sur une nouvelle branche (YQb, $Y'Q'b''$) qui a la même asymptote, et qui servira à décrire un second arc d'hélice (LAB, L'A'B''), égal au précédent. Pour construire cette nouvelle branche de développée, dont la projection horizontale doit être évidemment symétrique de epx, on prendra l'arc $lb = le$, puis on décrira la circonférence $pPqQ$, sur laquelle on placera le point Q à gauche du rayon Ob, comme le point p était placé à droite du rayon Oe; enfin, on projettera Q en Q', en élevant ce dernier au-dessus de l'horizontale $B''b''$ de la même quantité dont le point p' est abaissé au-dessous de $E'\lambda'$.

681. A la branche de développée (YQb, $Y'Q'b''$) succédera une troisième branche (bqy, $b''q'y'$) dont chaque point (q, q') se construira comme précédemment, et d'une manière que notre épure rend assez visible ; cette troisième branche servira à décrire un nouvel arc d'hélice (BES, B''E''S''), toujours égal aux précédents, et ainsi de suite. L'asymptote de cette dernière branche serait encore parallèle à la génératrice de l'hélicoïde, qui partirait du point diamétralement opposé à (S, S''); mais il sera plus simple de mener au cercle la tangente SWU, qui coupera LZ au point W, situé sur le rayon Ob : et comme ce point serait projeté en W' sur la première asymptote, il faudra placer le point W'' à la même hauteur au-dessus de $B''b''$, puis tirer la droite W''U' de manière à former avec la verticale le même angle que W'Z.

682. Quant à l'asymptote ($V\zeta$, $V''\zeta'$) de la branche (ePX, E'P'X'), sa projection horizontale a une position symétrique de Vz; et sa projection verticale étant évidemment parallèle à $V'z'$, il suffira de la mener par le point V'' placé au-dessous de E', comme le point V' est au-dessus.

683. (*Fig.* 128.) Pour mieux saisir la liaison de ces diverses branches de la développée totale d'une hélice, et bien comprendre la description de cette courbe par un *mouvement continu*, sans être obligé de transporter le point d'attache du fil mobile, d'une branche sur l'autre, il n'y a qu'à se représenter une droite indéfinie et *inflexible*, placée d'abord dans la position horizontale (Ee, E'), laquelle roule, *sans glisser*, sur la branche (epx, $E'p'x'$) en lui demeurant tangente. Dans ce mouvement, le point générateur (E, E') commencera par décrire l'arc d'hélice (EKL, E'K'L'), et lorsqu'il sera parvenu en (L, L'), la droite mobile sera devenue l'asymptote (Lz, $L'z'$); mais, comme au même instant cette droite touchera à l'infini la seconde branche (bY, $b''Y'$), si elle recommence à rouler en sens contraire sur cette dernière branche, pour se rapprocher de la position horizontale (BbW, $B''b''$), le point générateur décrira, dans cette seconde période de son mouvement non interrompu, l'arc d'hélice (LAB, L'A''B''). Puis, si de la position horizontale (Bb, $B''b''$), la droite mobile vient à rouler sur la troisième branche (bqy, $b''q'y'$), le point générateur décrira un nouvel arc d'hélice (BES, B''E''S''), jusqu'à ce que la droite ait pris la position de l'asymptote (SWU, S''W''U'); d'où elle passera, sans interruption, sur une quatrième branche qui a la même asymptote, et ainsi de suite.

Si l'on éprouvait quelque difficulté à suivre ces divers mouvements dans l'espace,

on pourrait d'abord les étudier sur une *sinusoïde* (n° **451**, *note*), courbe plane dont la développée, située dans son plan, offre ainsi des branches infinies qui ont, deux à deux, une asymptote commune.

CHAPITRE II.

DE LA COURBURE DES SURFACES.

