664. *Construire le plan osculateur relatif à un point assigné sur une courbe gauche.*

(*Fig.* 51.) Soit N le point assigné sur la courbe gauche VNU, laquelle devra être définie par ses deux projections. Si, pour obtenir approximativement deux tangentes infiniment voisines, on menait celle du point N et une autre *extrêmement voisine*, deux droites aussi rapprochées détermineraient, avec peu de précision, les traces du plan qui les contient. Il vaudra donc mieux construire diverses tangentes à la courbe VU, pour le point N et pour d'autres situés à de médiocres distances, en arrière et en avant de N; puis chercher les traces de ces tangentes sur le plan horizontal, par exemple, et réunir tous ces points par une courbe continue ALD, qui sera la trace de la surface développable lieu de toutes les tangentes à la courbe VU. Alors, comme on sait (n° **181**) que le plan tangent de cette surface est le plan osculateur de son arête de rebroussement, il n'y aura qu'à mener la tangente $L\theta$ à la trace ALD, et le plan $NL\theta$ sera le plan osculateur demandé.

665. *Construire le rayon de courbure relatif à un point donné sur une courbe gauche.* Soit M le point donné sur la courbe gauche que nous désignerons par A; construisons, comme ci-dessus, le plan osculateur π correspondant au point M, et projetons-y la courbe A, qui deviendra une autre ligne B ayant évidemment deux éléments communs avec la première. Dès lors, la courbure de A étant la même que celle de B en M, la question sera réduite à trouver le rayon de courbure d'une courbe B, qui est *plane*.

666. (*Fig.* 141.) Pour résoudre ce dernier problème, soient MN la normale de B au point donné M, et MC, MC',..., diverses cordes partant de ce même point. Si, par le milieu de la corde MC, on lui mène une perpendiculaire IP, et que par le point P, où elle va couper la normale MN, on élève sur cette dernière droite une perpendiculaire $P\alpha = MC$; puis, si l'on répète des constructions analogues pour les autres cordes, la courbe $\alpha\alpha'\alpha''\,\mathrm{6}\mathrm{6}'$ ira couper la normale MN en un point O, qui déterminera le rayon de courbure MO de la ligne proposée. En effet, lorsque la corde MC'' diminue de plus en plus, l'ordonnée $P''\alpha''$ décroît pareillement, et la perpendiculaire I''P'' approche davantage d'être normale à la courbe MB; donc, le point O où la ligne auxiliaire $\alpha\alpha'\,\mathrm{6}$ ira couper MN, sera bien l'intersection de cette normale avec une normale infiniment voisine; et, par conséquent, le rayon de courbure de la ligne B pour le point M aura bien pour longueur MO (*).

667. *Étant donnée une courbe quelconque* A, *construire une de ses développées, et le lieu des centres de courbure.*

On mènera divers plans normaux à cette courbe, par des points assez rapprochés; et après avoir construit leurs traces sur les deux plans de projection, on décrira une courbe α tangente à toutes les traces horizontales, puis une courbe 6 tangente à toutes les traces verticales. Ces deux courbes α, 6 seront évidemment les

(*) Cette méthode est tirée de la *Géométrie des courbes*, par M. Bergery; et elle offre l'avantage, que la courbe auxiliaire vient couper à angle droit la normale donnée, ce qui fixe mieux la position du point cherché.

traces de la surface polaire Σ, au lieu de toutes les développées de A (n° **658**); et l'on obtiendra diverses génératrices G, G', G'',..., de cette surface développable, en joignant deux à deux les points où les courbes α et 6 sont touchées par un même plan normal. Cela posé, du point de départ M, choisi à volonté sur la courbe A, on mènera une tangente MD à la surface Σ, puis on effectuera le développement de Σ sur un plan quelconque, où la développée cherchée, devant être une ligne droite (n° **658**), ne sera autre chose que le prolongement indéfini de MD. Alors, en marquant les points où cette droite MD rencontre chacune des génératrices $\gamma, \gamma', \gamma'',\ldots$, de Σ développée, puis rapportant ces points sur les génératrices primitives G, G', G'',..., on obtiendra la développée qui est tangente au rayon MD. En faisant varier cette droite, qui a pu être tracée de bien des manières, on trouverait d'autres développées de la courbe A.

