plan vertical MS, on sait (n° **551**) que la section sera une droite projetée sur MS et qui, jointe à la génératrice ωM, déterminera le plan tangent du paraboloïde; donc ce plan aura pour trace horizontale la ligne SK, parallèle à ωM. Maintenant, les traces SK et VK des deux plans tangents allant se couper en K, il en résulte que KM est la tangente cherchée.

646. Cette méthode ne peut plus s'appliquer immédiatement au *point multiple* O, parce qu'en cet endroit, les deux plans tangents devenant horizontaux, ils coïncident entièrement, et leur intersection reste indéterminée. Mais, si l'on cherche à évaluer l'angle VMK $= \theta$ que forme une tangente quelconque avec le rayon vecteur correspondant, on trouve d'abord

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\mathrm{KV}}{\mathrm{VM}} = \frac{\mathrm{MS}}{\mathrm{P'T'}};$$

puis, comme la sous-tangente P′T′ dans le cercle équivaut à la sous-tangente dans l'ellipse, P″T″ ou PT, multipliée par le rapport du petit axe au grand axe, il vient

$$(1) \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{\mathrm{MS}}{\mathrm{PT}}\cdot\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}, \quad \text{ou bien} \quad \operatorname{tang}\theta = \frac{\mathrm{M}\omega}{\mathrm{P}\omega}\cdot\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}.$$

Or, dans cette dernière expression, la seule quantité qui varie avec le point de contact M, c'est le facteur Mω, lequel devient égal à son dénominateur Pω, pour le point particulier O; donc l'inclinaison de la tangente en ce point sera donnée par la formule

$$(2) \qquad \operatorname{tang}\theta' = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{O}a}{\mathrm{OB}},$$

laquelle montre que cette tangente Oa est précisément *la diagonale du rectangle* construit sur Oa et OB.

647. (*Fig.* 127.) La construction générale du n° **645** est encore insuffisante pour obtenir les tangentes aux quatre points F, G, g, f, qui sont à la naissance de la voûte; parce qu'en ces points, les plans tangents des deux surfaces devenant *verticaux*, leur intersection est une verticale qui serait bien tangente à la courbe d'arête dans l'espace, mais qui se réduit à un seul point en projection horizontale, et n'apprend plus rien sur la tangente de la courbe plane GOf, au point G. Cependant, si nous recourons encore à la formule (1), elle deviendra, pour le point G,

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\theta'' = \frac{\left(\frac{\mathrm{G}\omega}{\mathrm{A}\omega}\right)\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{GA}},$$

car les arcs OA et GB sont semblables et proportionnels à leurs rayons Aω et Gω. Or, de cette dernière forme, il résulte évidemment que la tangente en G sera la diagonale du rectangle construit sur GA et sur l'arc GB rectifié; opération extrêmement simple que, pour laisser plus de clarté dans l'épure, nous avons effectuée au point F, en formant un rectangle avec FD et F$\mathrm{ϐ}$ = FB.

648. Il est même à remarquer que cette méthode très-avantageuse s'applique

aussi au point quelconque M; car, si dans la formule générale (1) on remplace le rapport de OA à OB par celui de OP à PM, qui lui est égal d'après le n° **645**, il viendra

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{\frac{\mathrm{M}\omega}{\mathrm{P}\omega}\cdot\mathrm{OP}}{\mathrm{PM}} = \frac{\mathrm{MI}}{\mathrm{MP}};$$

ce qui prouve que la tangente LMK peut s'obtenir immédiatement, en formant, sur MP et l'arc MI rectifié, un rectangle dont la diagonale sera la tangente cherchée. Ici, nous n'avons tracé que la moitié de ce rectangle, en prenant PL = MI, et en tirant LM, qui devra coïncider avec la tangente MK, déjà construite.

LIVRE VIII.

DE LA COURBURE DES LIGNES ET DES SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.

