et *seront toutes parallèles* à OD, puisque cette droite *horizontale* se trouvera commune à tous ces plans.

630. (*Fig.* 124.) D'ailleurs, la droite (TO, T'α'), sur laquelle étaient situés (n° **623**) les pieds des tangentes aux diverses hélices, se réduira ici à la ligne TO tracée dans le plan horizontal; et le paraboloïde de raccordement (nos **624** et **626**) aura pour ses deux plans directeurs le plan vertical DT et le plan horizontal lui-même.

631. Enfin, le problème du n° **627** se résoudra bien simplement ici, puisque étant donnée pour trace horizontale du plan assigné, une droite $t\theta$ parallèle à OD, le point θ, où cette trace rencontrera la ligne TO, permettra de tirer la perpendiculaire $\theta\delta$, qui fera connaître le point de contact δ que l'on cherchait.

La surface dont nous parlons ici est employée, non-seulement pour former la vis à *filet rectangulaire*, mais encore dans les escaliers dits *vis à jour circulaire*, et *vis à noyau plein*.

§ 5. *De la Vis à filet triangulaire.*

632. (*Fig.* 125.) Imaginons un triangle isocèle $\alpha A \alpha'$, dont la base $\alpha\alpha'$ coïncide toujours avec une arête d'un cylindre vertical à base circulaire, et dont le plan, passant constamment par l'axe de ce cylindre, tourne uniformément autour de cette droite; puis, concevons que ce triangle s'élève en même temps de quantités proportionnelles aux espaces angulaires décrits par son plan mobile, et de telle sorte qu'au bout d'une révolution totale, le triangle générateur se soit élevé d'une hauteur égale à sa base $\alpha\alpha'$, c'est-à-dire qu'il ait pris la position $\alpha' A' \alpha''$. Alors, le solide engendré par ce triangle mobile sera le *filet* de la vis dont le cylindre primitif est le noyau.

633. Il est évident que, d'après ces conditions et le n° **446**, le sommet A du triangle décrit une hélice ABCDEFA'B'..., qui appartient à un cylindre concentrique avec le premier, et dont le pas est égal à $\alpha\alpha'$; d'ailleurs, comme les côtés Aα et Aα' rencontrent toujours l'axe, en faisant des angles constants avec cette droite, il en résulte (n° **610**) que les deux faces du filet sont des portions de deux hélicoïdes gauches, dont la *nappe supérieure* de l'un (n° **616**) forme la face *inférieure* du filet, tandis que la face *supérieure* de ce filet appartient à la *nappe inférieure* de l'autre hélicoïde.

634. Pour représenter complétement cette vis, il faudra d'abord construire (n° **451**), au moyen d'un plan horizontal que nous avons supprimé ici, la projection verticale ABCDFA'B'... de l'hélice décrite par le point A, en observant que *le pas* AA' de cette hélice doit être pris *égal à la base* $\alpha\alpha'$ du triangle donné. Ensuite, les divisions égales de ce pas, qui sont ici au nombre de *dix*, devront être reportées sur l'axe, à partir des points o et 16 où cette droite est rencontrée par les côtés Aα et Aα'; ce qui produirait en général deux séries distinctes de points de division : mais ici elles n'en forment qu'une seule, attendu que nous avons choisi le triangle A$\alpha\alpha'$, de manière que ses côtés comprissent, sur l'axe, un nombre exact des divisions du pas de l'hélice. Cela posé, en joignant le premier point de division B de l'hélice avec les points 1 et 17, le point C avec 2 et 18, le point D avec 3 et 19,..., on obtiendra évidemment les diverses positions du triangle générateur.