684. Deux surfaces sont dites *osculatrices* l'une de l'autre, lorsque tout plan mené par la normale commune les coupe suivant deux courbes qui sont *osculatrices entre elles* (n° **650**), ou bien qui ont *le même rayon de courbure*. Mais on doit sentir que, parmi toutes les sphères qui peuvent *toucher* une surface S en un point donné, aucune ne saurait lui être osculatrice; puisque la courbure d'une sphère est uniforme tout autour de sa normale, tandis qu'il n'en est pas ainsi d'une surface quelconque. Alors, pour estimer la courbure de cette dernière en un point donné, on cherche les rayons de courbure des diverses *sections normales*, et, par leur comparaison, on acquiert des notions précises sur la forme plus ou moins aplatie de la surface autour du point considéré, ainsi que sur sa position par rapport à son plan tangent. Or il existe, entre les rayons de courbure de ces sections normales, une loi bien remarquable que nous allons d'abord étudier sur les surfaces du second degré.

685. (*Fig.* 131.) Dans un ellipsoïde dont les trois demi-axes sont $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, considérons spécialement un sommet C, pour lequel la normale est l'axe COZ, perpendiculaire aux tangentes CX et CY des deux ellipses principales CA et CB. Si nous menons par ce point un troisième plan normal VCZ, dont la trace, sur le plan tangent XCY, soit CV, il coupera la surface suivant une ellipse CD, qui aura évidemment pour demi-axes $OC = c$ et $OD = d$. Or on sait (n° **200**) que les rayons de courbure, au sommet C des trois ellipses CA, CB, CD, ont pour grandeurs respectives

$$CG = \frac{a^2}{c} = R, \quad CH = \frac{b^2}{c} = R', \quad CI = \frac{d^2}{c} = \rho;$$

et comme le demi-diamètre d de l'ellipse ADB aura toujours une longueur comprise entre a et b, on voit qu'en supposant $a < b$, le rayon ρ se trouvera toujours plus grand que R, et plus petit que R'; c'est-à-dire que de toutes les *sections normales* faites par le sommet C, la courbe CA est la section de *courbure maximum*, puisque son rayon R est le plus petit (n° **653**), et la courbe CB est la section de *courbure minimum*, puisque son rayon R' est plus grand que tout autre.

D'ailleurs, si l'on désigne par φ l'angle que fait le plan normal VCZ avec le plan principal XCZ, φ sera aussi l'angle compris entre l'axe OA et le diamètre OD de l'ellipse ADB; et l'on sait que la longueur de ce diamètre est donnée par l'équation

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{b^2}\sin^2\varphi.$$

Donc, en multipliant tous les termes par c, et ayant égard aux valeurs précédentes des rayons ρ, R, R′, il viendra

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\varphi + \frac{1}{R'}\sin^2\varphi,$$

relation qui permettra de calculer immédiatement le rayon de courbure ρ d'une section normale quelconque passant par le sommet C, quand on connaîtra l'angle φ de cette section avec une des deux *sections principales*, et les rayons de courbure R et R′ de ces dernières courbes.

686. (*Fig.* 132.) Considérons maintenant un hyperboloïde à une nappe, dont l'ellipse de gorge est CAFE qui a pour axe les deux axes réels de la surface, savoir : $OA = a$, $OC = c$; tandis que l'axe imaginaire est une horizontale $Ob = b$, perpendiculaire au plan de l'ellipse que nous regardons ici comme le plan vertical de la figure. Le rayon de courbure de cette ellipse, pour le sommet C, sera une ligne $CG = \frac{a^2}{c} = R$, et celui de l'hyperbole BCL contenue dans le plan des deux axes OC et Ob, sera $CH \frac{b^2}{c} = R'$; mais il se trouvera dirigé au-dessus du plan tangent XCY au lieu d'être au-dessous comme CG. Maintenant, menons par le point C un plan normal quelconque VCZ, qui forme avec le plan principal XCZ un angle désigné par φ; si cet angle est assez petit, la section sera une ellipse CDF qui aura pour axes $OC = c$, $OD = d$, et ce dernier sera évidemment un diamètre de l'hyperbole ADK contenue dans le plan des deux axes horizontaux OA et Ob. Or on sait que ce diamètre est lié avec les axes de l'hyperbole, par la relation

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\varphi - \frac{1}{b^2}\sin^2\varphi;$$

si donc on multiplie tous les termes par c, et qu'on observe que le rayon de courbure au sommet C de l'ellipse CDF est $\rho \frac{d^2}{c}$, on en conclura

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\varphi - \frac{1}{R'}\sin^2\varphi,$$

relation qui rentre précisément dans la formule (1), pourvu qu'on y regarde comme *négatif* celui des deux *rayons principaux* R, R′, qui se trouvera dirigé *au-dessus* du plan tangent (*).