SUR LA COURBURE ET LES DÉVELOPPÉES DES LIGNES COURBES.

649. Une courbe et sa tangente, qui n'ont en général qu'un seul élément de commun, sont dites avoir entre elles un contact du *premier ordre;* mais, comme dans certaines questions on a besoin de considérer des lignes qui approchent de se confondre avec la courbe proposée, plus que ne le fait la tangente, il est nécessaire de distinguer ces rapprochements plus ou moins intimes, et l'on dit que *deux courbes quelconques*, planes ou non, *offrent un contact du* PREMIER, SECOND, TROISIÈME, ... ORDRE, *selon qu'elles ont* UN, DEUX, TROIS, ... ÉLÉMENTS *consécutifs de communs.*

650. (*Fig.* 129.) Comme le contact du second ordre se présentera très-fréquemment dans les applications géométriques, nous le désignerons souvent par le nom abrégé d'*osculation;* ainsi deux *courbes osculatrices* seront celles qui auront *deux éléments communs*. Pour en donner un exemple, qui nous deviendra fort utile par la suite, considérons une courbe quelconque AMB; et, après l'avoir partagée en éléments égaux (*), élevons, sur les milieux de MM′ et M′M″, deux normales KO et K′O *situées dans le plan* MM′M″, lequel ne contiendra les autres éléments de AMB qu'autant que cette courbe sera plane. Alors le point O, où ces deux normales se couperont, sera le centre d'un cercle αM$\mathrm{ϐ}$, qui passera évidemment par les trois

(*) Si ces éléments étaient inégaux, mais toujours infiniment petits, les mêmes conséquences subsisteraient, comme le calcul le prouve aisément. Toutefois, pour abréger les démonstrations, il est plus simple de supposer qu'on a choisi des éléments égaux, ce qui est toujours permis. Voyez l'*Analyse appliquée*, chap. XVI, n° 351.

points M, M′, M″. et aura ainsi deux éléments MM′ et M′M″ communs avec AMB; ce sera, par conséquent, le *cercle osculateur* de cette courbe pour le point M. Le rayon de ce cercle sera l'une des trois distances égales OM, OM′, OM″; mais on peut adopter en place l'une des deux normales égales OK et OK′, parce que la différence n'est qu'un infiniment petit du second ordre (*voyez* n° **197**).

651. On voit par là que le cercle osculateur *est unique* pour chaque point M assigné par la courbe AMB, tandis qu'il existe une infinité de cercles simplement tangents dans ce point; mais le cercle osculateur variera de position et de grandeur en passant aux points M′, M″,..., puisque alors il faudra opérer semblablement sur les deux éléments consécutifs M′M″ et M″M‴, M″M‴ et M‴M⁗,..., ce qui changera le rayon KO en K′O′, K″O″,.... Nous examinerons tout à l'heure (n° **656**) si ces rayons se coupent consécutivement.

652. Le plan du cercle osculateur, qui n'est autre que celui de deux éléments consécutifs MM′ et M′M″, ou de deux tangentes infiniment voisines MT et M′T′, se nomme aussi le *plan osculateur* de la courbe AMB pour le point M; et, à moins que cette dernière ne soit plane, ce plan osculateur variera en passant d'un point à un autre de AMB. D'ailleurs, deux plans osculateurs consécutifs TM′T′ et R′M″T″ se couperont toujours suivant l'élément intermédiaire M′M″.

