pour directrices de l'hyperboloïde, ce dernier aura ainsi deux éléments superficiels MM″$m''m$ et $mm''n''n$ communs avec S, et sera dit l'hyperboloïde *osculateur* de cette surface, le long de la droite assignée GMM′M″. La génération de cet hyperboloïde ne renfermant plus que des données entièrement fixes, il sera unique; et il offrira avec la surface S un contact plus intime que tous les autres. D'ailleurs, pour tout point de la droite GM, les lignes de courbure de S seront tangentes à celles de l'hyperboloïde osculateur; et ces dernières sont aisées à déterminer d'après les remarques du n° **732**.

LIVRE IX.

ADDITIONS.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORÈMES DIVERS.

Nous réunissons ici diverses propositions relatives à des théories antérieures, mais qui n'auraient pas eu alors d'application prochaine, tandis qu'elles nous deviendront utiles dans la Perspective, les Ombres et la Stéréotomie.

---

745. *Lorsqu'un cylindre pénètre dans une sphère par une courbe* PLANE, *la seconde branche de l'intersection est également* PLANE; d'ailleurs cette *courbe de sortie*, qui est un cercle égal à la *courbe d'entrée*, se trouve perpendiculaire au plan qui serait mené à angle droit sur la courbe d'entrée et parallèlement aux génératrices du cylindre.

(*Fig.* 145.) Conduisons par le centre de la sphère un plan de projection qui soit parallèle aux génératrices du cylindre et perpendiculaire à la courbe d'entrée; alors cette courbe, qui est nécessairement un cercle, s'y trouvera représentée par la corde AB, égale à son diamètre, et les génératrices CA, FB sortiront de la sphère par les points A′ et B′, évidemment situés sur le même grand cercle que A et B; tandis qu'une arête quelconque DM sortira de cette surface par *un point dont la projection* M′ *tombera sur la droite* A′B′. En effet, toutes les cordes parallèles AA′, BB′, MM′,..., comprises dans la sphère, seraient divisées en deux parties égales par le plan OR, mené du centre perpendiculairement à leur direction commune : donc les ordonnées EA, PM, IB sont respectivement égales à EA′, PM′, IB′; et dès lors il est certain que les trois points A′, M′, B′ se trouvent en ligne droite, puisque A, M, B remplissent déjà cette condition. D'où il résulte que la courbe de sortie est projetée sur la droite A′M′B′, et qu'ainsi *elle est plane;* d'ailleurs elle satisfait bien aux autres conditions de l'énoncé, d'après le choix du plan de projection employé ici, et attendu que le diamètre A′B′ est évidemment égal au diamètre AB.

Observons que si le cylindre pénétrait dans la sphère par un grand cercle, tel que aOb, la courbe de sortie serait l'autre grand cercle $a'Ob'$; et pour construire plus aisément cette dernière courbe, qui se rencontrera dans l'épure des *Ombres d'une niche*, il suffira d'employer un plan de projection qui soit parallèle aux rayons de lumière et perpendiculaire à la courbe d'entrée, puisque, sur un tel plan, la courbe de sortie se projettera suivant une droite.

746. *Dans l'intersection d'un cône avec une sphère, si la courbe d'entrée est* PLANE, *la courbe de sortie l'est pareillement.*

(*Fig.* 146.) Adoptons pour plan de la figure celui qui, passant par le centre de la sphère et le sommet du cône, se trouve en même temps perpendiculaire à la courbe d'entrée, et désignons-le sous le nom de plan horizontal. La courbe d'entrée, qui est nécessairement un cercle, sera projetée suivant une corde AB de la sphère, et si S est le sommet situé dans notre plan horizontal, les deux arêtes SA, SB iront évidemment sortir de la sphère par les points a, b; mais, en outre, je dis que la droite ab est la projection totale de la courbe de sortie. En effet, si, par le point de la surface conique qui est projeté en m, on mène un plan vertical A′mB′, parallèle à AB, il coupera le cône suivant un cercle du diamètre A′B′, que nous rabattrons ici suivant A′m'B′; et l'ordonnée $m'm$ du cône étant moyenne proportionnelle entre les deux parties de ce diamètre, nous aurons

$$\overline{mm'}^2 = A'm.mB'.$$

Mais les deux triangles $mA'a$ et $mB'b$ sont semblables, puisque l'angle A′ égale l'angle SAB, qui a pour mesure le même arc que l'angle abB; donc ces triangles donneront l'égalité suivante :

$$A'm.mB' = am.mb, \quad \text{d'où} \quad \overline{mm'}^2 = am.mb.$$

Cette dernière relation prouve que l'ordonnée rabattue suivant mm' appartient aussi au cercle vertical décrit sur ab comme diamètre; et puisque ce nouveau cercle est évidemment sur la sphère proposée, nous en conclurons que le sommet de l'ordonnée mm', ou le point du cône qui est projeté en m, se trouve en même temps sur la sphère. Comme on en dirait autant de tout autre point du cône projeté en n sur ab, il est certain que le plan vertical ab coupe le cône et la sphère suivant un cercle *unique*, lequel est la seconde branche de leur intersection ou la *courbe de sortie;* ce qui démontre le théorème annoncé.