635. Toutefois, il faut terminer ces droites aux points β et β', γ et γ', δ et δ',..., où elles vont rencontrer le noyau cylindrique de la vis. Or, ceux-ci n'étant autre chose que les positions successives prises par les points α et α' du triangle mobile, il résulte du n° **614** que la courbe projetée sur $\alpha\beta\gamma\varphi\alpha'\beta'$... est une hélice de même pas que ABCDFA'...; par conséquent, on déterminera cette nouvelle hélice en coupant les génératrices indéfinies par des horizontales menées des points 4 et 14, 5 et 15, 6 et 16,... D'ailleurs, comme le point α' est commun aux deux triangles $\alpha A \alpha'$ et $\alpha' A' \alpha''$, il arrivera nécessairement que l'hélice $\alpha\beta\gamma\varphi\alpha'\beta'\gamma'$... sera aussi produite par les intersections des côtés Bβ' et B'β', Cγ' et C'γ',..., ce qui offrira une vérification des constructions précédentes. Cette hélice formera ainsi *l'arête rentrante* de la vis, tandis que *l'arête saillante* sera l'hélice projetée sur ABCDFA'...

636. (*Fig.* 125.) Quant au contour apparent des deux faces du filet, on doit bien observer qu'il n'est pas formé par deux génératrices rectilignes, mais par deux courbes XY et xy, qui sont (n° **617**) les *enveloppes* des projections des génératrices, et qui ont pour asymptotes les génératrices particulières $A\alpha'$ et $A'\alpha'$. Toutefois, vu que les portions des deux hélicoïdes gauches qui forment le filet sont peu étendues et assez éloignées de l'axe, les lignes XY et xy pourront être ici tracées approximativement comme *deux droites* convergentes avec $\alpha' A$ et $\alpha' A'$, et qui devront toucher, l'une les deux arcs AYB et $\alpha' X' \beta'$, l'autre les deux arcs $A' y F$ et $\alpha' x \varphi$. D'ailleurs, de ces deux branches du contour apparent, la première XY cache une partie de la seconde xy, laquelle doit alors se terminer en un point z, situé à la hauteur de α', à cause de la forme symétrique de ces deux courbes.

Ces remarques, qui s'appliquent à chaque angle rentrant du filet situé à gauche, et qui se reproduiront d'une manière *inverse* pour les angles rentrants situés à droite, suffisent sans doute pour que le lecteur se rende compte aisément des diverses ponctuations par lesquelles nous avons exprimé, sur notre épure, les parties *visibles* ou *invisibles* de la vis en question. Nous ajouterons seulement que le rectangle UVvu représente le parallélipipède qui forme la tête de cette vis.

§ 6. *De la Vis à filet carré.*

637. (*Fig.* 126.) Le filet de cette vis est engendré par un rectangle $A\alpha\lambda L$ dont le plan, qui passe par l'axe d'un cylindre droit et circulaire, tourne uniformément autour de cet axe, tandis que le rectangle s'élève le long des arêtes du cylindre, de quantités proportionnelles aux espaces angulaires décrits par son plan mobile. Il en résulte évidemment que les points A et L décrivent, dans ce mouvement, deux hélices égales, dont le pas commun AA' ou LL' peut être choisi arbitrairement, pourvu qu'il égale au moins le double de AL, afin de laisser un libre passage au filet saillant de l'écrou qui engrène avec la vis. D'ailleurs, les deux côtés $A\alpha$ et $L\lambda$, qui s'appuieront toujours sur ces hélices et sur l'axe, en coupant celui-ci sous un angle droit, engendreront des faces gauches qui appartiendront (n° **628**) à des *hélicoïdes à plan directeur;* tandis que le côté AL décrira une zone cylindrique, qui terminera extérieurement le filet de cette vis.

638. Pour représenter graphiquement la vis à filet carré, il faut d'abord construire les deux hélices de même pas ABCDEFA'F'... et LMNPQRL'R'..., en se servant (n° **451**) d'un plan horizontal que nous avons supprimé ici; puis, tracer semblablement sur le cylindre du noyau les deux autres hélices $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi\alpha'$... et $\lambda\mu\pi\rho$..., qui sont produites (n° **628**) par les points α et λ, et dont le pas commun $\alpha\alpha'$ doit égaler AA'. Ces deux dernières courbes sont les intersections du noyau de la vis avec les faces inférieure et supérieure du filet, et elles servent à limiter les portions des génératrices $B\beta$ et $M\mu$, $D\delta$ et $P\pi$, $F\varphi$ et $R\rho$,..., qui appartiennent à ces deux faces gauches. Enfin, on pourra ajouter quelques-unes des arêtes du cylindre extérieur, telles que BM, CN, DP,....