653. (*Fig.* 129.) Quant à la *courbure* de la ligne AMB au point M, nous avons déjà dit (n° **198**) qu'elle était indiquée par l'angle TM′T compris entre deux tangentes infiniment voisines, parce que cet angle, nommé *angle de contingence* ou *de courbure*, exprime évidemment la quantité dont il a fallu écarter l'élément M′M″ de sa direction primitive M′T, pour plier la ligne droite MM′T suivant la ligne polygonale MM′M″M‴... (*). Or l'angle TM′T′ égale KOK′; et comme ce dernier a pour mesure l'arc ε décrit avec un rayon égal à l'unité, tandis qu'il comprend un arc KM′K′ du cercle osculateur dont le rayon est $OK = \rho$, on aura pour l'expression de la courbure au point M,

$$\varepsilon = \frac{KM'K'}{OK} = \frac{MKM'}{OK} = \frac{d}{\rho}.$$

Mais la courbe ayant été divisée en éléments égaux, la quantité ds sera constante pour tous ses points; et l'on pourra dire que *la courbure varie*, d'un point à un autre, *en raison inverse du rayon* $OK = \rho$ qui, pour cette raison, se nomme aussi le *rayon de courbure* de la courbe au point M.

Observons toutefois que, pour avoir la mesure exacte de la courbure d'une ligne, et pour rendre cette mesure applicable à deux courbes différentes dans lesquelles les éléments, quoique infiniment petits, pourraient se trouver inégaux de l'une à l'autre, et même avoir un rapport déterminé et nécessaire, il faut considérer, non pas la grandeur absolue de l'angle de contingence ε, mais bien son rapport avec

(*) Il est bon d'observer que l'angle de contingence TM′T′ est aussi égal à l'angle de deux plans *normaux* consécutifs, puisque ces plans seraient perpendiculaires sur les milieux des deux éléments MM′ et M′M″.

l'élément ds; parce que c'est seulement sur deux arcs *de même longueur*, que l'angle extérieur des tangentes extrêmes peut manifester, avec précision, la courbure plus ou moins prononcée de l'un de ces arcs par rapport à l'autre. Par exemple, dans deux cercles concentriques dont les rayons seraient doubles et les circonférences divisées chacune en un même nombre d'éléments égaux, les angles de contingence correspondants aux mêmes rayons seraient égaux, et cependant la courbure des deux cercles serait évidemment différente; mais, si l'on fait attention que les éléments de la grande circonférence ont une longueur double de ceux de la seconde, on reconnaîtra que le rapport $\frac{\varepsilon}{ds}$ indique effectivement une courbure moitié plus faible pour le grand cercle que pour le petit. Il suit donc de là que la véritable mesure de la courbure d'une ligne quelconque sera toujours donnée par le rapport

$$\frac{\varepsilon}{ds} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho},$$

ρ désignant le rayon du cercle osculateur de la courbe, au point considéré.

654. Tout ce qui précède convient également aux courbes *planes* et aux courbes gauches et *cambrées* : nous nous servons ici de cette dernière expression, au lieu de *courbe à double courbure*, tant pour abréger que pour éviter l'emploi du mot *courbure* dans un sens inexact ou ambigu. En effet, nous pensons avec M. Vallée que quand une courbe n'est point plane, elle n'admet encore qu'une seule courbure qui s'estime comme au numéro précédent; mais elle offre en outre une *cambrure* ou espèce de torsion qui a été produite en faisant tourner l'un des deux plans osculateurs consécutifs TM′T′ et T′M″T″, autour de l'élément commun M′M″ : de sorte que dans une courbe gauche, la torsion ou *la cambrure* est indiquée en chaque point *par l'angle des deux plans osculateurs voisins*. Or, si l'on rendait nul cet angle, en rabattant le plan T′M″T″ sur TM′T′, par une rotation autour de la droite M′M″, la torsion disparaîtrait et la courbe deviendrait *plane* dans les environs du point considéré, *sans que sa courbure eût augmenté ou diminué*, puisque les angles de contingence TM′T′ et T′M″T″ seraient demeurés constants; au contraire, sans rien changer dans la position de ces deux plans osculateurs, ou dans la cambrure de la courbe, on peut altérer sa courbure en écartant ou rapprochant les deux éléments MM′ et M′M″. Par conséquent, *la courbure* d'une ligne et *sa cambrure* sont des affections indépendantes l'une de l'autre, et qu'il convient de désigner par des noms distincts, mais analogues; d'autant plus, que l'une dépend de l'angle de deux éléments linéaires, et l'autre de l'angle de deux plans. Au reste, on pourrait assigner la grandeur et la position d'un certain cercle de rayon ι, qui permettrait de représenter l'angle de torsion θ et la valeur absolue de la cambrure, sous les formes