687. Cela posé, tant que l'angle φ sera peu différent de zéro, il est certain que le premier terme du second membre de la formule (2) prévaudra sur le terme négatif,

(*) Ordinairement, on adopte l'hypothèse contraire, parce que l'analyse fournit une valeur positive pour le rayon de courbure d'une courbe située *au-dessus* de sa tangente, du moins quand on compte les ordonnées positives *de bas en haut*. Mais, comme nous avons dirigé ici l'axe des z positifs *de haut en bas*, la convention faite dans le texte s'accorde bien avec l'analyse; et nous avons préféré cette disposition, parce que les sections normales sont plus commodes à figurer quand on les place au-dessous du plan tangent.

et qu'ainsi le rayon de courbure ρ de la section normale CDF sera positif, ce qui annonce que cette courbe sera *convexe*, c'est-à-dire située *au-dessous* du plan tangent XCY. D'ailleurs, $\frac{1}{\rho}$ étant évidemment moindre que $\frac{\cos^2\varphi}{R}$, et à plus forte raison moindre que $\frac{1}{R}$, il en résulte que le rayon variable ρ sera plus grand que R, et qu'il augmentera continuellement avec φ, jusqu'à ce que cet angle ait acquis la valeur ω déterminée par l'équation

$$\frac{\cos^2\omega}{R} = \frac{\sin^2\omega}{R'}, \quad \text{d'où} \quad \tang\omega = \pm\sqrt{\frac{R'}{R}}.$$

Si donc on trace sur le plan tangent XCY, ou sur le point horizontal (*) parallèle à celui-là, deux droites O′P, O′Q, qui fassent avec O′X′ des angles égaux à ω, alors, quand le plan sécant normal arrivera dans la position O′P, il coupera l'hyperboloïde suivant une ligne dont la courbure sera nulle, puisque ρ deviendra infini : et, en effet, on doit voir que cette section sera l'une des deux génératrices rectilignes qui passent par le sommet C, attendu que, d'après les valeurs de R et R′, l'expression de ω revient à $\tang\omega = \frac{b}{a}$.

688. (*Fig.* 132.) Lorsque l'angle φ sera devenu plus grand que ω, et que le plan normal aura pris la position O′W′, alors la formule (2) montre que le rayon ρ aura une valeur négative; de sorte que la section correspondante se trouvera *concave*, c'est-à-dire située au-dessus du plan tangent, et ce sera une hyperbole dont le rayon de courbure ρ ira en diminuant numériquement, jusqu'à ce que l'on ait

$$\varphi = 90^\circ, \quad \text{d'où} \quad \rho = -R' = CH.$$

Ce dernier résultat se rapporte au plan normal O′Y′, qui coupe la surface suivant l'hyperbole principale BCL.

689. En continuant cette discussion depuis $\varphi = 90^\circ$ jusqu'à $\varphi = 360^\circ$, on retrouverait successivement des résultats analogues, puisque la formule (2) ne renferme que les carrés de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$. D'où l'on doit conclure, 1° que les deux plans normaux $PO'p$, $QO'q$ partagent la surface autour du point (O′, C) en quatre régions distinctes : dans les deux angles PO′Q et $pO'q$ opposés par le sommet, toutes les sections normales sont *convexes*, ou situées au-dessous du plan tangent XCY; et dans les deux autres angles $PO'q$, $QO'p$, toutes les sections normales sont *concaves*, ou situées au-dessus de ce plan tangent; d'ailleurs le passage des unes aux autres se fait par deux sections rectilignes $PO'p$, $QO'q$, qui sont les génératrices de l'hyperboloïde situées dans le plan tangent XCY. 2° Le rayon de courbure R de la section principale CAF est le *minimum* de tous les rayons positifs, lesquels varient

(*) Nous employons ici, outre la figure en perspective sur le *tableau* vertical XCZ, une projection horizontale faite sur un plan perpendiculaire à la normale CZ, afin de faire mieux apercevoir les limites qui séparent les sections convexes des sections concaves.

depuis $\rho = \mathrm{R}$ jusqu'à $\rho = \infty$; tandis que le rayon de courbure R′ de l'autre section principale BCL est le *minimum* des rayons négatifs : ou bien, en tenant compte du signe de ces derniers, on pourra dire que $-\mathrm{R}'$ est un *maximum*, mais seulement par rapport aux rayons négatifs qui varient depuis $\rho = -\mathrm{R}'$ jusqu'à $\rho = -\infty$.

