zontal. On aura ainsi les bases de deux cônes dont la pente sera $\frac{1}{n}$, et il restera à mener une tangente commune à ces deux cercles.

776. Si la droite donnée était *horizontale*, on aurait tout de suite la projection de l'échelle de pente du plan cherché, en tirant une perpendiculaire à la droite proposée; puis, comme l'inclinaison $\frac{1}{n}$ est assignée, il n'y aurait qu'à porter sur cette échelle, à partir de la droite proposée, une longueur de n mètres mesurée sur l'échelle horizontale du dessin, et l'extrémité de cette longueur répondrait à un point de l'échelle de pente, dont *la cote* serait *moindre d'un mètre* que celle du point situé sur la droite donnée. Ayant ainsi deux points cotés de cette échelle de pente, il serait bien facile d'en achever la graduation.

777. (*Fig.* 4.) *Par un point* (10^m,3) *situé sur un plan donné, tracer sur ce plan une droite dont la pente soit* $\frac{1}{n}$. On tracera une horizontale de ce plan dont la cote diffère de celle du point donné, de 4^m par exemple, et soit ainsi 14^m,3; puis, avec un rayon égal à 4 fois la base n de la pente assignée, et du point donné comme centre, on décrira un arc de cercle qui, en coupant l'horizontale choisie, fera connaître le point que l'on doit joindre avec le point donné pour avoir la droite demandée. On sent que ce problème aura en général deux solutions, mais elles se réduiront à une seule, ou deviendront impossibles, si la pente assignée pour la droite égale ou surpasse celle du plan donné.

778. *Étant donnée la projection d'un point situé sur un plan connu, trouver la cote de ce point.* On mènera par cette projection une perpendiculaire sur l'échelle du plan, et la cote du point de rencontre sera celle du point proposé.

Si l'échelle du plan n'était pas construite, et qu'il fût représenté seulement par diverses horizontales, on pourrait appliquer sur le point proposé une règle divisée en millimètres, en la plaçant de manière que deux divisions entières tombassent sur les horizontales voisines; par là, on apprécierait immédiatement la fraction de mètre qu'il faut ajouter à la cote de l'horizontale supérieure pour obtenir la cote du point en question

779. (*Fig.* 5.) *Trouver l'intersection de deux plans* P *et* P', *donnés par leurs échelles graduées.* On tracera, dans chaque plan, deux horizontales qui aient respectivement les mêmes cotes; et la rencontre de ces quatre droites fera connaître deux points cotés de l'intersection demandée, ce qui en déterminera la projection et la pente, ainsi que la *fig.* 5 le montre assez clairement.

780. (*Fig.* 6.) Lorsque les horizontales des deux plans P et P' se rencontreront trop loin, on emploiera des plans sécants *auxiliaires*, par un procédé remarquable auquel il faut souvent recourir dans la théorie actuelle. Traçons deux parallèles a et b dans une direction arbitraire, et regardons-les comme les projections de *deux horizontales* qui auraient pour cotes, l'une 12^m, l'autre 15^m; dès lors ces droites a et b déterminent un certain plan P'', dont il est facile de trouver, par le procédé

du n° **779**, l'intersection c avec le plan P, et l'intersection d avec P'. Or ces deux sections c et d se coupent en un point x, qui appartiendra évidemment à l'intersection des plans primitifs P et P'; puis, on trouvera un second point x', en tirant deux autres parallèles horizontales a' et b' : de sorte que xx' sera la projection de l'intersection demandée, et, pour achever de définir cette droite, il n'y aura plus qu'à trouver les cotes des points x et x', ce qui s'effectuera par l'un des moyens indiqués aux nos **763** et **778**.

Ce procédé deviendrait indispensable, si les plans donnés P et P' avaient leurs horizontales respectivement *parallèles;* mais alors un seul plan auxiliaire suffirait, puisque l'intersection demandée devrait être aussi parallèle aux horizontales primitives.

781. (*Fig.* 7.) *Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan donnés.* On conduira, par la droite proposée, un plan auxiliaire dont les horizontales seront deux parallèles menées arbitrairement par deux points de cette droite; puis, en cherchant l'intersection de ce plan auxiliaire avec le plan donné, cette intersection coupera la droite proposée au point demandé x. Il restera à estimer la cote de ce point, comme nous l'avons indiqué aux nos **763** et **778**.