668. Si du point M on abaisse une perpendiculaire sur la génératrice G, qui se trouve dans le plan normal relatif à M, le pied de cette perpendiculaire sera le centre de courbure de A pour le point M (n° **656**, *note*); et le lieu de tous les centres de courbure s'obtiendrait en répétant cette construction pour divers points M', M'',..., de la ligne donnée A.

Ces diverses opérations seront ordinairement très-laborieuses, mais elles deviendront assez simples dans plusieurs cas intéressants, comme cela arrive pour les deux exemples que nous allons étudier, et qui serviront d'ailleurs à éclaircir la généralité des considérations précédentes.

669. (*Fig.* 101.) *Étant donnée une développante sphérique*, projetée sur DMPGQF, *trouver le lieu de ses centres de courbure, et l'une de ses développées.*

Nous avons dit, au n° **493**, que cette épicycloïde particulière est engendrée par un point *m* d'un cercle mobile S'', dont le plan *roule* sur un cône fixe S'AE, pendant que son centre coïncide perpétuellement avec le sommet S' de ce cône; on a vu aussi, au n° **495**, que le *plan normal* de cette courbe, pour un point quelconque (M, M'), est le plan S'AV dans lequel se trouve alors le cercle mobile, et qui est *tangent au cône* fixe S'AE. Il s'ensuit donc que ce cône est précisément la surface polaire, enveloppe de tous les plans normaux, dont nous avons parlé au n° **658**, et sur laquelle doivent être placés toutes les développées et tous les centres de courbure de la développante sphérique DMPGQF. Ainsi, d'après la note du n° **656**, si nous abaissons du point (M, M') la perpendiculaire (MR, M') sur la génératrice de contact S'A du plan normal, le pied (R, M') de cette perpendiculaire sera le centre de courbure correspondant à (M, M') et la vraie grandeur du rayon de courbure sera RM. Semblablement, lorsque le point générateur se trouvera projeté en N_5, époque où le contact du cercle mobile est arrivé en A_5, la perpendiculaire N_5R_5, abaissée sur la génératrice OA_5, sera le rayon de courbure, et R_5 la projection du centre de courbure : sa projection verticale serait facile à obtenir. Enfin, pour le point P, qui répond à un quart de la révolution du cercle mobile, le rayon de courbure sera PO, égal à S''A; de sorte que le lieu des centres de courbure aura pour projection horizontale une courbe à double nœud $DRR_5OR_9G\ldots O\ldots F$ que nous n'avons pas achevée, afin d'éviter la confusion, mais qui passerait deux fois par le point O, et dont la partie OR_9GO répond à un arc situé sur la nappe supérieure du cône S'AE.

670. Pour suppléer à la projection verticale que nous n'avons pas voulu tracer ici, nous allons construire sur le plan du cercle mobile les positions occupées successivement par tous les centres de courbure. Or, d'après la méthode exposée ci-dessus pour le point quelconque (M, M') de la développante sphérique, on doit voir que si l'on tire les rayons $S''a_4$, $S''a_5$, $S''a_6$,..., qui représentent les génératrices suivant lesquelles le cône est touché successivement par le plan du cercle mobile, et qu'on leur mène les perpendiculaires mr_4, mr_5, mr_6,..., parties du point générateur m, ces perpendiculaires seront les longueurs précises des divers rayons de courbure; et leurs pieds, qui forment évidemment une circonférence de cercle, iront coïncider tour à tour avec les vrais centres de courbure de la développante sphérique, lorsqu'on fera rouler le cercle S″A sur le cône S'AE. Il en serait de même si l'on ployait le plan de ce cercle pour l'appliquer sur le cône, par une opération inverse de celle qui sert à développer cette surface; de sorte que la circonférence $mrr_4r_5S''r_9$... peut être regardée comme la *transformée* du lieu des centres de courbure, lorsqu'on développe le cône S'AE qui contient réellement tous ces centres (*).

