faite par un plan vertical parallèle à $a$GH, et pour base du second une section verticale parallèle à AGK.

**754.** Remarque. Lorsque deux surfaces quelconques S et S′ se *touchent* en un point, et qu'en outre elles se coupent suivant une courbe à deux branches qui passent par le point considéré, il n'est plus possible de trouver les tangentes de ces branches au point multiple, par la méthode des plans tangents, puisque ceux-ci coïncident. Mais, si l'on substitue aux surfaces S et S′, deux surfaces du second degré $\Sigma$ et $\Sigma'$ qui soient *osculatrices* des premières, il est évident que l'intersection de $\Sigma$ avec $\Sigma'$ aura les mêmes tangentes que l'intersection de S avec S′. Or, comme dans chaque surface $\Sigma$ ou $\Sigma'$, il y a un axe $c$ ou $c'$ qui est arbitraire en longueur (n° **696**), quoique toujours dirigé suivant la normale au point considéré, si l'on prend cet axe égal de part et d'autre, il arrivera que les surfaces $\Sigma$ et $\Sigma'$ se couperont suivant deux courbes planes (n° **750**), dont les projections *sur un plan perpendiculaire à la normale* se réduiront à deux droites faciles à construire; alors ces droites seront évidemment les tangentes des deux branches de l'intersection de S avec S′, pour le point multiple en question. Cette méthode ingénieuse a été donnée par M. *Th. Olivier*, dans un Mémoire inséré au 21e cahier du *Journal de l'École Polytechnique;* et l'auteur l'a appliquée au *conoïde de la voûte d'arêtes en tour ronde*, dont nous avons trouvé les tangentes par un autre moyen (n° **646**).

**755.** DES TANGENTES CONJUGUÉES ou *réciproques*. (*Fig.* 150.) Lorsqu'un cône VMKN est circonscrit à une surface du second degré, *une arête quelconque* VM de ce cône *et la tangente* MT, menée à la courbe de contact MKN par le pied de cette arête, *sont toujours respectivement parallèles à deux diamètres conjugués* de la section faite, dans la surface, par un plan parallèle au plan tangent VMT.

Pour démontrer ce théorème (*), adoptons comme plan de la figure le plan diamétral qui passe par l'arête VM et le diamètre VO, et qui coupera la surface suivant une courbe NXMY, à laquelle VM sera tangente. D'ailleurs, si nous menons le plan diamétral conjugué de VO, la section de ce plan avec la surface sera une courbe EZY, parallèle et semblable (n° **354**) à NKM, et, par suite, les tangentes YT′ et MT se trouveront parallèles; donc, le conjugué de OY sera une droite OZ, parallèle à MT. Cela posé, les trois diamètres OX, OY, OZ étant conjugués entre eux, il en résulte que le plan XOY de la figure actuelle divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à OZ : donc il en sera de même du diamètre RY′, tiré parallèlement à MV; et ce diamètre étant ainsi le conjugué de OZ dans la section RZY′, qui se trouve bien parallèle au plan tangent VMT, l'énoncé du théorème en question est justifié, puisque OY′ et OZ sont respectivement parallèles à l'arête VM et à la tangente MT.

**756.** Ces deux tangentes de la surface ont été aussi nommées *réciproques*, parce que si l'on plaçait sur MT le sommet d'un nouveau cône circonscrit à l'ellipsoïde,

(*) Il est dû à M. Dupin; mais nous le démontrons ici d'une manière différente, sans passer par l'intermédiaire d'un cylindre.



la courbe de contact de ce cône aurait pour tangente la droite MV. En effet, la section faite dans la surface proposée par un plan parallèle au plan tangent en M serait encore la courbe RZY′, dont le diamètre OZ, parallèle à MT, a pour conjugué OY′; ainsi la tangente à la nouvelle courbe de contact, qui doit, par le théorème précédent, se trouver parallèle à OY′, ne pourrait être que MV, qui remplit déjà cette condition.