690. (*Fig.* 133 et 134.) Les propositions que nous venons de démontrer pour un sommet réel d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde à une nappe, sont également vraies pour toute surface S, et *pour un point quelconque* M de cette surface dont la normale est MZ. C'est-à-dire que, *parmi toutes les sections normales passant par ce point, il y en a toujours deux,* MA *et* MB, *nommées* SECTIONS PRINCIPALES, *dont la première a un rayon de courbure* MG = R *qui est* MINIMUM, *et la seconde un rayon de courbure* MH = R′ *qui est* MAXIMUM : *ces deux sections principales sont situées dans des plans* XMZ, YMZ, *perpendiculaires entre eux ; et quand une fois on connaît la position de ces plans et les* RAYONS PRINCIPAUX R, R′, *le rayon de courbure* ρ *de toute autre section normale* MD *passant par le même point, est donné par la formule*

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\mathrm{R}}\cos^2\varphi + \frac{1}{\mathrm{R}'}\sin^2\varphi, \tag{3}$$

où φ désigne l'angle du plan de MD avec le plan de MA, et où il faudrait regarder comme *négatif* celui des deux rayons principaux R, R′, qui serait dirigé *au-dessus* du plan tangent XMY, si la surface était *non convexe*, c'est-à-dire traversée par son plan tangent en M.

Ce théorème important, dû à *Euler*, n'est guère possible à démontrer d'une manière complète et rigoureuse, au moyen de considérations purement synthétiques ; c'est pourquoi nous préférons de l'admettre ici comme un résultat du calcul différentiel (*) ; mais c'est l'unique emprunt que nous ferons à l'analyse, et nous allons ensuite développer, par la géométrie seule, les conséquences intéressantes dont ce théorème est susceptible.

691. Lorsque les deux rayons principaux MG = R, MH = R′, sont positifs, comme dans la *fig.* 133, la formule (3) montre que ρ est constamment positif, quel que soit l'angle φ; donc alors toutes les sections normales se trouvent au-dessous du plan tangent XMY, au moins dans les environs du point M, et la surface est *convexe* en ce point. D'ailleurs, en supposant que $\mathrm{R} < \mathrm{R}'$, il est facile de voir que R est alors le *minimum absolu* de tous les rayons de courbure des sections normales passant par M, et R′ le *maximum absolu* de tous ces mêmes rayons ; en effet, la formule (3), écrite tour à tour sous l'une et l'autre des formes suivantes,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\mathrm{R}} - \sin^2\varphi \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{1}{\mathrm{R}'}\right), \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\mathrm{R}'} + \cos^2\varphi \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{1}{\mathrm{R}'}\right),$$

montre qu'on a toujours, quel que soit l'angle φ,

$$\frac{1}{\rho} < \frac{1}{\mathrm{R}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho} > \frac{1}{\mathrm{R}'}; \quad \text{d'où} \quad \rho < \mathrm{R} \quad \text{et} \quad \rho > \mathrm{R}'.$$

(*) *Voyez* l'*Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions*, chap. XVI.

Des conséquences semblables auraient lieu, si les deux rayons principaux étaient négatifs à la fois ; seulement alors, la surface se trouverait placée au-dessus du plan tangent, tout autour du point M.

692. Lorsque, pour un point particulier M d'une surface quelconque, il arrive que les deux rayons principaux R, R′, sont égaux et de même signe, la formule (3) se réduit évidemment, et l'angle φ disparaît ; de sorte qu'on trouve $\rho = \mathrm{R}$ pour toutes les sections normales passant par ce point, autour duquel la surface présente une courbure uniforme dans tous les sens, comme celle d'une sphère. Ces points particuliers se nomment des *ombilics*, et nous en ferons remarquer plusieurs de ce genre dans l'ellipsoïde (n° **739**) ; mais il est déjà évident que, quand la méridienne d'une surface de révolution coupe l'axe sous un angle droit, ce point est toujours un ombilic.