747. Observons que le cercle vertical ab est précisément ce qu'on appelle la section *anti-parallèle* du cône SAB à base circulaire; car la première condition que doit remplir cette section, c'est d'être perpendiculaire au *plan principal* du cône, c'est-à-dire à celui qui, passant par le sommet S et le centre C de la base circulaire AB, se trouve en outre perpendiculaire à cette base : or ce plan coïncide évidemment avec celui de notre épure, lequel contient les points S, O, et le rayon OC. Ensuite, la section anti-parallèle doit former, sur le plan principal, un triangle Sab, semblable et non parallèle à SAB; condition qui est encore remplie, puisque nous venons d'observer que les angles SAB et Sba avaient la même mesure.

748. *Lorsque deux cylindres du second degré se coupent suivant une première courbe* PLANE, *la courbe de sortie est aussi* PLANE.

(*Fig.* 147.) Supposons que l'ellipse EMM'FN'N soit la courbe d'entrée, commune aux deux cylindres (les mêmes raisonnements seront applicables à une hyperbole ou à une parabole; alors, en menant divers plans qui soient parallèles aux génératrices des deux cylindres à la fois, ils traceront dans l'ellipse des cordes MN, M'N',..., parallèles entre elles, et chacun de ces plans coupera d'ailleurs les deux cylindres suivant quatre droites. Celles qui répondront au plan sécant MN, savoir MA et NB, Ma et Nb, formeront, par leurs intersections, un parallélogramme MnNm, dont les deux sommets m et n appartiendront évidemment à la courbe de sortie; de même, cette courbe passera par les points m' et n' où se coupent les quatre arêtes M'A' et N'B', M'a' et N'b', contenues dans le plan sécant M'N'; et ainsi des autres. Or toutes les diagonales mn, $m'n'$,..., sont évidemment parallèles; elles passeront d'ailleurs par les milieux des cordes MN, M'N',..., et, par suite, elles rencontreront toutes le diamètre EF conjugué avec ces cordes. Donc ces diagonales formeront, en s'appuyant sur la droite EF, une surface nécessairement *plane*, qui contiendra toute la courbe de sortie mm'F$n'n$; ainsi, cette dernière satisfait bien à l'énoncé du théorème.

749. On voit d'ailleurs que la courbe mm'F$n'n$ sera de même espèce que la courbe d'entrée; car, pour des abscisses communes OP, OP',..., les ordonnées MP et mP, M'P' et m'P',..., seront évidemment proportionnelles; de sorte que les deux branches de l'intersection seront ici deux ellipses ayant un diamètre commun EF. Il est clair aussi qu'aux extrémités de ce diamètre, les tangentes ET et EV des deux courbes, ainsi que les arêtes des deux cylindres, se trouveront toutes parallèles aux plans sécants employés ci-dessus; par conséquent, les cylindres proposés auront *deux plans tangents communs et parallèles*.

750. *Lorsque deux surfaces du second degré ont* UN AXE COMMUN, *en grandeur et en position, elles ne peuvent se couper que suivant* DEUX COURBES PLANES, *qui passent l'une et l'autre par l'axe commun.*

(*Fig.* 148.) D'après l'hypothèse admise, les deux surfaces auront le même centre, et en faisant passer par ce point notre plan horizontal de projection, que nous choisirons d'ailleurs perpendiculaire à l'axe commun (O, O'C'), il coupera les deux surfaces données suivant deux courbes du second degré et concentriques ABDE et $abde$. Or, si ces dernières se rencontrent en deux points G et H, il y en aura nécessairement deux autres, I et K, diamétralement opposés aux premiers, et qui seront encore communs aux deux courbes. Alors le plan vertical GI coupera les surfaces proposées suivant deux courbes qui coïncideront complétement, puisqu'elles auront les mêmes demi-axes OG et O'C'; donc cette section commune sera une des branches de l'intersection totale des deux surfaces, et l'autre branche sera la section aussi commune, faite par le plan vertical HK.

Ces raisonnements sont applicables à toutes les surfaces du second degré qui ont un centre, qu'elles soient ou non de même espèce, pourvu que l'axe commun soit en même temps *réel* ou *imaginaire* dans les deux surfaces à la fois.