671. Quant à la construction d'*une développée* de la développante sphérique, il faut se rappeler (n° **658**) qu'une pareille courbe doit devenir *rectiligne* lorsqu'on développera la surface enveloppe de tous les plans normaux, laquelle est ici le cône S'AE. Si donc, sur le cercle rabattu en S″, on trace une droite arbitraire partant de m, telle que $m\alpha\beta\gamma\delta$, il n'y aura plus qu'à transporter sur le cône S'AE les points α, β, γ,..., où cette droite rencontre les divers rayons $S''a_6$, $S''a_7$, $S''a_8$,..., qui représentent autant de génératrices de ce cône; or il est bien facile de retrouver les véritables positions de ces génératrices sur les deux plans de projection, et d'y rapporter, à partir du sommet S, les longueurs $S''\alpha$, $S''\beta$, $S''\gamma$,..., ce qui fournira les deux projections de la développée en question. Nous n'avons point effectué ces opérations sur notre épure, afin d'éviter la confusion qui en serait résultée pour le lecteur; mais nous les achèverons dans le problème suivant, où les résultats offriront plus d'intérêt.

672. *Étant donnée une hélice à base circulaire* (ABCDEF... A'B'C'D'E'F'...), *trouver le lieu de ses centres de courbure, et l'une de ses développées.*

(*Fig.* 128.) Après avoir construit la tangente (ET, E'T') de cette hélice, menons le plan normal correspondant E'N'N, lequel passe évidemment par le rayon (OE, E')

(*) Ce résultat remarquable est emprunté à un Mémoire intéressant de *M. Th. Olivier*, sur les centres de courbure des épicycloïdes, inséré dans le XXIII[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Toutefois, nous croyons devoir avertir que, dans ce Mémoire, il s'est glissé une erreur sur *la projection* du lieu des centres de courbure de la développante sphérique; car cette projection ne saurait être, comme on l'a dit par inadvertance, *la développée* de la projection horizontale de la développante sphérique.

du cylindre qui contient cette hélice, et fait avec l'axe vertical O un angle complémentaire de celui que forme la tangente. Or cette dernière ligne ayant une inclinaison constante (n° **450**) quelle que soit la position du point de contact (E, E') sur l'hélice, il s'ensuit que tous les plans normaux de cette courbe auront pareillement une inclinaison constante, et que chacun passera par le rayon du cylindre qui aboutira au point considéré sur l'hélice. Par conséquent, si l'on conçoit que ces plans normaux soient menés par des points infiniment voisins, pris à distances égales sur l'hélice proposée, ils se couperont consécutivement suivant des droites qui auront toutes des positions parfaitement symétriques relativement à l'axe vertical O; c'est-à-dire que ces droites seront *également inclinées sur cet axe*, et placées *à la même distance* de cette verticale. D'où je conclus que ces droites, intersections des plans normaux consécutifs, se trouveront tangentes à une nouvelle hélice tracée sur un cylindre droit à base circulaire *abcde*..., dont le rayon est encore inconnu, et qu'elles formeront *un hélicoïde développable* (n° **456**) qui sera le *lieu des pôles*, ou le *lieu de toutes les développées* (n° **658**) de l'hélice primitive (ABCDE..., A'B'C'D'E'...).