639. Parmi les diverses lignes dont nous venons de parler, le lecteur discernera aisément celles qui sont visibles de celles qui se trouvent cachées. Nous avons tracé les unes et les autres complétement dans la première spire du filet, en les ponctuant d'une manière convenable à leur position; mais, dans les autres spires, nous n'avons conservé que les lignes visibles, afin d'offrir ici un résultat tout à fait conforme à celui que présenterait au spectateur la vue de l'objet en relief.

§ 7. *Du Conoïde de la voûte d'arêtes en tour ronde.*

640. (*Fig.* 127.) En écartant les circonstances qui sont spécialement relatives à la stéréotomie, la question se réduira ici à trouver l'intersection d'un tore avec un conoïde, courbe dont les tangentes donnent lieu à des recherches nouvelles, et qui trouveront des applications utiles dans la *Coupe des pierres*. Le tore est engendré par la révolution du demi-cercle $B'C'b'$ qui, relevé dans le plan vertical $B'\omega$, tourne autour de la verticale ω, et forme la surface intérieure de la voûte principale qu'on nomme un *berceau tournant*. Une porte pratiquée dans cette première voûte, et limitée aux plans verticaux Ff et Gg qui convergent vers l'axe de la tour, est recouverte par un conoïde dont la génératrice rectiligne demeure toujours horizontale, en glissant sur la verticale ω et sur une seconde directrice formée de la manière suivante. On rectifie l'arc AOD suivant sa tangente aOa, et sur cette droite, comme grand axe, on décrit une demi-ellipse $A''C''D''$ dont le demi-axe vertical $O''C''$ est égal au rayon OB ou O'B' du tore; puis, en imaginant que cette ellipse, placée d'abord dans le plan vertical aOd, soit *roulée sur le cylindre droit* AOD, de manière que ses abscisses coïncident avec les arcs de cette circonférence, et ses ordonnées avec les arêtes verticales du cylindre, cette ellipse deviendra une ligne à double courbure projetée sur AOD, et que l'on adopte pour la seconde directrice ou pour la *base* du conoïde.

641. Cela posé, pour obtenir l'intersection de ce conoïde avec le tore, coupons ces deux surfaces par divers plans horizontaux. Celui qui passera par le point M' du méridien $B'C'b'$, coupera avec le tore suivant deux cercles décrits avec les rayons $\omega P'$ et $\omega p'$; puis, si l'on cherche sur l'ellipse les points M'' et N'' qui sont à la même hauteur que M', et que l'on prenne les arcs OP et OQ égaux aux abscisses O''P'' et O''Q'', les points P et Q seront évidemment les projections des points où la *base* du conoïde est rencontrée par le plan sécant horizontal; et, par suite, les sections faites dans cette surface seront deux droites projetées sur ωP et ωQ. Or ces droites rencontrent les deux sections circulaires en quatre points M, m, N, n, qui appartiennent à l'intersection des deux surfaces, laquelle se composera de deux branches à double courbure, projetées horizontalement sur GMOnf et FNOmg.

642. Observons, 1° qu'en prolongeant le conoïde en arrière de l'axe vertical ω, il rencontrerait une seconde fois le tore suivant deux autres branches $G_2O_2f_2$ et $F_2O_2g_2$, qui sont symétriques avec les premières et se construisent par les mêmes opérations; 2° que les deux nappes du conoïde sont censées terminées ici aux deux cylindres verticaux B′GBF…, et $b'gbf$… qu'elles coupent suivant des courbes à double courbure, qui ne sont autre chose que des ellipses roulées sur ces cylindres, et ayant toutes pour demi-axe vertical le rayon du tore : c'est ce qui résulte évidemment de la proportionnalité des arcs horizontaux BG et BF, ou bg et bf, avec les arcs OA et OD; 3° que, pour faire servir le tore et le conoïde à former une *voûte d'arêtes*, il faudrait supprimer entièrement toutes les *portions intérieures* des génératrices rectilignes et circulaires, lesquelles sont ici ponctuées comme étant invisibles.