782. (*Fig.* 8.) On trouvera semblablement le point de rencontre de deux droites données, qui seraient situées dans le même plan vertical, ou qui auraient la même projection. Car, en conduisant par chacune d'elles un plan arbitraire, l'intersection de ces deux plans ira passer par le point cherché, dont la cote s'estimera ensuite comme au n° **763**.

783. Par un moyen analogue, on pourra reconnaître *si deux droites données*, dont les projections sont différentes, *se coupent effectivement;* car, dans ce cas, il faudra que l'intersection des deux plans arbitraires conduits par ces droites aille passer par le point commun aux deux projections données; ou bien, on examinera s'il y a parallélisme entre les droites qui réuniraient les points affectés des mêmes cotes.

784. (*Pl.* 65, *fig.* 9.) *Par un point donné* (10^m,4), *conduire un plan parallèle à un plan donné.* L'échelle de pente du plan cherché sera parallèle à celle dû plan connu, et passera par le point donné. D'ailleurs, puisque l'inclinaison doit être égale, il suffira de joindre le point (10^m,4) avec celui qui a la même cote sur l'échelle donnée, puis de mener à cette ligne de jonction, des parallèles par les autres divisions de l'échelle du plan connu.

785. (*Fig.* 10.) *Par deux droites données, conduire deux plans qui soient parallèles entre eux.* On mènera, par un point de la première droite, une parallèle à la seconde, et, par un point de celle-ci, une parallèle à la première droite. Alors, en conduisant un plan par la première et la troisième droite, puis un autre plan par la deuxième et la quatrième, on obtiendra évidemment les deux plans demandés. On sent bien qu'ils se réduiraient à un seul, si les droites primitives se coupaient; ou qu'ils deviendraient indéterminés, si elles étaient parallèles.

786. *D'un point donné* (8^m,2), *abaisser une perpendiculaire sur un plan connu.* La projection de cette perpendiculaire sera évidemment *parallèle* à la projection de l'échelle du plan, mais leurs inclinaisons seront inverses l'une de l'autre; c'est-à-dire que si la pente du plan donné est $\frac{3}{5}$ par exemple, celle de la droite cherchée sera $\frac{5}{3}$. Alors, en prenant sur l'échelle horizontale du dessin une longueur égale à 3 mètres, et portant cet intervalle sur la perpendiculaire indéfinie, au-dessous du point donné ($8^m,2$), on obtiendra un second point de cette perpendiculaire qui aura pour cote ($8^m,2 + 5^m$) ou ($13^m,2$). Par là, cette perpendiculaire sera complétement déterminée; mais nous laisserons au lecteur le soin d'exécuter ces constructions, ainsi que celles qui sont indiquées dans les numéros suivants.

787. Si d'ailleurs on cherche (n° **781**) le point de rencontre de cette perpendiculaire avec le plan proposé, et que l'on calcule la vraie distance de ce point de section au point donné (n° **764**), on connaîtra *la plus courte distance de ce dernier point au plan proposé.*

788. De même, si l'on demandait *la plus courte distance d'un point à une droite*, on conduirait par ce point un plan perpendiculaire à cette droite, et l'échelle de ce plan se construirait par un procédé inverse de celui du n° **786**. Ensuite on chercherait le point de rencontre de ce plan et de la droite proposée, puis la vraie distance de ce point de section au point donné.

Les questions qui précèdent suffisent, sans doute, pour montrer comment on résoudra tous les problèmes où il n'y aura à combiner que des droites avec des plans; et nous engageons le lecteur à s'exercer encore sur la recherche de *la plus courte distance de deux droites*, et sur l'angle de deux plans, ou de deux droites données.