**757.** (*Fig.* 151.) Cette réciprocité et le théorème du n° **755**, sur lequel elle est fondée, s'étendront facilement à un cône circonscrit à une surface quelconque S. Car, soient AMB la courbe de contact de ces deux surfaces, MT une des tangentes et VM l'arête du cône qui aboutit au point de contact; cette arête peut être regardée (n° **182**) comme l'intersection de deux plans tangents infiniment voisins, menés du sommet V à la surface, et dont les points de contact $p$ et $q$ avec S se trouveront sur la courbe AMB. Maintenant, imaginons l'ellipsoïde ou l'hyperboloïde $\Sigma$, qui serait *osculateur* de S en M. Dans les environs de ce point, les surfaces S et $\Sigma$ auront deux plans tangents consécutifs de communs; donc les points $p$ et $q$ appartiendront aussi à la courbe de contact A′MB′ du cône qui, ayant son sommet en V, serait circonscrit à $\Sigma$, et, par suite, cette dernière courbe aura encore pour tangente MT. Or, dans la surface $\Sigma$, on sait (n° **755**) quelle relation existe entre MV et MT : donc aussi, pour la surface quelconque S, *l'arête du cône circonscrit et la tangente à la courbe de contact sont respectivement parallèles à deux diamètres conjugués de la section faite parallèlement au plan tangent, dans la surface du second degré osculatrice de* S; et ces deux tangentes offrent pareillement la réciprocité énoncée au n° **756**.

**758.** Ce théorème, qui nous sera utile dans la perspective d'un tore et d'un piédouche, subsiste évidemment pour un cylindre circonscrit à la surface quelconque S, puisqu'on peut supposer le sommet V placé à l'infini sur MV; et il serait facile de l'étendre, par des considérations semblables, à une surface développable quelconque qui se trouverait circonscrite à la surface donnée S.

## CHAPITRE II.

### MÉTHODE DES PLANS COTÉS (*).

**759.** Pour représenter graphiquement les points et les lignes, nous avons vu qu'il suffisait d'assigner leurs projections sur deux plans fixes, et que de là on pouvait déduire tout ce qui intéressait sur les distances de ces points, sur la forme de ces lignes ou des surfaces auxquelles elles appartiennent, etc. Mais, dans certains

(*) La plus grande partie de ce chapitre est tirée, en substance, des Leçons rédigées en 1831 pour l'École d'application de Metz, par M. le capitaine du Génie *Noizet*, qui a ainsi coordonné et perfectionné les éléments de la méthode des plans cotés, quoiqu'elle eût été déjà employée par d'autres ingénieurs.

cas, comme pour les dessins de Fortification et pour la Topographie, on trouve plus commode de définir les objets *seulement par leur projection horizontale*, à laquelle on ajoute des *cotes* qui indiquent la hauteur des divers points au-dessus d'un plan horizontal fixe, que l'on suppose plus bas que tous les objets en question. Il est évident que cette méthode, où l'on n'emploie qu'un seul plan de projection, suffit néanmoins pour déterminer complétement la position de chaque point, parce que la cote de celui-ci remplace sa projection verticale, et pourrait même servir à retrouver cette projection, si on le désirait. Aussi nous allons voir que, par cette marche, on résout aisément tous les problèmes élémentaires de la Géométrie descriptive, et d'une manière qui se prête mieux aux *traductions numériques* auxquelles on est obligé de recourir dans la Fortification; car ici les données et les résultats d'un problème offrent des dimensions trop considérables pour pouvoir être exprimées sur les dessins autrement que par le moyen d'une *échelle* de réduction. Ajoutons encore que, dans la Fortification, le peu de relief de la plupart des objets au-dessus du sol, comparativement à leurs dimensions horizontales, rendrait incommode l'emploi d'un plan vertical de projection, sur lequel le plus grand nombre des droites considérées seraient presque horizontales, et iraient se rencontrer fort loin.