693. Lorsque les deux rayons principaux sont de signes contraires, comme dans la *fig.* 134, où MG = R, qui se rapporte à la section (MA, M′A′), se trouve positif, et où MH = R′, qui se rapporte à la section (MB, M′B′), se trouve négatif, alors la formule (3), écrite avec le signe de R′ en évidence, devient

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\mathrm{R}}\cos^2\varphi - \frac{1}{\mathrm{R}'}\sin^2\varphi. \tag{4}$$

Elle montre déjà que ρ sera tantôt positif, tantôt négatif, suivant la valeur de l'angle φ ; c'est-à-dire qu'il y aura des sections normales situées, les unes au-dessous, les autres au-dessus du plan tangent XMY ; ainsi la surface sera *non convexe*, ou *à courbures opposées*. Pour déterminer les limites de ces diverses sections, cherchons la valeur particulière ω de l'angle φ, qui satisferait à l'équation

$$\frac{1}{\mathrm{R}}\cos^2\omega - \frac{1}{\mathrm{R}'}\sin^2\omega = 0, \quad \text{d'où} \quad \tang\omega = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}};$$

puis, traçons sur le plan tangent XMY, ou sur le plan horizontal (*) qui lui est parallèle, deux droites M′P, M′Q, qui fassent chacune avec M′X′ un angle égal à ω. Alors, pour toutes les valeurs de φ comprises entre $\varphi = -\omega$ et $\varphi = +\omega$, comme aussi pour toutes celles qui tomberont entre $\varphi = 180° - \omega$ et $\varphi = 180° + \omega$, la formule (4) donnera évidemment des valeurs de ρ, qui seront positives ; c'est-à-dire que toutes les sections normales comprises dans les angles dièdres PM′Q et pM′q seront situées au-dessous du plan tangent horizontal XMY. Au contraire, lorsque la valeur de φ tombera entre ω et $180° - \omega$, ou bien entre $180° + \omega$ et $360° - \omega$, la formule (4) donnera pour ρ une valeur négative ; ce qui prouve que toutes les sections normales, comprises dans les deux angles dièdres PM′q et QM′p, seront situées au-dessus du plan tangent XMY, au moins dans les environs du point M.

(*) Nous employons encore ici, pour plus de clarté, une perspective sur un plan vertical, et une projection sur un plan horizontal ; si d'ailleurs on veut fixer ses idées par un exemple, on peut regarder la surface qui nous occupe comme étant la gorge d'une poulie dont l'axe serait horizontal et projeté suivant (B′L′, G). Le point considéré (M, M′) est alors sur le cercle de gorge (EMA, E′M′A′), et la section (BML, B′M′L′) est un demi-cercle qui sert de méridien au tore de cette poulie.

694. (*Fig.* 134.) Enfin, lorsque φ recevra une des valeurs $\varphi = \pm \omega$, ou $\varphi = 180^\circ \pm \omega$, le rayon ρ devenant *infini* dans la formule (4), il s'ensuit que les deux plans normaux *limites* PM$'p$, QM$'q$, couperont la surface suivant des courbes qui, sans être rectilignes, comme cela arrivait dans l'hyperboloïde (n° **687**), seront du moins très-aplaties dans les environs du point M, et y offriront *une courbure nulle;* c'est-à-dire que chacune aura en cet endroit deux éléments communs avec sa tangente qui sera précisément la trace M$'$P ou M$'$Q du *plan normal limite* sur le plan tangent XMY. Ainsi, on peut dire que les deux plans normaux PM$'p$ et QM$'q$ partagent la surface en *quatre* régions distinctes qui sont tour à tour *convexes* et *concaves*.

En résumé, dans les surfaces non convexes, les rayons de courbure positifs varient, d'après la formule (4), depuis $\rho = +\mathrm{R}$ jusqu'à $\rho = +\infty$; et les rayons négatifs, depuis $\rho = -\mathrm{R}'$ jusqu'à $\rho = -\infty$. Donc ici, R sera un *minimum* relativement aux rayons de la première classe, et $-\mathrm{R}'$ un *maximum* analytique pour ceux de la seconde classe, en tenant compte de leurs signes; mais si l'on voulait seulement parler de leurs grandeurs absolues, R$'$ serait aussi un *minimum*.