673. Pour déterminer cet hélicoïde, j'observe que sa trace horizontale sera précisément la développante du cercle inconnu *abcde*... (n° **455**), et que cette courbe devra être tangente aux traces de tous les plans normaux. Or le plan normal relatif au point (A, A') ayant évidemment une trace AOI qui passe par le centre O, le rayon OI contiendra nécessairement l'origine de cette développante; tandis que la trace N'N, perpendiculaire à OI, répondra au premier quart de révolution de cette développante; par conséquent, sa distance au centre, c'est-à-dire OI ou *en*, devra se trouver précisément *égale au quart de la circonférence* inconnue *abcde*. Mais déjà il existe une relation semblable entre la sous-tangente ET et le quart de cercle AE; donc le rayon OA de ce dernier doit avoir avec ET le même rapport qu'aura le rayon inconnu O*a* avec OI. D'après cette remarque, on tirera la droite A'δ' parallèle à E'T', puis $\delta'a'$ parallèle à E'N', et cette seconde parallèle déterminera la grandeur O'*a'* que l'on doit donner au rayon du cercle demandé *abcde*; ensuite, on construira l'hélice (*abcde*..., *a'b'c'd'e'*...) de même *pas* que l'hélice primitive, et ce sera l'arête de rebroussement de l'hélicoïde en question. Cette surface aura d'ailleurs pour trace horizontale la développante *anvr* du cercle *abcde*..., et pour génératrices les tangentes de la nouvelle hélice, telles que (*en*, E'N'), (*hv*, *h'v'*), lesquelles représentent les intersections consécutives des plans normaux infiniment voisins, menés à l'hélice (ABCD..., A'B'C'D'...).

674. (*Fig.* 128.) Pour trouver le rayon de courbure de cette dernière ligne au point (E, E') par exemple, il faut abaisser de ce point (*note* du n° **656**) une perpendiculaire (EO*e*, E') sur la génératrice (*en*, E'N'), qui est dans le plan normal correspondant au point assigné. Or, comme cette perpendiculaire aboutit évidemment au point (*e*, E'), et que des résultats semblables arriveraient pour tout autre plan normal, nous en conclurons ces deux théorèmes bien remarquables: 1° *toute hélice à base circulaire* (ABCDE..., A'B'C'D'E'...) *a pour lieu de ses centres de cour-*

bure une autre hélice ($abcde\ldots$, $a'b'c'd'e'\ldots$) déterminée comme ci-dessus; 2° *le rayon de courbure de la première hélice est* CONSTANT, *et égal à la somme* $OE + Oe$ *des rayons des cylindres où sont situées ces deux courbes.*

675. Réciproquement, on prouvera, par des considérations semblables, que la seconde hélice ($abcde\ldots$, $a'b'c'd'e'\ldots$) a pour lieu de ses centres de courbure la première hélice ($ABCD\ldots$, $A'B'C'D'\ldots$); et que le rayon de courbure de celle-là est aussi constamment égal à la somme $Oe + OE$. Cela tient à ce que le plan normal $E'N'N$ de la première hélice est le plan osculateur (n° **463**) de la seconde; et qu'aussi le plan normal de celle-ci, qui serait $E'T'T$, perpendiculaire à la tangente (en, $E'N'$), se trouve le plan osculateur de la première: de sorte qu'il y a une complète réciprocité entre ces deux hélices, et les *angles de contingence* et *de torsion* (n^os^ **653, 654**) dans l'une, sont respectivement égaux aux *angles de torsion* et *de contingence* dans l'autre. Ce résultat est un cas particulier de la relation générale que nous avons fait remarquer au n° **659**; mais, comme nous l'avons observé alors, il ne faut pas en conclure que la torsion même, ou *la cambrure* de la seconde hélice, soit égale à *la courbure* de la première, ni réciproquement; car les éléments correspondants AB et ab de ces courbes ne sont pas de même longueur.

676. Si l'on veut exprimer par l'analyse la grandeur des rayons de courbure ρ et ρ' de ces deux hélices, il n'y a qu'à poser

$$OA = R, \quad Oa = r, \quad \text{angle } T' = \omega, \quad N' = 90^\circ - \omega = \omega', \quad O'E' = \tfrac{1}{4}h;$$

et le triangle rectangle $A'\delta'\alpha'$, que nous avons tracé sur l'épure, fournira évidemment la relation $r = R \operatorname{tang}^2 \omega$, d'où l'on déduira

$$\rho = R + r = R(1 + \operatorname{tang}^2 \omega) = R\left(1 + \frac{h^2}{4\pi^2 R^2}\right)$$

pour la première hélice; et pour la seconde,

$$\rho' = r + R = r(1 + \operatorname{tang}^2 \omega') = r\left(1 + \frac{h^2}{4\pi^2 r^2}\right).$$