$$\theta = \frac{ds}{\iota}, \quad \text{et} \quad \frac{\theta}{ds} = \frac{1}{\iota},$$

analogues aux expressions que nous avons données ci-dessus pour l'angle de contingence ε et pour la courbure de la courbe; mais, à cet égard, nous renverrons le lecteur au Mémoire de M. *de Saint-Venant*, cité dans la note ci-jointe (*).

655. Les courbes planes et les courbes cambrées présentent, quant au lieu de leurs *centres de courbure*, une différence essentielle que nous allons faire ressortir. Parmi toutes les normales que l'on peut mener en un même point M (*fig.* 129) d'une courbe quelconque, celle suivant laquelle est dirigé le rayon de courbure KO doit être tracée (n° **650**) dans le plan osculateur MM′M″, et nous la distinguerons par le nom de *normale principale*. Or, quand la courbe AMB est plane, toutes les normales principales relatives aux divers points M, M′, M″,..., se trouvent dans son plan; et, par suite, *elles se coupent consécutivement* de manière à former une courbe OO′O″... à laquelle ces diverses normales sont évidemment *tangentes;* d'où il suit (n° **199**) qu'un fil O‴O″O′OK, plié sur cette *développée*, et déroulé successivement, décrirait par son extrémité K la ligne AMM′M″B.

656. Au contraire, *quand la courbe proposée est gauche, les normales principales,* ou les rayons de courbure, *ne se rencontrent plus consécutivement*. En effet (*fig.* 230), concevons par les milieux K, K′, K″,..., des divers éléments, les plans normaux PQS, P′Q′S′, P″Q″S″,..., qui se couperont deux à deux suivant les droites QS, Q′S′,..., et formeront ainsi une surface développable (n° **186**), *enveloppe* de tous ces plans. Alors, si nous coupons les plans P et P′ par le plan osculateur MM′M″ qui est perpendiculaire à ces deux-là, nous obtiendrons pour intersections les deux

(*) Les deux affections d'une courbe gauche, dont nous avons parlé ci-dessus, ont d'abord été désignées sous le nom de *première courbure* et de *seconde courbure*. Mais, outre l'inconvénient d'appliquer des noms semblables à des affections de nature différente, ces dénominations ne semblent être que des numéros d'ordre qui ont encore le défaut de rendre le discours traînant, et de produire quelquefois des ambiguïtés fâcheuses dans une démonstration où il s'agit de comparer plusieurs lignes distinctes que la clarté de la rédaction oblige à nommer : la première courbe, la seconde courbe. Aussi, d'autres avaient-ils plus simplement nommé ces deux affections : la *courbure* et la *flexion* d'une courbe. Cependant M. Vallée, dans son *Traité de Géométrie descriptive*, objecta avec raison que le sens naturel du mot *flexion* se rapporterait plutôt à la *première courbure* qu'à la *seconde*, et il proposa de désigner celle-ci par le mot de *torsion*. Ce dernier nom peint assez bien la transformation qu'il faut faire subir à une courbe plane pour la changer en une courbe à double courbure, et nous l'avions nous-même adopté dans nos précédentes éditions. Mais M. de Saint-Venant, dans un Mémoire présenté à l'Institut en septembre 1844 et inséré dans le 30e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, fit observer que les mots de *flexion* et de *torsion* indiquaient un changement de forme produit par une cause extérieure et souvent passagère, plutôt qu'une affection constante; que d'ailleurs il était nécessaire de réserver ces dénominations spéciales pour exprimer certains effets mécaniques qui se rencontrent dans la théorie des verges élastiques, et dont les résultats ne coïncident pas toujours avec les changements que subissent les quantités $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{r}$; c'est ce qui l'a conduit, par des raisons très-plausibles, à proposer de nommer ces deux affections la *courbure* et la *cambrure* de la courbe. En effet, ce dernier mot rappelle, par son étymologie même, l'espèce de courbure que produirait le mouvement d'un plan qui tournerait successivement autour de diverses droites, et c'est bien ce qui a lieu ici pour des angles compris entre les divers plans osculateurs de la courbe primitive. En outre, il propose de remplacer la dénomination fausse et incommode de *courbe à double courbure* par celle de *courbe cambrée*, plutôt que par le nom de *courbe gauche* qu'avait adopté M. Vallée; car ce dernier nom serait peu d'accord avec la nature de la surface *développable* qui est formée par les prolongements des éléments de la courbe, et qui a des rapports si intimes avec la courbe elle-même.