695. Remarque. Si l'on compare, dans une surface quelconque, deux sections normales dont les plans comprennent entre eux un angle droit, leurs rayons de courbure seront donnés par les formules , c'est-à-dire trav

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\mathrm{R}}\cos^2\varphi + \frac{1}{\mathrm{R}'}\sin^2\varphi, \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\mathrm{R}}\cos^2\varphi' + \frac{1}{\mathrm{R}'}\sin^2\varphi',$$

avec la relation $\varphi' = \varphi + 90^\circ$; d'où il suit qu'en ajoutant ces équations membre à membre, on aura

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}'};$$

ce qui montre que la *somme des* courbures *de deux sections perpendiculaires* l'une à l'autre, quel que soit l'angle φ, *est toujours constante* et *égale à la somme des deux* courbures *principales*. La somme $\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}'}$ a été nommée quelquefois *la courbure de la surface;* mais il vaudrait mieux appliquer cette dénomination à la moitié de cette somme, qui se trouverait ainsi une moyenne arithmétique entre la courbure *maximum* et la courbure *minimum*. D'un autre côté, M. *Gauss* a désigné sous le même nom de *courbure de surface*, la quantité $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}.\mathrm{R}'}}$ ou la moyenne géométrique entre les deux courbures principales. Quant à la construction graphique des sections principales et de leurs rayons de courbure, nous attendrons, pour en citer des exemples, que nous ayons parlé des *lignes de courbure*, parce que ces dernières offriront à la géométrie des secours fort utiles (*).

(*) Pour compléter les notions précédentes, nous ajouterons que si, par la tangente MV (*fig.* 133), on faisait une section *oblique* dont le plan formât un angle θ avec la section *normale* MD qui passe par la

696. (*Fig.* 135). *Pour chaque point* M *d'une surface quelconque* S, *on peut construire une surface du second degré* Σ *qui soit osculatrice de* S (n° **684**), *tout autour de ce point.* Supposons d'abord que la surface donnée S soit convexe en M, et que MA et MB représentent ses deux sections principales, ou les sections normales de *courbure maximum* et *minimum*, lesquelles ont pour rayons MG = R, MH = R$'$. Sur la normale MZ, prenons une distance arbitraire MO = c, que nous adopterons pour un des axes d'une ellipse MA$'$ qui, tracée dans le plan de la section MA, devra lui être osculatrice : pour remplir cette condition, il suffit de choisir le second axe OA$' = a$ de telle sorte que le rayon de courbure de l'ellipse au sommet M soit égal à R, ce qui donne la relation

$$\frac{a^2}{c} = \mathrm{R}, \quad \text{d'où} \quad a = \sqrt{\mathrm{R}c};$$

ainsi le demi-axe OA$' = a$ se déterminera en cherchant une moyenne proportionnelle entre R et c. De même, dans le plan de la section MB, construisons une ellipse MB$'$ qui lui soit osculatrice, et qui ait pour ses demi-axes OM = c et OB$' = b$; ce dernier se déterminera encore par la relation

$$\frac{b^2}{c} = \mathrm{R}', \quad \text{d'où} \quad b = \sqrt{\mathrm{R}'c}.$$

Cela posé, les deux ellipses MA$'$ et MB$'$ déterminent complétement un ellipsoïde Σ qui aura pour ses trois demi-axes OM, OA$'$, OB$'$, attendu que le plan de la courbe MB est perpendiculaire sur celui de MA; et je dis que cet ellipsoïde sera *osculateur* de la surface S, ce qui se réduit à prouver (n° **684**) que tout plan normal MOD coupe S et Σ suivant deux courbes MD et MD$'$ qui ont le même rayon de courbure. Or, en appelant ρ et ρ' les rayons de ces deux sections, ils seront donnés (n^{os} **690** et **685**) par les formules

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\mathrm{R}}\cos^2\varphi + \frac{1}{\mathrm{R}'}\sin^2\varphi, \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{c}{a^2}\cos^2\varphi + \frac{c}{b^2}\sin^2\varphi,$$

lesquelles prouvent que $\rho = \rho'$, d'après les valeurs précédentes de a et b.