**760**. Observons, d'ailleurs, que ce mode de description ayant été d'abord employé pour des cotes sous-marines rapportées au niveau de la mer, l'usage a prévalu de compter les ordonnées verticales *de haut en bas*, en les regardant comme de véritables *sondes* abaissées d'un *plan de comparaison* horizontal situé *au-dessus* de tous les objets considérés; tandis que le plan de projection sur lequel on opère est toujours censé horizontal et placé à une distance arbitraire *au-dessous* de ces mêmes objets. Du reste, ces conventions ne rendront pas plus difficile l'évaluation de la différence de niveau de deux points donnés, mais il faudra se rappeler que le point qui est affecté de la cote *la plus forte* est *plus bas* que l'autre.

**761**. (*Pl.* 64, *fig.* 1.) D'après cela, un point de l'espace sera représenté par sa projection et par sa cote, comme celui qui est indiqué ($12^m,5$) dans la *fig.* 1. Cependant, s'il y avait plusieurs points remarquables situés sur la même verticale, il faudrait écrire la cote de chacun d'eux auprès de cette projection commune.

**762**. (*Fig.* 1.) *Une droite est définie par sa projection* AB, *avec les cotes de* DEUX *de ses points*. De là, il serait facile, au moyen d'un trapèze rabattu autour de AB, de conclure graphiquement la longueur d'une portion de cette droite, son inclinaison sur l'horizon, la cote d'un troisième point de cette ligne, donné par sa projection; ou réciproquement, la projection d'un point défini par sa cote. Mais, comme, pour les applications que nous avons en vue ici, il faudrait finir par évaluer ces résultats en nombres, au moyen de l'échelle métrique du dessin, il sera plus exact et plus commode de construire d'abord l'*échelle de pente* de la droite proposée. Soient donc A et B les projections de deux points dont les cotes sont $14^m,7$ et $12^m,5$; on commencera par chercher l'intervalle L qui, sur la projection de la droite,



séparera deux points dont les cotes *différeront d'un mètre*, et on y parviendra évidemment par la proportion suivante :

$$(14^m,7 - 12^m,5) : AB :: 1^m : L = \frac{5}{11} AB;$$

de sorte qu'après avoir évalué AB en parties de l'*échelle horizontale* du dessin, et avoir trouvé ici $AB = 6^m,8$, on en déduira

$$L = 3^m,1 \quad \text{et} \quad \frac{3}{10} L = 0^m,9.$$

Alors, en prenant sur l'échelle horizontale une ouverture de compas égale à $0^m,9$ et en la portant sur AB au-dessous du point ($14^m,7$), on obtiendra celui qui doit avoir la cote $15^m$; puis en portant, à partir de ce dernier point, la longueur L plusieurs fois de suite, on trouvera les points qui répondent aux cotes $14^m$, $13^m$, $12^m$,...; et enfin il restera à subdiviser un de ces intervalles en dix parties égales, pour compléter l'*échelle de pente* de la droite proposée. Cette longueur constante L peut être nommée l'*unité* de l'échelle de pente.

**763**. (*Fig.* 1.) Cela posé, *trouver la cote d'un point situé sur cette droite, et dont* M *est la projection*. Si M tombe entre les divisions $13^m$ et $14^m$ par exemple, on prendra avec le compas la distance *horizontale* du point M au point $13^m$, et en la portant sur la partie de l'échelle de pente qui est subdivisée en décimètres, on verra quel est le nombre de décimètres qu'il faut ajouter à $13^m$, pour obtenir la cote du point projeté en M. Les centimètres pourront s'estimer à vue.

On résoudra aussi aisément cette autre question : *Quelle est la projection d'un point de cette droite, dont la cote serait assignée*, comme $11^m,3$?