normales KO et K′O′ qui déterminent évidemment le centre O du cercle osculateur correspondant au point M, et dont la première sera le rayon de courbure relatif à ce point (*). De même, en coupant les plans normaux P′ et P″ par le second plan osculateur M′M″M‴, nous aurons pour sections les normales K′O′ et K″O′ dont la première sera aussi le rayon de courbure relatif au point M′. Or ce rayon K′O′ ne coïncide pas avec l'autre normale K′O, puisque ces droites proviennent du même plan P′ coupé par deux plans osculateurs distincts : ainsi K′O′ va rencontrer QS en un point I différent de O; et, par conséquent, les deux rayons de courbure consécutifs KO et K′O′, n'ayant pas de point commun sur l'intersection QS des plans P et P′ qui les contiennent, ne sauraient eux-mêmes se rencontrer.

Il résulte de là que les centres de courbure O, O′, O″,..., n'étant pas donnés par les intersections successives des rayons de courbure KO, K′O′, K″O″,..., la courbe que l'on ferait passer par tous ces centres *n'aurait pas pour tangentes* ces mêmes rayons, et, par conséquent, ceux-ci ne sauraient être regardés comme formés par le développement d'un fil qui entourerait la ligne OO′O″... Donc, enfin, *le lieu des centres de courbure d'une courbe gauche* AMM′M″... *n'est point une* DÉVELOPPÉE *de cette dernière ligne.*

657. (*Fig.* 130.) Cependant la courbe gauche AMM′M″... admet une infinité de développées, ainsi que MONGE l'a fait voir. En effet, si, dans le premier plan normal P, nous traçons arbitrairement une droite KD, qui sera toujours normale à la courbe proposée, et ira rencontrer QS en un point D; puis, si, par les points K′ et D, nous tirons la droite K′DD′, qui sera dans le second plan normal P′, puis la droite K″D′D″ située dans le plan P″, et ainsi de suite, nous obtiendrons, par les intersections successives de ces normales, une courbe DD′D″D‴... à laquelle elles seront *tangentes*, et qui pourra servir à décrire la ligne AMM′... par le développement d'un fil enroulé autour de cette *développée* DD′D″.... Pour le prouver, il suffit de faire voir que les portions DK et DK′ des tangentes à cette développée sont égales entre elles, ou bien que le point D est à égale distance des trois points M, M′, M″; or cela résulte de ce que la droite QS étant l'intersection de deux plans P et P′ élevés perpendiculairement sur les milieux des éléments égaux MM′ et M′M″, chaque point de QS est à la même distance de M, de M′ et de M″ : aussi, cette droite QS est appelée la *ligne polaire* de l'arc MM′M″, et les distances DK, D′K′, D″K″,..., sont les *rayons de développée* qu'il ne faut pas confondre avec les rayons de courbure KO, K′O′, K″O″,.... D'ailleurs, comme la première normale KD a été menée arbitrairement dans le plan P, on pourra donc, en faisant varier la direction de cette normale, obtenir une infinité de développées, situées toutes sur la *surface polaire* qui est l'enveloppe des plans normaux P, P′, P″,..., de la courbe AMM′M″....