643. (*Fig.* 127.) Il est à remarquer que chacune des courbes planes, telles que GOf, qui reçoivent la projection horizontale des courbes d'arête, est une *spirale d'Archimède*. En effet, d'après la construction qui a fourni (n° **641**) le point quelconque M, l'arc OP et la droite PM sont respectivement égaux aux abscisses O″P″ et O′P′ des deux points M″ et M′, qui répondent à une même ordonnée verticale dans l'ellipse et dans le cercle méridien du tore; or, ces deux courbes ayant un axe vertical commun, on sait que de telles abscisses sont entre elles dans le rapport du grand axe au petit axe : par conséquent, nous aurons la proportion

$$\mathrm{OP} : \mathrm{PM} :: \mathrm{OA} : \mathrm{OB}.$$

Mais, si l'on prend un arc Oλ qui soit avec OA dans le rapport ωO avec OB, nous pourrons remplacer la proportion précédente par celle-ci :

$$\mathrm{OP} : \mathrm{PM} :: \mathrm{O}\lambda : \mathrm{O}\omega;$$

et en faisant la somme des antécédents et celle des conséquents, il viendra

$$\lambda\mathrm{P} : \omega\mathrm{M} :: \lambda\mathrm{O} : \omega\mathrm{O},$$

résultat qui montre que le rapport de l'arc λP au rayon vecteur ωM demeure constant pour tous les points de la courbe GOM$f\omega$; par conséquent, cette courbe est une spirale d'Archimède, dont l'*origine* est sur le rayon $\omega\lambda$ qu'elle touche en se prolongeant suivant une autre branche $\omega\varphi$, symétrique de la première. Pour avoir *le pas* de cette spirale, c'est-à-dire le rayon vecteur qui correspond à une révolution entière, il suffira de construire une quatrième proportionnelle δ aux trois lignes suivantes : l'arc λO, la circonférence totale, et le rayon ωO; alors on pourra, selon l'usage ordinaire, compter sur la circonférence du rayon δ les arcs qui mesurent le mouvement angulaire du rayon vecteur mobile.

644. La courbe FO$g\omega\gamma$ est aussi une spirale d'Archimède dont l'origine est sur le rayon $\omega\zeta$, et qui ne coïncidera avec la précédente qu'autant que l'arc Oλ se trouvera égal à un quart de cercle; pour obtenir cette coïncidence, il suffirait de prendre la demi-ouverture OA de la porte telle, qu'elle eût avec le quart de cercle le même rapport que OB avec Oω. Enfin, les deux autres courbes $G_2O_2f_2$ et $F_2O_2g_2$ appartiennent encore à deux nouvelles spirales d'Archimède, qui

touchent les mêmes rayons $\lambda\omega\lambda_2$ et $\zeta\omega\zeta_2$, mais qui ont une situation opposée aux premières (*).

645. (*Fig.* 127.) *La tangente* en un point quelconque M sera donnée par l'intersection du plan tangent au tore avec le plan tangent du conoïde. Or le premier de ces plans a pour trace horizontale la droite VK, perpendiculaire à ωM, laquelle s'obtient en ramenant en V le pied T′ de la tangente M′T′ du méridien circulaire; quant au second plan tangent, il faut d'abord construire (n° **580**) un paraboloïde qui *raccorde* le conoïde tout le long de la génératrice ωPM. Pour cela, je mène la tangente M″T″ à l'ellipse plane; puis, en roulant cette courbe (n° **640**) sur le cylindre vertical DOA, la sous-tangente deviendra PT = P″T″, de sorte que T sera le pied de la tangente au point P de la *base* du conoïde : alors la génératrice ωP du paraboloïde auxiliaire, qui doit glisser sur cette tangente et sur la verticale ω, en demeurant toujours horizontale, prendra la position ωT quand elle arrivera au pied de cette tangente. Cela posé, si je coupe les deux génératrices ωP et ωT par le