677. (*Fig.* 128.) Maintenant, construisons *une développée* de l'hélice ($ABCD\ldots$, $A'B'C'D'\ldots$), en menant d'abord, par un point arbitraire (E, E') de cette courbe, une droite qui soit située (n° **657**) dans un plan normal $E'N'N$ relatif à ce point; ou bien une tangente à la surface polaire, enveloppe des plans normaux, laquelle surface est ici l'hélicoïde développable qui a pour arête de rebroussement l'hélice ($abcde\ldots$, $a'b'c'd'e'\ldots$). Afin d'arriver à des résultats plus symétriques, choisissons pour cette première tangente le rayon de courbure (Ee, E'), et rappelons-nous qu'après le développement de cet hélicoïde, la développée cherchée deviendra une ligne droite (n° **658**) qui devra être le prolongement indéfini de (Ee, E'). Si donc nous voulons développer cet hélicoïde sur son plan tangent $E'N'N$, il faudra (n° **467**) rabattre les tangentes (ne, $N'E'$) et ($N\alpha$, $N'\alpha'$) suivant $n\varepsilon$ et $N\alpha''$; puis, élever à leurs extrémités deux perpendiculaires $\varepsilon\omega$ et $\alpha''\omega$ qui détermineront par leur ren-

contre le centre ω et le rayon $\omega\varepsilon$ (*) du cercle $\varepsilon\lambda$ suivant lequel se transformera l'hélice ($abcd\ldots$, $a'b'c'd'\ldots$); d'ailleurs, sur ce développement, la droite indéfinie $\omega\varepsilon\pi$ représentera la transformée de la développée cherchée.

Quant à la position que prendra, sur ce développement, la génératrice quelconque (hv, $h'v'$) de l'hélicoïde, nous l'obtiendrons en prenant l'arc de cercle $\varepsilon\eta$ de même longueur que l'arc d'hélice (eh, $E'h'$), longueur qui est donnée (n° **468**) par l'hypoténuse du triangle $E'\eta'\eta''$, dont la base $E'\eta'$ égale l'arc horizontal eh; et alors la génératrice cherchée deviendra la tangente $\eta\pi$. Or, cette dernière allant rencontrer la transformée $\omega\varepsilon$ de la développée, au point π, il s'agira de reporter la distance $\eta\pi$ sur la génératrice primitive (hv, $h'v'$); pour cela, on prendra l'hypoténuse $E'\pi'' = \eta\pi$, et la base $E'\pi$ de ce nouveau triangle rectangle étant portée de h en p, fournira évidemment la projection horizontale p, puis la projection verticale p', d'un point de la développée cherchée, laquelle sera (epx, $E'p'x'$).

678. Ainsi, un fil enroulé sur cette branche suivant la direction ($xpeE$, $x'p'E'$) décrira par son extrémité (E, E') la partie supérieure ($EFGH\ldots$, $E'F'G'H'\ldots$) de l'hélice donnée, du moins jusqu'à une certaine limite que nous allons déterminer; et le *rayon de développée* aboutissant au point (p, p') sera la tangente (Hp, $H'p'$). Quant à la partie inférieure ($EDCB\ldots$, $E'D'C'B'\ldots$), elle aura pour développée une autre branche (ePX, $E'P'X'$) qui se construira comme la première, ou plutôt qui s'en déduira immédiatement, en cherchant des points (P, P') placés symétriquement avec (p, p').