789. (*Pl.* 65, *fig.* 11.) Les surfaces courbes, surtout lorsqu'elles ne sont pas susceptibles d'une définition rigoureuse, comme cela arrive pour la surface du sol, se représentent par les projections d'un certain nombre de *courbes de niveau*, qui sont les sections que produiraient dans cette surface des plans horizontaux, *équidistants* dans le sens vertical; puis, l'on regarde chaque zone comprise entre deux courbes de niveau consécutives, comme engendrée par *une droite qui, en glissant sur ces deux courbes, demeurerait constamment normale* à l'une d'elles, par exemple à la courbe inférieure. C'est donc *une surface gauche* que l'on substitue ainsi, dans chaque zone, à la surface réelle du terrain, dont la forme rigoureuse ne serait connue qu'autant qu'on aurait assigné la loi géométrique qui lie entre elles les diverses sections de niveau; mais cette approximation est bien suffisante ici.

790. Ordinairement, les courbes horizontales sont assez rapprochées et assez peu différentes dans leur courbure, pour que la génératrice rectiligne de chaque zone puisse être regardée comme sensiblement *normale aux deux courbes* à la fois. Dans cette hypothèse, la surface que l'on substitue à la zone du sol devient développable (n° **180**); car chaque génératrice, pour passer à une position infiniment voisine, se meut sur deux tangentes qui sont évidemment parallèles, et dès lors situées dans un même plan.

791. (*Fig.* 11.) Lorsque la distance des sections de niveau se trouve, dans certaines régions, trop considérable pour que les droites génératrices soient sensiblement normales aux deux courbes voisines, on peut substituer à ces droites des arcs de courbe qui remplissent cette condition; et par là on ne change pas le mode de génération, car cela revient à imaginer d'autres sections de niveau intercalées entre les premières, et assez voisines pour intercepter sur la génératrice curviligne des arcs qui puissent être regardés comme confondus avec leurs cordes.

792. (*Fig.* 11.) *Trouver la cote d'un point donné par sa projection horizontale, et situé sur une surface connue.* Si cette projection tombe entre les courbes de niveau qui ont les cotes 12^m et 13^m, on mènera par ce point une génératrice normale dont les extrémités auront ces mêmes cotes; puis, en appliquant sur cette droite une règle divisée en millimètres, on verra aisément quel est le rapport des deux parties de cette normale, et alors une simple proportion fera trouver la cote du point proposé ($12^m,6$).

793. La question réciproque, où l'on aurait pour but de trouver tous les points de la surface qui ont une cote donnée ($14^m,5$), est également facile à résoudre, en prenant les milieux des diverses normales; et c'est par ce moyen qu'on intercalera de nouvelles courbes de niveau entre les premières, ainsi qu'on le voit dans la *fig.* 11.

794. (*Fig.* 11.) *Construire le plan tangent pour un point donné sur une surface connue.* Lorsque le point donné M sera placé sur une des courbes de niveau, le plan tangent devra passer par la tangente de cette courbe et par la génératrice rectiligne LM qui lui est normale; ainsi, en prolongeant cette normale jusqu'à la courbe supérieure, la partie interceptée ML fera connaître : 1° la direction de *l'échelle de pente* du plan demandé; 2° les cotes de deux points de cette échelle, dont la graduation sera dès lors bien facile à achever. Si l'on admet l'hypothèse habituelle du n° **790**, ce plan touchera la zone tout le long de la génératrice interceptée LM; tandis qu'il ne serait tangent qu'au seul point M, si l'on conservait la génération du n° **789**

795. Quand le point de contact sera donné entre deux courbes de niveau consécutives, on mènera encore de ce point une normale à la courbe inférieure; et si cette droite est sensiblement normale à la courbe supérieure, la partie interceptée fournira la direction et la grandeur d'une des divisions de l'échelle du plan tangent. Dans le cas contraire, on tracera (n° **793**) la section horizontale qui passerait par le point donné; et alors la tangente et la normale de cette courbe détermineront le plan tangent comme au numéro précédent.

796. Si, à partir d'un point L donné sur la surface, on mène une normale LM à la courbe inférieure, puis que, du pied de cette normale, on en conduise une autre MN perpendiculaire à la troisième courbe, et ainsi de suite, l'ensemble de ces diverses normales formera *la ligne de plus grande pente* de la surface, relativement au point de départ L. Cela deviendra évident, si l'on admet que chaque zone du terrain coïncide avec son plan tangent, dans une largeur très-petite autour des droites LM, MN, NP,..., et si l'on se rappelle ce que nous avons dit au n° **770** pour la ligne de plus grande pente d'un plan.