658. Cette surface polaire et développable, *lieu de toutes les développées* de la courbe AMM′..., a pour génératrices rectilignes les intersections successives QS,

(*) Il nous sera utile, plus tard, d'observer ici que cela revient à abaisser, du point K, une perpendiculaire KO sur la génératrice QS de la surface enveloppe des plans normaux.

Q′S′, Q″S″,..., des plans normaux; et ces droites, qui se coupent évidemment deux à deux, forment ainsi (nº **178**) *l'arête de rebroussement* UV de cette surface développable. D'ailleurs, puisque chaque génératrice QS est perpendiculaire au plan osculateur correspondant MM′M″, et passe par le centre de courbure O où se coupent les deux normales égales KO et K′O, il en résulte évidemment que *les angles* KDO *et* K′DO, *formés par deux tangentes de la développée avec la génératrice intermédiaire* QS, *sont égaux;* et, par suite (nº **187**), on peut affirmer que *chaque développée* DD′D″... *deviendra une ligne droite,* quand on développera la surface polaire enveloppe des plans normaux. Cela revient à dire (nº **187**) que cette développée est *la ligne la plus courte* qui puisse être tracée sur la surface polaire, entre deux de ses points; par conséquent, un fil qui, attaché en K, serait tendu et plié librement sur cette surface développable, prendrait de lui-même la forme d'une des développées KDD′D″..., puisqu'à cause de son élasticité, ce fil ne pourra demeurer en équilibre sur la surface qu'autant qu'il aura suivi la route la plus courte.

« D'après cela, dit *Monge*, on conçoit comment il est possible d'engendrer, par un mouvement continu, une courbe quelconque à double courbure. Car, après avoir exécuté la surface polaire touchée par tous les plans normaux de la courbe, si, du point donné dans l'espace et par lequel la courbe doit passer, on dirige deux fils tangents à cette surface, et si, après les avoir pliés sur la surface en les tendant, on les fixe par leurs autres extrémités, le point de réunion des deux fils, qui aura la faculté de se mouvoir avec le plan tangent à la surface polaire, sans glisser ni sur l'un des fils ni sur l'autre, engendrera dans son mouvement la courbe proposée. »

659. Il est intéressant d'observer ici que la courbe UV, arête de rebroussement de la surface polaire, a pour plans osculateurs les plans normaux de la courbe primitive AMB; car les tangentes αSQ, α'S′Q′ sont toutes deux dans le plan P′. D'où il suit, d'après la note du nº **653**, que l'angle de torsion de UV est égal à l'angle de contingence de AB; et réciproquement, l'angle de contingence de UV est égal à l'angle de torsion de AB, attendu que les plans normaux de la courbe UV sont perpendiculaires aux tangentes αSQ, α'S′Q′, et conséquemment parallèles aux plans osculateurs de AB. Toutefois, il faut se garder d'étendre cette réciprocité à la grandeur même de la torsion ou à *la cambrure* de UV qui n'égalera pas *la courbure* de AB, non plus que *la courbure* de UV n'égalera *la cambrure* de AB; car, d'après le nº **653**, il resterait à diviser les angles indiqués ci-dessus par les éléments respectifs $\alpha\alpha'$ et MM′, lesquels ne sont pas, en général, de même longueur.

660. (*Fig.* 130.) Lorsque la courbe AMM′... sera *sphérique*, c'est-à-dire située entièrement sur une sphère d'un rayon quelconque, tous les plans normaux P, P′, P″,..., iront passer nécessairement par le centre de cette sphère, et leur enveloppe, ou la surface polaire qui est le lieu de toutes les développées de AMM′..., se réduira ici à un cône dont le sommet sera placé au centre de la sphère en question. Ce point unique pourra donc être considéré comme étant une développée particulière de la courbe AMM′...; et en effet, un fil attaché à ce centre pourra tourner autour de ce point sans s'allonger sensiblement, tandis que son autre extrémité demeurera sur la courbe AMM′..., dont tous les points sont à une distance constante du centre.