**764**. *Trouver la vraie distance de deux points* de cette droite, donnés par leurs projections. On cherchera d'abord leurs cotes, puis, on calculera l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont la hauteur serait *la différence de ces cotes*, et dont la base serait égale à *l'intervalle des deux projections*, estimée en mètres sur l'échelle *horizontale* du dessin. Ainsi, pour les deux points projetés en A et B, la vraie distance sera donnée par la formule

$$\delta = \sqrt{(2,2)^2 + (6,8)^2} = 7^m,1.$$

**765**. (*Fig.* 1.) Quant à *la pente* de la droite, on entend par là la tangente trigonométrique de l'angle que cette ligne fait avec l'horizon; c'est-à-dire la différence de niveau de deux points de cette droite, divisée par la distance de leurs projections. Ainsi, pour la droite citée n° **762**, la pente est exprimée par la fraction

$$\frac{14,7 - 12,5}{AB}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{L} = \frac{1}{3} \text{ environ},$$

en se rappelant que L désigne ici l'intervalle qui sépare les projections de deux points dont les cotes diffèrent d'un mètre, et qu'il faut estimer cette longueur en parties de l'échelle horizontale du dessin. On énonce encore cette règle, en disant que *la pente* d'une droite est *le rapport* de *la hauteur* à *la base*.

**766.** (*Fig.* 1.) Réciproquement, si l'on donne la projection d'une droite et la cote $14^m,7$ d'un de ses points, avec la pente $\frac{1}{3}$ que doit avoir cette ligne, on prendra sur l'échelle horizontale du dessin une longueur égale à 3 mètres, laquelle, étant portée à la suite du point ($14^m,7$), fera connaître le point qui devrait avoir la cote ($13^m,7$). Alors on connaîtra deux points cotés de la droite, et l'on construira son échelle de pente comme au n° **762**.

**767.** (*Fig.* 1.) *Par un point donné* C ($10^m,6$), *mener une droite parallèle à une droite déjà connue*. Par le point C, on tirera une parallèle à la projection AB de la première droite, et ce sera évidemment celle de la seconde. Ensuite, comme ces deux droites doivent avoir *la même pente*, si l'on joint le point ($10^m;6$) de la seconde avec le point affecté de la même cote sur la première, puis si l'on tire des parallèles à cette ligne de jonction par les divisions entières de la première droite, on formera immédiatement l'échelle de pente de la droite demandée, laquelle sera ainsi complétement déterminée.

**768.** (*Fig.* 1.) Lorsque la première droite ne sera donnée que par deux points cotés ($14^m,7$) et ($12^m,5$), on portera l'intervalle AB de ces projections au-dessous du point ($10^m,6$), et l'on obtiendra un second point de la nouvelle droite, lequel aura évidemment pour sa cote ($10^m,6 + 2^m,2$) ou ($12^m,8$). Alors on achèvera l'échelle de pente de la droite demandée, comme au n° **762**.

**769.** Une courbe *isolée* se représente par sa projection horizontale accompagnée des cotes d'un certain nombre de ses points, assez rapprochés pour que l'œil puisse saisir le cours ascendant ou descendant de cette ligne, ou pour que les arcs intermédiaires puissent être regardés comme des droites. Mais, presque toujours, les courbes sont liées à des surfaces que nous apprendrons bientôt à représenter; c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas davantage ici.

**770.** (*Pl.* 64, *fig.* 2.) Un plan, lorsque c'est une grandeur réellement existante, et qu'il est, par conséquent, *limité de toutes parts*, se représente par la projection de son contour dont chaque angle doit avoir sa cote; et l'on y ajoute un certain nombre de *sections de niveau* qui sont des droites parallèles à sa trace horizontale. Ces sections, que l'on choisit équidistantes et éloignées, par exemple de 1 mètre *dans le sens vertical*, doivent être marquées à leurs deux extrémités d'une cote commune; puis, si l'on trace une perpendiculaire à ces horizontales, ce sera évidemment la projection de *la ligne de plus grande pente* du plan proposé, et en cotant les points où elle est rencontrée par les diverses horizontales, elle deviendra ce qu'on appelle l'*échelle de pente* du plan en question, laquelle est ordinairement indiquée par *un trait double*. Ce mode de représentation équivaut à regarder, ainsi qu'on le fait dans la géométrie descriptive, un plan comme engendré par une de ses horizontales qui glisserait, parallèlement à elle-même, sur la ligne de plus grande pente de ce plan.