797. Dans les applications de la méthode actuelle, il importe beaucoup de savoir discerner d'avance quelle sera la position du plan tangent par rapport à la surface, dans les environs du point de contact. Or, d'après ce que nous avons dit sur la courbure des surfaces et la note du n° **695**, on peut poser, comme vraie en général, la règle suivante : Lorsque deux courbes tracées sur une surface se coupent à angles droits, et que l'une et l'autre sont *convexes*, c'est-à-dire situées au-dessous du plan tangent relatif au point commun, la surface est elle-même convexe tout autour de ce point. Cette conséquence ne souffrirait d'exception que si les tangentes aux deux courbes rectangulaires se trouvaient comprises dans le même angle obtus PMq ou QMp (*fig.* 134) formé par les deux plans normaux *limites* dont nous avons parlé au n° **694** : mais ce cas exceptionnel ne se présentera jamais ici pour la section de niveau et la ligne de plus grande pente, du moins en conservant l'hypothèse ordinaire d'une zone développable, admise au n° **790** ; car alors cette ligne de plus grande pente sera tangente à l'une des deux *sections principales*. Ainsi, pour s'assurer que la surface du sol est *convexe* autour d'un certain point, il suffira de reconnaître que la courbe de niveau et la ligne de plus grande pente sont *toutes deux convexes* dans le voisinage de ce point : or, la première de ces lignes étant donnée en vraie grandeur sur le plan horizontal, on verra bien si elle remplit cette condition ; et quant à la seconde, voici un caractère facile à saisir.

798. (*Fig.* 11.) En désignant par h la distance verticale de deux sections de niveau consécutives, et par l leur distance LM en projection horizontale, il est clair que l'inclinaison α de la tangente à la ligne de plus grande pente au point M sera donnée par la relation $\operatorname{tang}\alpha = \frac{h}{l}$, du moins pour des valeurs de h assez petites. Si donc on veut que cette courbe soit *convexe*, ou située au-dessous de sa tangente dans le voisinage du point considéré, il faut évidemment que l'angle α aille en augmentant à mesure que l'on descend de L à M, N, P,..., et conséquemment que les distances horizontales l ou LM, MN, NP,..., aillent en diminuant, puisque h est constant. D'après ces remarques, on peut poser les règles suivantes :

1° La surface est *convexe*, c'est-à-dire inférieure au plan tangent tout autour du point de contact, quand toutes les courbes de niveau voisines sont *convexes*, et que leur distance horizontale *diminue* en descendant, ou du moins reste constante ;

2° La surface est *concave*, ou supérieure au plan tangent, lorsque toutes les courbes de niveau sont *concaves*, et que leur distance horizontale *augmente* en descendant, ou du moins reste constante ;

3° Lorsque les courbes de niveau sont *convexes*, et que leur distance horizontale *augmente* en descendant, la surface est convexe dans le sens horizontal, mais elle est concave suivant la ligne de plus grande pente, comme la gorge d'une poulie dont l'axe serait vertical ;

4° Quand les courbes de niveau sont *concaves*, et que leur distance horizontale *diminue* en descendant, la surface est concave dans le sens horizontal, et convexe

dans le sens de la ligne de plus grande pente, comme la gorge d'une poulie dont l'axe serait horizontal.

Mais, dans ces deux derniers cas, et dans les autres variétés de forme que peuvent offrir les courbes de niveau, le plan tangent se trouve en partie au-dessus et en partie au-dessous de la surface ; par conséquent, il coupe le terrain, et l'on ne peut plus s'en servir utilement pour les problèmes du *défilement*. Le même inconvénient a lieu dans le second cas cité plus haut.

799. Il résulte aussi des considérations précédentes que *la pente* du sol, regardé comme coïncidant avec son plan tangent dans une petite étendue autour du point considéré, a pour mesure $\frac{h}{l}$. Ainsi cette pente est d'autant *plus roide* que les courbes de niveau sont plus rapprochées les unes des autres en projection horizontale ; et si deux de ces courbes venaient à se toucher, le terrain serait *à pic* en cet endroit.