697. On doit observer que l'ellipsoïde Σ, osculateur de S pour le point M, n'est pas unique, puisque la longueur de l'axe c a été choisie arbitrairement; ainsi, en

même tangente MV, le rayon de courbure ρ_1 de la section oblique aurait avec le rayon ρ de MD la relation suivante :

$$\rho_1 = \rho\cos\theta,$$

laquelle exprime que ρ_1 est la projection de ρ sur le plan de la section oblique; ou bien, que la sphère décrite avec le rayon ρ sera coupée, par le plan de la section oblique, suivant un petit cercle qui sera précisément le cercle osculateur de cette section. C'est le théorème dû à *Meunier*, pour la démonstration duquel nous renverrons à notre *Analyse appliquée*, chap. XVII; en faisant seulement observer ici que, d'après la formule précédente, les sections obliques faites dans une surface quelconque seront toujours *convexes* ou *concaves* en même temps que la section normale qui passera par la même tangente.

prenant $c = a = \mathrm{R}$, ou $c = b = \mathrm{R}'$, on le rendrait de révolution, mais non pas autour de la normale MZ. D'ailleurs, nous aurions pu employer deux hyperboles, ou deux paraboles, pour courbes osculatrices des sections principales MA et MB; et la surface osculatrice de S serait devenue un hyperboloïde à deux nappes, ou un paraboloïde elliptique, qui sont tous les deux des surfaces convexes.

698. (*Fig.* 136.) Soit maintenant une surface S non convexe, dont les sections principales MA et MB ont des rayons de courbure de sens opposés, $\mathrm{MG} = \mathrm{R}$, $\mathrm{MH} = \mathrm{R}'$. Construisons, comme ci-dessus, une ellipse MA′ qui soit osculatrice de MA au point M, et dont les demi-axes soient $\mathrm{MO} = c$, longueur arbitraire prise sur la normale, et $\mathrm{OA}' = a$, ligne déterminée par la relation $a = \sqrt{\mathrm{R}c}$; mais, pour courbe osculatrice de la section MB, nous ne pouvons plus adopter une ellipse, car il n'existe pas de surface du second degré qui admette deux sections de ce genre, situées l'une au-dessous et l'autre au-dessus du plan tangent. Nous construirons donc une hyperbole B′ML′, qui ait pour demi-axe réel la ligne $\mathrm{MO} = c$, et pour demi-axe imaginaire une droite $\mathrm{OB}'' = b$, perpendiculaire au plan de l'ellipse, et telle, que le rayon de courbure de cette hyperbole (n° **200**) vérifie la relation

$$\frac{b^2}{c} = \mathrm{R}', \quad \text{d'où} \quad b = \sqrt{\mathrm{R}'c}.$$

Alors, l'ellipse MA′ et l'hyperbole MB′ détermineront complétement un hyperboloïde à une nappe Σ, lequel sera bien osculateur de S au point M (n° **684**); car tout plan normal qui fera un angle φ avec MA, coupera S et Σ suivant deux courbes dont les rayons de courbure ρ et ρ' seraient donnés (n^{os} **693** et **686**) par les formules

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\mathrm{R}}\cos^2\varphi - \frac{1}{\mathrm{R}'}\sin^2\varphi, \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{c}{a^2}\cos^2\varphi - \frac{c}{b^2}\sin^2\varphi,$$

lesquelles prouvent que $\rho = \rho'$, d'après les valeurs précédentes de a et b. Nous aurions eu encore un hyperboloïde osculateur de S, mais tourné en sens contraire, si nous avions mis l'ellipse à la place de l'hyperbole, et réciproquement; d'ailleurs, on ne doit pas oublier que l'axe c, dirigé suivant la normale MG ou MH, peut recevoir une longueur arbitraire. Enfin, si l'on avait adopté deux paraboles pour courbes osculatrices des sections MA et MB, on aurait obtenu, pour surface osculatrice de S, un paraboloïde hyperbolique.