(*) L'analyse conduit aussi à ces résultats; car, si l'on adopte pour axe des x la droite ωOB, une perpendiculaire à celle-ci pour axe des y, et enfin la verticale ω pour axe des z; puis, si l'on pose

$$\omega\mathrm{O} = l, \quad \mathrm{OB} = \mathrm{R}, \quad \mathrm{OA} = \mathrm{O''A''} = a,$$

on trouvera (*Analyse appliquée*, chap. XIV) que les équations du tore et du conoïde sont

$$\left(l - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 = \mathrm{R}^2, \qquad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\frac{a}{\mathrm{R}l}\sqrt{\mathrm{R}^2 - z^2}.$$

Alors, en éliminant z, il viendra, pour la projection horizontale de l'intersection de ces deux surfaces,

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pm \sin\frac{a}{\mathrm{R}l}\left(l - \sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Nous simplifierons cette équation en y introduisant les coordonnées polaires, au moyen des formules $x = r\cos u$, $y = r\sin u$; car elle deviendra

$$\sin u = \pm \sin\frac{a(l-r)}{\mathrm{R}l}:$$

d'où l'on conclut

$$u = \pm\frac{a(l-r)}{\mathrm{R}l} \qquad \text{et} \qquad \pi - u = \pm\frac{a(l-r)}{\mathrm{R}l},$$

ou bien

$$r = l \pm \frac{\mathrm{R}l}{a}u \qquad \text{et} \qquad r = l \pm \frac{\mathrm{R}l}{a}(\pi - u).$$

Ces quatre équations distinctes sont celles des quatre spirales construites dans notre épure; et pour ramener la première, par exemple, à l'axe polaire $\omega\lambda$ qui lui est tangent, il n'y a qu'à reculer l'origine des angles u, qui se comptent ici à partir et à droite de la ligne Oω, en posant

$$u = u' - \frac{a}{\mathrm{R}}, \qquad \text{d'où il résultera} \qquad r = \frac{\mathrm{R}l}{a}u'.$$

Cette dernière équation est bien celle d'une spirale d'Archimède, dont les angles u' sont comptés à partir du rayon $\omega\lambda$; mais, pour y introduire *le pas* de cette spirale, c'est-à-dire le rayon vecteur qui correspond à une révolution entière, posons

$$\frac{2\pi\mathrm{R}l}{a} = \delta, \qquad \text{et il viendra} \qquad r = \delta\frac{u'}{2\pi}.$$

plan vertical MS, on sait (n° **551**) que la section sera une droite projetée sur MS et qui, jointe à la génératrice ωM, déterminera le plan tangent du paraboloïde; donc ce plan aura pour trace horizontale la ligne SK, parallèle à ωM. Maintenant, les traces SK et VK des deux plans tangents allant se couper en K, il en résulte que KM est la tangente cherchée.

646. Cette méthode ne peut plus s'appliquer immédiatement au *point multiple* O, parce qu'en cet endroit, les deux plans tangents devenant horizontaux, ils coïncident entièrement, et leur intersection reste indéterminée. Mais, si l'on cherche à évaluer l'angle VMK $= \theta$ que forme une tangente quelconque avec le rayon vecteur correspondant, on trouve d'abord

$$\tang\theta = \frac{\mathrm{KV}}{\mathrm{VM}} = \frac{\mathrm{MS}}{\mathrm{P'T'}};$$

puis, comme la sous-tangente P′T′ dans le cercle équivaut à la sous-tangente dans l'ellipse, P″T″ ou PT, multipliée par le rapport du petit axe au grand axe, il vient

$$(1)\qquad \tang\theta = \frac{\mathrm{MS}}{\mathrm{PT}}\cdot\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}},\quad \text{ou bien}\quad \tang\theta = \frac{\mathrm{M}\omega}{\mathrm{P}\omega}\cdot\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}.$$

Or, dans cette dernière expression, la seule quantité qui varie avec le point de contact M, c'est le facteur Mω, lequel devient égal à son dénominateur Pω, pour le point particulier O; donc l'inclinaison de la tangente en ce point sera donnée par la formule

$$(2)\qquad \tang\theta' = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{O}a}{\mathrm{OB}},$$

laquelle montre que cette tangente Oa est précisément *la diagonale du rectangle* construit sur Oa et OB.