751. Si la première n'avait pas de centre, son axe unique serait infini; et, par conséquent, la seconde devrait, pour satisfaire à l'énoncé du théorème, être aussi un paraboloïde ayant le même sommet. Alors on couperait ces deux paraboloïdes par un plan perpendiculaire à l'axe commun, et ces deux sections, qui auraient évidemment le même centre, se rencontreraient en quatre points diamétralement opposés, tels que G et I, H et K dans la figure précédente; d'où l'on conclurait que le plan conduit par la droite GI ou HK, et par l'axe commun, coupe les paraboloïdes suivant deux paraboles qui, ayant même axe, même sommet et un point commun G ou H, se confondront nécessairement.

752. On peut généraliser le théorème du n° **750**, en l'appliquant à *deux surfaces du second degré* qui ont *deux plans tangents communs et parallèles*. En effet, la droite qui joindra les points de contact de ces plans sera un diamètre commun aux deux surfaces; le plan diamétral conjugué avec ce diamètre, devant être parallèle aux plans tangents donnés, se trouvera le même pour la première et la seconde surface, et il coupera celles-ci suivant deux courbes concentriques, telles que ABDE et $abde$: de sorte que le plan mené par GI ou HK, et par le diamètre commun, produira dans les surfaces proposées deux sections qui devront encore coïncider, attendu qu'elles auront deux diamètres conjugués communs en direction et en longueur; donc *ces surfaces se couperont suivant deux courbes planes*.

753. (*Fig.* 149.) Un cas particulier de ce théorème se présente dans la rencontre de *deux berceaux* ou cylindres, *qui ont le même plan de naissance et la même montée*. En effet, si les deux ellipses AMNB et $amnb$, dont les axes verticaux sont égaux, représentent les bases de ces cylindres qui sont ici rabattues autour des axes AB et ab situés dans le plan horizontal de la naissance, on voit d'abord que les quatre génératrices AG, BH, aG, bK, se rencontrent en formant le parallélogramme GHIK. Ensuite, si l'on coupe les deux cylindres par un même plan horizontal, on obtiendra quatre arêtes partant des points M, N, m, n, et qui se rencontreront nécessairement en des points projetés sur M', N', M'', N''; or je dis que ces projections tomberont précisément sur les diagonales du rectangle GHIK. En effet, les deux ordonnées pm et PM étant égales, on sait que les abscisses ap et AP sont entre elles comme les deux axes ab et AB, ce qui donne la proportion

$$G\alpha : \alpha M' :: GK : KI;$$

d'où l'on conclut que le point M' est en ligne droite avec G et I. On prouvera semblablement que N'' tombe sur la même diagonale, tandis que N' et M'' sont sur la droite HK : ainsi, l'intersection totale des cylindres proposés se composera des deux ellipses situées dans les plans verticaux GI et HK. Tous ces raisonnements s'appliqueraient identiquement au cas où les génératrices des deux cylindres se rencontreraient obliquement, avec le soin de prendre pour base du premier une section faite par un plan vertical parallèle à aGH, et pour base du second une section verticale parallèle à AGK.

754. REMARQUE. Lorsque deux surfaces quelconques S et S′ se *touchent* en un point, et qu'en outre elles se coupent suivant une courbe à deux branches qui passent par le point considéré, il n'est plus possible de trouver les tangentes de ces branches au point multiple, par la méthode des plans tangents, puisque ceux-ci coïncident. Mais, si l'on substitue aux surfaces S et S′, deux surfaces du second degré Σ et Σ' qui soient *osculatrices* des premières, il est évident que l'intersection de Σ avec Σ' aura les mêmes tangentes que l'intersection de S avec S′. Or, comme dans chaque surface Σ ou Σ', il y a un axe c ou c' qui est arbitraire en longueur (n° **696**), quoique toujours dirigé suivant la normale au point considéré, si l'on prend cet axe égal de part et d'autre, il arrivera que les surfaces Σ et Σ' se couperont suivant deux courbes planes (n° **750**), dont les projections *sur un plan perpendiculaire à la normale* se réduiront à deux droites faciles à construire; alors ces droites seront évidemment les tangentes des deux branches de l'intersection de S avec S′, pour le point multiple en question. Cette méthode ingénieuse a été donnée par M. *Th. Olivier*, dans un Mémoire inséré au 21e cahier du *Journal de l'École Polytechnique;* et l'auteur l'a appliquée au *conoïde de la voûte d'arêtes en tour ronde*, dont nous avons trouvé les tangentes par un autre moyen (n° **646**).