800. (*Fig.* 11.) *Sur une surface connue, tracer l'axe d'un chemin dont la pente soit constante.* Si $\frac{1}{6}$ est la pente assignée, on prendra une ouverture de compas égale à 6 unités de l'échelle horizontale du dessin, et en la portant de a en b, entre deux courbes de niveau dont les cotes diffèrent de 1 mètre, il est clair que la droite projetée sur ab sera *la ligne milieu* d'une rampe plane qui aura bien une pente égale à $\frac{1}{6}$. Donc, en continuant de porter le même intervalle de b en c, de c en d, de d en e, avec le soin d'éviter que l'une de ces droites ne coupe deux fois la même courbe de niveau, on aura satisfait à la question proposée.

801. (*Pl.* 65, *fig.* 12.) *Trouver l'intersection d'un plan donné avec une surface connue.* On tracera les horizontales du plan, qui ont les mêmes cotes que les courbes de niveau de la surface proposée ; et leurs rencontres mutuelles feront connaître les points de l'intersection demandée. Mais il faudra prendre garde de confondre les points *d'entrée* avec les points de *sortie*, et quelquefois intercaler de nouvelles courbes de niveau dans les parties où les données ne seront pas assez voisines. Pour obtenir le point *culminant* de la section, c'est-à-dire le point où la tangente sera horizontale, il faudra chercher une génératrice ab qui soit normale à la courbe de niveau inférieure, et *parallèle* à la projection de *l'échelle de pente* du plan sécant ; car, pour le point z de la courbe qui se trouvera sur ab, le plan tangent de la surface sera le même qu'en a (du moins dans l'hypothèse habituelle du n° **790**) ; et comme ce dernier plan aura sa trace horizontale parallèle à celle du plan sécant, leur intersection, qui sera la tangente en z, se trouvera nécessairement horizontale. Quant à la manière de trouver le point z où la génératrice ab rencontre le plan sécant donné, cela s'effectuera par la méthode du n° **781**, ainsi qu'on le voit indiqué sur la *fig.* 12.

802. Lorsque le plan proposé sera vertical, la section se trouvera projetée sur sa trace ; mais alors, comme on connaîtra les cotes des points où il coupe les courbes de niveau, on pourra exécuter *un profil* rabattu, en faisant tourner le plan sécant autour de sa trace horizontale.

803. (*Fig.* 13.) *Trouver l'intersection d'une droite et d'une surface données.* On conduira par cette droite un plan arbitraire, en tirant à volonté des parallèles par tous ses points de division : puis, en cherchant la section que ce plan produira dans la surface, cette courbe ira rencontrer la droite primitive au point demandé.

804. On trouvera l'intersection de deux surfaces connues, en combinant les courbes de niveau qui ont des cotes respectivement égales dans les deux surfaces.

Enfin, s'il s'agissait d'avoir le point de rencontre d'une surface avec une courbe, on imaginerait, par cette dernière, un *cylindre horizontal* dont on chercherait l'intersection avec la surface donnée, opération qui s'exécuterait comme au n° **801** ; alors cette intersection irait couper la courbe donnée, aux points qui sont communs à cette dernière et à la surface proposée.

Nous nous bornons ici à ces indications succinctes, parce que les autres questions que l'on pourrait traiter par ces méthodes n'auraient d'intérêt qu'en les présentant sous une forme qui les rattacherait spécialement à la *Fortification*.

CHAPITRE III.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LES ENGRENAGES.

805. Quand un corps solide, quelle que soit sa forme, tourne autour d'un axe fixe, tous les points de ce corps décrivent, dans un même temps, des arcs de cercle qui correspondent à des angles nécessairement *égaux*, puisque le système est de forme invariable. Donc ces arcs se trouvent proportionnels à leur rayons $r, r', r'', \ldots$, qui sont les distances de ces divers points à l'axe fixe, et conséquemment les vitesses *absolues* $v, v', v'', \ldots$, de tous ces points sont aussi proportionnelles aux rayons $r, r', r'', \ldots$; de sorte que si l'on désigne par ω la *vitesse absolue* commune à tous les points qui sont placés *à une distance* de l'axe *égale à l'unité*, on aura toujours les relations

$$\frac{v}{r} = \frac{v'}{r'} = \frac{v''}{r''} = \ldots = \omega, \quad \text{d'où} \quad v = r\omega, \quad v' = r'\omega, \ldots.$$

La quantité ω est ce qu'on appelle la *vitesse angulaire* ou la *vitesse de rotation* du système, soit qu'elle demeure constante ou qu'elle varie avec le temps; et lorsque cette vitesse ω sera connue, on voit que les vitesses des autres points du corps s'en déduiront immédiatement.