**771.** (*Fig.* 2 *bis.*) *Lorsqu'un plan est illimité* et n'existe pas réellement, on le représente seulement par une de ses horizontales cotée, avec son échelle de pente graduée : on assigne ainsi la génératrice et la directrice de cette surface, ce qui suffit pour la déterminer complétement. Souvent même on se contente de marquer l'échelle de pente graduée; parce que de là on peut déduire autant d'horizontales cotées que l'on veut, puisqu'elles sont toujours perpendiculaires à la direction de l'échelle.



**772.** Lorsqu'un plan est horizontal, son échelle de pente n'existe plus, mais tous les angles de son contour portent la même cote; ou bien, si ce plan est indéfini, on le désigne par *le plan horizontal à la cote* n. Si le plan donné est vertical, on le représente simplement par sa trace horizontale.

**773.** (*Fig.* 2 *bis.*) *Déterminer le plan qui passe par trois points donnés* ($9^m,4$), ($14^m$) et ($17^m$). On joindra par une droite le premier et le dernier de ces points, et, au moyen d'une proportion analogue à celle employée dans le n° **762**, on cherchera sur cette droite un point qui ait pour cote $14^m$ : alors la droite qui réunira ce dernier point avec le second des points donnés, sera évidemment *une horizontale* du plan demandé; et une parallèle, menée par le point ($17^m$), sera une seconde horizontale de ce plan, dont l'échelle de pente deviendra dès lors très-facile à marquer et à graduer.

La même marche s'appliquerait évidemment au cas où le plan demandé devrait passer par un point et par une droite donnés; et si cette droite était déjà pourvue de son échelle de pente, la solution serait encore plus simple.

**774.** (*Pl.* 64, *fig.* 3.) *Par une droite donnée, conduire un plan dont la pente soit* $\frac{1}{n}$. On doit connaître au moins les cotes de deux points de cette droite, qui sont ici $10^m$ et $12^m,5$ : alors, en regardant le point supérieur ($10^m$) comme le sommet d'un cône droit dont les génératrices auraient l'inclinaison $\frac{1}{n}$ (n° **765**), il suffira évidemment de mener à ce cône un plan tangent qui passe par le second point. Or, si l'on décrit un cercle qui ait pour centre la projection du point ($10^m$), et pour rayon un longueur prise sur l'échelle horizontale du dessin, et égale à $n$ fois la différence $2^m,5$ des cotes des points donnés, ce cercle sera évidemment la trace du cône en question sur le plan horizontal qui passe par le point inférieur ($12^m,5$). Donc, en menant par ce dernier point deux tangentes à ce cercle, on obtiendra les traces horizontales de deux plans qui satisferont au problème; et leurs échelles de pente s'en déduiront aisément, puisque l'on connaîtra leurs directions et deux points cotés de chacune d'elles. Il est d'ailleurs facile de voir que le problème n'admettra qu'une solution ou deviendra impossible, selon que la pente assignée sera égale à celle de la droite donnée, ou moindre que cette dernière.

**775.** Lorsque la droite définie par les deux points cotés se trouvera très-peu inclinée, la méthode précédente conduirait à tracer un cercle très-petit, et par là peu commode à employer. Dans ce cas, on imaginera un plan horizontal inférieur aux deux points, et coté en nombre entier; puis, on décrira sur ce plan deux cercles dont les centres soient les projections des deux points proposés, et dont les rayons soient $n$ fois la hauteur de chacun de ces points au-dessus de ce plan hori-