755. DES TANGENTES CONJUGUÉES ou *réciproques*. (*Fig.* 150.) Lorsqu'un cône VMKN est circonscrit à une surface du second degré, *une arête quelconque* VM de ce cône *et la tangente* MT, menée à la courbe de contact MKN par le pied de cette arête, *sont toujours respectivement parallèles à deux diamètres conjugués* de la section faite, dans la surface, par un plan parallèle au plan tangent VMT.

Pour démontrer ce théorème (*), adoptons comme plan de la figure le plan diamétral qui passe par l'arête VM et le diamètre VO, et qui coupera la surface suivant une courbe NXMY, à laquelle VM sera tangente. D'ailleurs, si nous menons le plan diamétral conjugué de VO, la section de ce plan avec la surface sera une courbe EZY, parallèle et semblable (n° **354**) à NKM, et, par suite, les tangentes YT′ et MT se trouveront parallèles; donc, le conjugué de OY sera une droite OZ, parallèle à MT. Cela posé, les trois diamètres OX, OY, OZ étant conjugués entre eux, il en résulte que le plan XOY de la figure actuelle divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à OZ : donc il en sera de même du diamètre RY′, tiré parallèlement à MV; et ce diamètre étant ainsi le conjugué de OZ dans la section RZY′, qui se trouve bien parallèle au plan tangent VMT, l'énoncé du théorème en question est justifié, puisque OY′ et OZ sont respectivement parallèles à l'arête VM et à la tangente MT.

756. Ces deux tangentes de la surface ont été aussi nommées *réciproques*, parce que si l'on plaçait sur MT le sommet d'un nouveau cône circonscrit à l'ellipsoïde,

(*) Il est dû à M. Dupin; mais nous le démontrons ici d'une manière différente, sans passer par l'intermédiaire d'un cylindre.

la courbe de contact de ce cône aurait pour tangente la droite MV. En effet, la section faite dans la surface proposée par un plan parallèle au plan tangent en M serait encore la courbe RZY′, dont le diamètre OZ, parallèle à MT, a pour conjugué OY′; ainsi la tangente à la nouvelle courbe de contact, qui doit, par le théorème précédent, se trouver parallèle à OY′, ne pourrait être que MV, qui remplit déjà cette condition.

757. (*Fig.* 151.) Cette réciprocité et le théorème du n° **755**, sur lequel elle est fondée, s'étendront facilement à un cône circonscrit à une surface quelconque S. Car, soient AMB la courbe de contact de ces deux surfaces, MT une des tangentes et VM l'arête du cône qui aboutit au point de contact; cette arête peut être regardée (n° **182**) comme l'intersection de deux plans tangents infiniment voisins, menés du sommet V à la surface, et dont les points de contact p et q avec S se trouveront sur la courbe AMB. Maintenant, imaginons l'ellipsoïde ou l'hyperboloïde Σ, qui serait *osculateur* de S en M. Dans les environs de ce point, les surfaces S et Σ auront deux plans tangents consécutifs de communs; donc les points p et q appartiendront aussi à la courbe de contact A′MB′ du cône qui, ayant son sommet en V, serait circonscrit à Σ, et, par suite, cette dernière courbe aura encore pour tangente MT. Or, dans la surface Σ, on sait (n° **755**) quelle relation existe entre MV et MT : donc aussi, pour la surface quelconque S, *l'arête du cône circonscrit et la tangente à la courbe de contact sont respectivement parallèles à deux diamètres conjugués de la section faite parallèlement au plan tangent, dans la surface du second degré osculatrice de* S; et ces deux tangentes offrent pareillement la réciprocité énoncée au n° **756**.

758. Ce théorème, qui nous sera utile dans la perspective d'un tore et d'un piédouche, subsiste évidemment pour un cylindre circonscrit à la surface quelconque S, puisqu'on peut supposer le sommet V placé à l'infini sur MV; et il serait facile de l'étendre, par des considérations semblables, à une surface développable quelconque qui se trouverait circonscrite à la surface donnée S.

CHAPITRE II.

MÉTHODE DES PLANS COTÉS (*).

759. Pour représenter graphiquement les points et les lignes, nous avons vu qu'il suffisait d'assigner leurs projections sur deux plans fixes, et que de là on pouvait déduire tout ce qui intéressait sur les distances de ces points, sur la forme de ces lignes ou des surfaces auxquelles elles appartiennent, etc. Mais, dans certains

(*) La plus grande partie de ce chapitre est tirée, en substance, des Leçons rédigées en 1831 pour l'École d'application de Metz, par M. le capitaine du Génie *Noizet*, qui a ainsi coordonné et perfectionné les éléments de la méthode des plans cotés, quoiqu'elle eût été déjà employée par d'autres ingénieurs.