661. Enfin, si la courbe AMM′... était *plane*, tous les plans normaux P, P′, P″,..., seraient perpendiculaires au plan de cette courbe, aussi bien que leurs intersections consécutives QS, Q′S′,...; de sorte que l'enveloppe de ces plans normaux se réduirait à *un cylindre*, sur lequel seraient situées *toutes les développées qu'admettrait encore la courbe plane* AMM′.... En outre, chacune de ces développées DD′D″... serait alors *une hélice;* car ses diverses tangentes, ou les rayons de développée KD, K′D′,..., formeraient tous des angles égaux (nº **659**) avec les droites parallèles QS, Q′S′,..., qui sont les génératrices de ce cylindre. D'ailleurs, *le lieu des centres de courbure* OO′O″... *redeviendrait ici une véritable développée,* puisque cette courbe serait la section droite du cylindre enveloppe, et qu'on peut dès lors la regarder comme une hélice dont le pas est nul : mais cette ligne OO′O″... serait, parmi toutes les développées de la courbe AMM′..., la seule qui fût plane. Ainsi, par exemple (*fig.* 96), la spirale développante de cercle ABCDL... a pour développée plane le cercle A$\beta\gamma\delta\lambda$...; tandis qu'elle admet pour développées gauches toutes les hélices qui, comme (A$\beta\gamma\delta\lambda$..., A′$\beta'\gamma'\delta'\lambda'$...), ont leur origine au point (A, A′).

662. (*Fig.* 129.) Observons ici que le cercle osculateur $\alpha M \beta$ de la courbe plane AMB traverse ordinairement cette courbe, c'est-à-dire que s'il se trouve *en dehors* à gauche du point M, à droite il sera *en dedans* de la courbe. En effet, la partie rectiligne OK du fil qui entoure la développée OO′O″... va continuellement en augmentant à mesure que l'on déroule ce fil; donc les rayons de courbure qui précèdent OK sont plus petits que cette droite, et ceux qui le suivent sont plus grands; donc aussi l'arc MA de la courbe proposée sera embrassé par l'arc de cercle Mα, tandis que M″B se trouvera en dehors de M″β, du moins dans les environs du point considéré M. Cependant, lorsque la développée présente un point de rebroussement, comme cela arrive aux sommets d'une ellipse (*fig.* 76), alors le rayon de courbure devient un *minimum* ou un *maximum*, et le cercle osculateur se trouve, tant à droite qu'à gauche du point de contact, placé en dedans de la courbe, ou bien en dehors. Dans ce cas particulier, le cercle osculateur acquiert un contact du troisième ordre avec la courbe.

663. (*Fig.* 130.) Une circonstance analogue se présente pour le plan osculateur MM′M″ d'une courbe gauche AMB; c'est-à-dire que *ce plan traverse ordinairement la courbe,* en laissant au-dessous de lui l'arc MA, et au-dessus l'arc M″B, parce que la torsion des éléments, produite (nº **654**) par la différence d'inclinaison des plans osculateurs consécutifs, persévère en général dans le même sens. Cependant, comme, par suite de la *continuité* de la courbe proposée, l'inclinaison du plan osculateur ne varie que par degrés infiniment petits, s'il existe un point singulier où cette torsion change de sens, cela ne pourra arriver qu'autant que l'*angle de torsion* aura passé par zéro; et dans cet endroit de la courbe, trois éléments consécutifs seront situés dans un même plan osculateur, lequel se trouvera alors tout entier au-dessus de la courbe AMB, ou bien tout entier au-dessous.