679. Il y aura sur le développement de l'hélicoïde une tangente $\lambda\rho$, parallèle à la transformée $\omega\varepsilon\pi$ de la développée: donc, si nous rapportons le point λ sur l'hélice, en prenant l'arc de cercle ehl égal à la base $E'\lambda'$ du triangle rectangle $E'\lambda''\lambda'$ dont l'hypoténuse est l'arc $\varepsilon\lambda$ rectifié, la génératrice (lr, $l'r'$) de l'hélicoïde correspondra à $\lambda\rho$, et n'ira plus rencontrer la développée (epx, $E'p'x'$) qu'à l'infini. Toutefois, ce n'est pas là l'asymptote de cette branche; car une pareille droite doit non-seulement rencontrer la courbe en un point infiniment éloigné, mais aussi lui être tangente. Or, puisqu'au point (p, p'), situé sur la génératrice (hv, $h'v'$), la tangente était (Hp, $H'p'$); pour le point infiniment éloigné situé sur (lr, $l'r'$) la véritable tangente, ou l'*asymptote*, partira du point (L, L'), diamétralement opposé à (l, l'), et sera la droite (Lz, $L'z'$), parallèle à (lr, $l'r'$).

680. On voit par là que la branche de développée (epx, $E'p'x'$), quoique infinie, ne peut servir qu'à décrire la portion d'hélice (EKL, $E'K'L'$); et quand le point générateur (E, E') du fil mobile est arrivé en (L, L'), il faut que ce fil prolongé en sens contraire (LZ, $L'Z'$), et fixé à son extrémité opposée, recommence à se plier

(*) Ce rayon $\omega\varepsilon$ doit se trouver égal à Ee, puisque c'est là le rayon de courbure (n° 674) de l'hélice ($abcd\ldots$, $a'b'c'd'\ldots$), et que cette ligne ne doit pas changer de courbure, quand on développe la surface dont elle est l'arête de rebroussement (n° 179, *note*). Ainsi il aurait mieux valu rabattre une seule tangente suivant $n\varepsilon$, puis élever la perpendiculaire $\varepsilon\omega$ égale à Ee, laquelle aurait suffi pour tracer le cercle $\varepsilon\lambda$: c'est la marche que nous avons déjà conseillée au n° 468.

sur une nouvelle branche (YQb, $Y'Q'b''$) qui a la même asymptote, et qui servira à décrire un second arc d'hélice (LAB, L'A'B''), égal au précédent. Pour construire cette nouvelle branche de développée, dont la projection horizontale doit être évidemment symétrique de epx, on prendra l'arc $lb = le$, puis on décrira la circonférence $pPqQ$, sur laquelle on placera le point Q à gauche du rayon Ob, comme le point p était placé à droite du rayon Oe; enfin, on projettera Q en Q', en élevant ce dernier au-dessus de l'horizontale $B''b''$ de la même quantité dont le point p' est abaissé au-dessous de $E'\lambda'$.

681. A la branche de développée (YQb, $Y'Q'b''$) succédera une troisième branche (bqy, $b''q'y'$) dont chaque point (q, q') se construira comme précédemment, et d'une manière que notre épure rend assez visible; cette troisième branche servira à décrire un nouvel arc d'hélice (BES, B''E''S''), toujours égal aux précédents, et ainsi de suite. L'asymptote de cette dernière branche serait encore parallèle à la génératrice de l'hélicoïde, qui partirait du point diamétralement opposé à (S, S''); mais il sera plus simple de mener au cercle la tangente SWU, qui coupera LZ au point W, situé sur le rayon Ob : et comme ce point serait projeté en W' sur la première asymptote, il faudra placer le point W'' à la même hauteur au-dessus de $B''b''$, puis tirer la droite W''U' de manière à former avec la verticale le même angle que W'Z.

682. Quant à l'asymptote ($V\zeta$, $V''\zeta'$) de la branche (ePX, E'P'X'), sa projection horizontale a une position symétrique de Vz; et sa projection verticale étant évidemment parallèle à $V'z'$, il suffira de la mener par le point V'' placé au-dessous de E', comme le point V' est au-dessus.