699. LIGNES DE COURBURE *sur une surface quelconque*. (*Fig.* 135.) MONGE a nommé ainsi la suite des points pour lesquels les normales de la surface S vont se rencontrer consécutivement, et nous allons démontrer qu'à partir de chaque point M donné sur S, il n'existe en général que *deux lignes de courbure* MαU, MβV, *lesquelles se coupent à angle droit*, et sont *tangentes aux sections principales* MA, MB (n° **690**), dont elles diffèrent néanmoins, puisque ordinairement elles ne sont point planes, comme ces dernières. Commençons par étudier ces lignes de courbure au sommet d'une surface du second degré.

700. (*Fig.* 131.) Soient CA et CB les deux sections principales qui se coupent au sommet C d'un ellipsoïde, pour lequel la normale de la surface est CO; en menant un plan parallèle au plan tangent XCY, et à une distance Cω infiniment petite, il donnera une section elliptique $\alpha\beta\varepsilon$, dont les sommets α et β seront placés sur CA et CB; et si l'on prend sur cette courbe un point quelconque N différent de α et β, je dis que la normale NK de l'ellipsoïde ne rencontrera pas la normale CO relative au sommet C. En effet, cette dernière est projetée au centre ω de la petite ellipse, tandis que NK, qui doit être perpendiculaire à la tangente NT, se projettera sur le plan de cette même ellipse, suivant une droite NK′, encore perpendiculaire à NT: or on sait qu'une normale NK′ de l'ellipse $\alpha\beta\varepsilon$ ne va point passer par le centre ω; donc la normale NK de la surface ne rencontrera jamais Cω, quelque près de C que soit pris le point N; à moins qu'on ne le choisisse en α ou β, sur une des deux sections principales CA ou CB, parce qu'alors la normale de l'ellipsoïde serait projetée suivant l'un des axes $\alpha\omega$ ou $\beta\omega$, lesquels vont passer par le centre ω.

Il résulte de là que, pour le sommet C d'un ellipsoïde, il n'y a que deux lignes de courbure qui sont dirigées d'abord suivant les éléments Cα et Cβ des deux sections principales. D'ailleurs, pour ce point particulier, il arrivera que les deux lignes de courbure coïncideront totalement avec les sections CAF et CBF; parce que les normales de l'ellipsoïde, menées par tous les points de la courbe CA, sont situées dans le plan de cette courbe, attendu que les tangentes des sections horizontales, pour les sommets α, A,..., se trouvent toutes perpendiculaires au plan de l'ellipse CAF. Les mêmes motifs s'appliquent à l'autre section principale CBF.

701. Dans l'hyperboloïde à une nappe de la *fig.* 132, on verra aisément qu'une section parallèle au plan tangent XCY, et placée au-dessous à une distance infiniment petite, fournirait une hyperbole dont les deux sommets réels α et ε seraient sur ACE; tandis que si cette section était au-dessus de XCY, ce serait une hyperbole renversée dont les sommets réels β et λ se trouveraient sur BCL. Or, comme la normale de la surface se projetterait encore sur la normale de l'une ou de l'autre de ces hyperboles, et que cette dernière droite ne va passer par le centre qu'autant que le point de contact coïncide avec l'un des sommets, on en conclura, comme ci-dessus, que la normale OCH de l'hyperboloïde en C ne peut être rencontrée par une normale infiniment voisine que quand cette dernière part d'un point de la section principale CA ou CB. Il est donc démontré qu'au sommet C de l'hyperboloïde, il n'y a encore que deux lignes de courbure, lesquelles coïncident entièrement avec ACE et BCL, par les mêmes raisons que dans l'ellipsoïde.

702. (*Fig.* 135.) Revenons maintenant à une surface générale S que nous supposerons d'abord convexe, autour du point quelconque M que l'on considère. Il existe toujours (n° **696**) un ellipsoïde Σ qui est osculateur de S en M; et si l'on coupe ces deux surfaces par un plan parallèle au plan tangent, et infiniment voisin, non-seulement tous les points de la section αNβ ainsi obtenus seront communs à S et à Σ, mais encore les normales de ces deux surfaces, pour chacun des points α, N, β,..., seront les mêmes. En effet, on a vu que deux sections MD, MD′, contenues