806. Cela posé, un engrenage cylindrique est le système de deux roues dont les axes sont parallèles, et dont l'une ayant reçu un mouvement autour de son axe immobile, communique à l'autre roue une rotation contraire autour de son axe également invariable. Mais cette transmission de mouvement doit être faite sous la condition essentielle que *les vitesses angulaires* des deux roues conserveront toujours entre elles *un rapport constant* ; afin qu'un mouvement uniforme imprimé à la roue *menante* produise aussi un mouvement uniforme dans la roue *menée*, ce qui est en général une condition nécessaire pour le jeu régulier des machines.

807. (*Pl.* 66, *fig.* 1.) Pour remplir la condition énoncée ci-dessus, partageons l'intervalle OO′ des deux axes en deux parties $OA = R$, $O'A = R'$, qui soient en raison inverse des nombres k et k' par lesquels la question aura fixé le rapport que doivent offrir les vitesses angulaires des deux roues; puis, avec ces distances pour rayons, décrivons deux cercles tangents en A, et dont chacun soit lié invariablement avec son axe. Alors, je dis qu'on atteindra le but proposé en faisant tourner ces deux *cercles primitifs* de manière que *les points de leurs circonférences prennent des* VITESSES ABSOLUES *qui soient* ÉGALES dans les deux cercles; ou, en d'autres termes, *de manière que les points* A et a de ces circonférences *décrivent toujours, dans un même temps, des arcs* AA′ et aa' qui soient *égaux en longueur absolue*.

En effet, en appelant V et V′ les vitesses absolues des points A et a, il en résultera pour les roues O et O′ des vitesses angulaires (n° **805**) données par les formules

$$\omega = \frac{V}{R}, \quad \omega' = \frac{V'}{R'};$$

et si $V = V'$ à toutes les époques du mouvement, quoique ces vitesses puissent varier avec le temps, il est évident que l'on aura toujours

$$\omega : \omega' :: \frac{1}{R} : \frac{1}{R'} :: k : k'.$$

Ainsi, en remplissant la condition $AA' = aa'$, le rapport des vitesses angulaires des deux roues demeurera bien constant, et égal à celui que la question avait assigné.

808. (*Fig.* 1.) Pour que le mouvement de rotation imprimé à la roue O soit transmis à la roue O′ d'une manière efficace et capable de vaincre des résistances considérables, on arme ces deux roues de saillies ou *dents*, terminées par des surfaces cylindriques projetées sur des courbes telles que AB et ab. On pourra tracer à volonté le profil ab d'une de ces dents (sauf la restriction du n° **830**) ; mais ensuite la forme AB de la dent conjuguée devra être choisie de manière que, par sa pression continue sur ab, le mouvement satisfasse à la condition essentielle $AA' = aa'$ indiquée ci-dessus.

(*Fig.* 2.) Si donc on conçoit que la roue O′ ait tourné de manière que le rayon $O'a$ soit parvenu en $O'a'$, et le profil ab en $a'b'$, l'autre roue O aura dû tourner d'un angle AOA′ tel, que l'arc $AA' = aa'$; et dans cette position, la courbe inconnue AB, transportée en A′B′, devra aussi toucher le profil $a'b'$ en un certain point m'. Un pareil contact devra se reproduire pour toute autre rotation satisfaisant à l'égalité des arcs parcourus par les points A et a ; mais, comme dans ce genre de mouvement les deux profils AB et ab se déplacent simultanément, il n'est pas facile d'apercevoir la relation géométrique qui doit les lier entre eux : tandis que cela deviendrait fort aisé, si l'un de ces profils demeurait immobile. Nous allons donc tâcher de ramener la question à ce dernier état.

809. A cet effet, et lorsque les deux roues ont déjà pris la position où les dents sont devenues A′B′ et $a'b'$, faisons tourner tout le système autour du point O, sans