683. (*Fig.* 128.) Pour mieux saisir la liaison de ces diverses branches de la développée totale d'une hélice, et bien comprendre la description de cette courbe par un *mouvement continu*, sans être obligé de transporter le point d'attache du fil mobile, d'une branche sur l'autre, il n'y a qu'à se représenter une droite indéfinie et *inflexible*, placée d'abord dans la position horizontale (Ee, E'), laquelle roule, *sans glisser*, sur la branche (epx, $E'p'x'$) en lui demeurant tangente. Dans ce mouvement, le point générateur (E, E') commencera par décrire l'arc d'hélice (EKL, E'K'L'), et lorsqu'il sera parvenu en (L, L'), la droite mobile sera devenue l'asymptote (Lz, $L'z'$); mais, comme au même instant cette droite touchera à l'infini la seconde branche (bY, $b''Y'$), si elle recommence à rouler en sens contraire sur cette dernière branche, pour se rapprocher de la position horizontale (BbW, $B''b''$), le point générateur décrira, dans cette seconde période de son mouvement non interrompu, l'arc d'hélice (LAB, L'A''B''). Puis, si de la position horizontale (Bb, $B''b''$), la droite mobile vient à rouler sur la troisième branche (bqy, $b''q'y'$), le point générateur décrira un nouvel arc d'hélice (BES, B''E''S''), jusqu'à ce que la droite ait pris la position de l'asymptote (SWU, S''W''U'); d'où elle passera, sans interruption, sur une quatrième branche qui a la même asymptote, et ainsi de suite.

Si l'on éprouvait quelque difficulté à suivre ces divers mouvements dans l'espace,

on pourrait d'abord les étudier sur une *sinusoïde* (n° **451**, *note*), courbe plane dont la développée, située dans son plan, offre ainsi des branches infinies qui ont, deux à deux, une asymptote commune.

CHAPITRE II.

DE LA COURBURE DES SURFACES.

684. Deux surfaces sont dites *osculatrices* l'une de l'autre, lorsque tout plan mené par la normale commune les coupe suivant deux courbes qui sont *osculatrices entre elles* (n° **650**), ou bien qui ont *le même rayon de courbure*. Mais on doit sentir que, parmi toutes les sphères qui peuvent *toucher* une surface S en un point donné, aucune ne saurait lui être osculatrice; puisque la courbure d'une sphère est uniforme tout autour de sa normale, tandis qu'il n'en est pas ainsi d'une surface quelconque. Alors, pour estimer la courbure de cette dernière en un point donné, on cherche les rayons de courbure des diverses *sections normales*, et, par leur comparaison, on acquiert des notions précises sur la forme plus ou moins aplatie de la surface autour du point considéré, ainsi que sur sa position par rapport à son plan tangent. Or il existe, entre les rayons de courbure de ces sections normales, une loi bien remarquable que nous allons d'abord étudier sur les surfaces du second degré.

685. (*Fig.* 131.) Dans un ellipsoïde dont les trois demi-axes sont $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, considérons spécialement un sommet C, pour lequel la normale est l'axe COZ, perpendiculaire aux tangentes CX et CY des deux ellipses principales CA et CB. Si nous menons par ce point un troisième plan normal VCZ, dont la trace, sur le plan tangent XCY, soit CV, il coupera la surface suivant une ellipse CD, qui aura évidemment pour demi-axes $OC = c$ et $OD = d$. Or on sait (n° **200**) que les rayons de courbure, au sommet C des trois ellipses CA, CB, CD, ont pour grandeurs respectives

$$CG = \frac{a^2}{c} = R, \quad CH = \frac{b^2}{c} = R', \quad CI = \frac{d^2}{c} = \rho;$$

et comme le demi-diamètre d de l'ellipse ADB aura toujours une longueur comprise entre a et b, on voit qu'en supposant $a < b$, le rayon ρ se trouvera toujours plus grand que R, et plus petit que R'; c'est-à-dire que de toutes les *sections normales* faites par le sommet C, la courbe CA est la section de *courbure maximum*, puisque son rayon R est le plus petit (n° **653**), et la courbe CB est la section de *courbure minimum*, puisque son rayon R' est plus grand que tout autre.

D'ailleurs, si l'on désigne par φ l'angle que fait le plan normal VCZ avec le plan principal XCZ, φ sera aussi l'angle compris entre l'axe OA et le diamètre OD de l'ellipse ADB; et l'on sait que la longueur de ce diamètre est donnée par l'équation

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{b^2}\sin^2\varphi.$$