647. (*Fig.* 127.) La construction générale du n° **645** est encore insuffisante pour obtenir les tangentes aux quatre points F, G, g, f, qui sont à la naissance de la voûte; parce qu'en ces points, les plans tangents des deux surfaces devenant *verticaux*, leur intersection est une verticale qui serait bien tangente à la courbe d'arête dans l'espace, mais qui se réduit à un seul point en projection horizontale, et n'apprend plus rien sur la tangente de la courbe plane GOf, au point G. Cependant, si nous recourons encore à la formule (1), elle deviendra, pour le point G,

$$(3)\qquad \tang\theta'' = \frac{\left(\frac{\mathrm{G}\omega}{\mathrm{A}\omega}\right)\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{GA}},$$

car les arcs OA et GB sont semblables et proportionnels à leurs rayons Aω et Gω. Or, de cette dernière forme, il résulte évidemment que la tangente en G sera la diagonale du rectangle construit sur GA et sur l'arc GB rectifié; opération extrêmement simple que, pour laisser plus de clarté dans l'épure, nous avons effectuée au point F, en formant un rectangle avec FD et Fβ = FB.

648. Il est même à remarquer que cette méthode très-avantageuse s'applique

aussi au point quelconque M; car, si dans la formule générale (1) on remplace le rapport de OA à OB par celui de OP à PM, qui lui est égal d'après le n° **643**, il viendra

$$(4)\qquad \tang\theta = \frac{\frac{\mathrm{M}\omega}{\mathrm{P}\omega}\cdot\mathrm{OP}}{\mathrm{PM}} = \frac{\mathrm{MI}}{\mathrm{MP}};$$

ce qui prouve que la tangente LMK peut s'obtenir immédiatement, en formant, sur MP et l'arc MI rectifié, un rectangle dont la diagonale sera la tangente cherchée. Ici, nous n'avons tracé que la moitié de ce rectangle, en prenant PL = MI, et en tirant LM, qui devra coïncider avec la tangente MK, déjà construite.

LIVRE VIII.

DE LA COURBURE DES LIGNES ET DES SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.

SUR LA COURBURE ET LES DÉVELOPPÉES DES LIGNES COURBES.

649. Une courbe et sa tangente, qui n'ont en général qu'un seul élément de commun, sont dites avoir entre elles un contact du *premier ordre;* mais, comme dans certaines questions on a besoin de considérer des lignes qui approchent de se confondre avec la courbe proposée, plus que ne le fait la tangente, il est nécessaire de distinguer ces rapprochements plus ou moins intimes, et l'on dit que *deux courbes quelconques*, planes ou non, *offrent un contact du* PREMIER, SECOND, TROISIÈME, ... ORDRE, *selon qu'elles ont* UN, DEUX, TROIS, ... ÉLÉMENTS *consécutifs de communs*.

650. (*Fig.* 129.) Comme le contact du second ordre se présentera très-fréquemment dans les applications géométriques, nous le désignerons souvent par le nom abrégé d'*osculation;* ainsi deux *courbes osculatrices* seront celles qui auront *deux éléments communs*. Pour en donner un exemple, qui nous deviendra fort utile par la suite, considérons une courbe quelconque AMB; et, après l'avoir partagée en éléments égaux (*), élevons, sur les milieux de MM′ et M′M″, deux normales KO et K′O *situées dans le plan* MM′M″, lequel ne contiendra les autres éléments de AMB qu'autant que cette courbe sera plane. Alors le point O, où ces deux normales se couperont, sera le centre d'un cercle αMβ, qui passera évidemment par les trois

(*) Si ces éléments étaient inégaux, mais toujours infiniment petits, les mêmes conséquences subsisteraient, comme le calcul le prouve aisément. Toutefois, pour abréger les démonstrations, il est plus simple de supposer qu'on a choisi des éléments égaux, ce qui est toujours permis. Voyez l'*Analyse appliquée*, chap. XVI, n° 351.