conduira par cette droite un plan arbitraire, en tirant à volonté des parallèles par tous ses points de division : puis, en cherchant la section que ce plan produira dans la surface, cette courbe ira rencontrer la droite primitive au point demandé.

804. On trouvera l'intersection de deux surfaces connues, en combinant les courbes de niveau qui ont des cotes respectivement égales dans les deux surfaces.

Enfin, s'il s'agissait d'avoir le point de rencontre d'une surface avec une courbe, on imaginerait, par cette dernière, un *cylindre horizontal* dont on chercherait l'intersection avec la surface donnée, opération qui s'exécuterait comme au n° **801** ; alors cette intersection irait couper la courbe donnée, aux points qui sont communs à cette dernière et à la surface proposée.

Nous nous bornons ici à ces indications succinctes, parce que les autres questions que l'on pourrait traiter par ces méthodes n'auraient d'intérêt qu'en les présentant sous une forme qui les rattacherait spécialement à la *Fortification*.

CHAPITRE III.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LES ENGRENAGES.

805. Quand un corps solide, quelle que soit sa forme, tourne autour d'un axe fixe, tous les points de ce corps décrivent, dans un même temps, des arcs de cercle qui correspondent à des angles nécessairement *égaux*, puisque le système est de forme invariable. Donc ces arcs se trouvent proportionnels à leur rayons r, r', r'',..., qui sont les distances de ces divers points à l'axe fixe, et conséquemment les vitesses *absolues* v, v', v'',..., de tous ces points sont aussi proportionnelles aux rayons r, r', r'',...; de sorte que si l'on désigne par ω la *vitesse absolue* commune à tous les points qui sont placés *à une distance* de l'axe *égale à l'unité*, on aura toujours les relations

$$\frac{v}{r}=\frac{v'}{r'}=\frac{v''}{r''}=\ldots=\omega,\quad \text{d'où}\quad v=r\omega,\quad v'=r'\omega,\ldots.$$

La quantité ω est ce qu'on appelle la *vitesse angulaire* ou la *vitesse de rotation* du système, soit qu'elle demeure constante ou qu'elle varie avec le temps; et lorsque cette vitesse ω sera connue, on voit que les vitesses des autres points du corps s'en déduiront immédiatement.

806. Cela posé, un engrenage cylindrique est le système de deux roues dont les axes sont parallèles, et dont l'une ayant reçu un mouvement autour de son axe immobile, communique à l'autre roue une rotation contraire autour de son axe également invariable. Mais cette transmission de mouvement doit être faite sous la condition essentielle que *les vitesses angulaires* des deux roues conserveront toujours entre elles *un rapport constant*; afin qu'un mouvement uniforme imprimé à la roue *menante* produise aussi un mouvement uniforme dans la roue *menée*, ce qui est en général une condition nécessaire pour le jeu régulier des machines.

807. (*Pl.* 66, *fig.* 1.) Pour remplir la condition énoncée ci-dessus, partageons l'intervalle OO' des deux axes en deux parties $OA = R$, $O'A = R'$, qui soient en raison inverse des nombres k et k' par lesquels la question aura fixé le rapport que doivent offrir les vitesses angulaires des deux roues; puis, avec ces distances pour rayons, décrivons deux cercles tangents en A, et dont chacun soit lié invariablement avec son axe. Alors, je dis qu'on atteindra le but proposé en faisant tourner ces deux *cercles primitifs* de manière que *les points de leurs circonférences prennent des* VITESSES ABSOLUES *qui soient* ÉGALES dans les deux cercles; ou, en d'autres termes, *de manière que les points* A et a de ces circonférences *décrivent toujours, dans un même temps, des arcs* AA' et aa' qui soient *égaux en longueur absolue*.

En effet, en appelant V et V' les vitesses absolues des points A et a, il en résultera pour les roues O et O' des vitesses angulaires (n° **805**) données par les formules

$$\omega=\frac{V}{R},\quad \omega'=\frac{V'}{R'};$$

et si $V = V'$ à toutes les époques du mouvement, quoique ces vitesses puissent varier avec le temps, il est évident que l'on aura toujours

$$\omega:\omega'::\frac{1}{R}:\frac{1}{R'}::k:k'.$$

Ainsi, en remplissant la condition $AA' = aa'$, le rapport des vitesses angulaires des deux roues demeurera bien constant, et égal à celui que la question avait assigné.

808. (*Fig.* 1.) Pour que le mouvement de rotation imprimé à la roue O soit transmis à la roue O' d'une manière efficace et capable de vaincre des résistances considérables, on arme ces deux roues de saillies ou *dents*, terminées par des surfaces cylindriques projetées sur des courbes telles que AB et ab. On pourra tracer à volonté le profil ab d'une de ces dents (sauf la restriction du n° **830**); mais ensuite la forme AB de la dent conjuguée devra être choisie de manière que, par sa pression continue sur ab, le mouvement satisfasse à la condition essentielle $AA' = aa'$ indiquée ci-dessus.

(*Fig.* 2.) Si donc on conçoit que la roue O' ait tourné de manière que le rayon $O'a$ soit parvenu en $O'a'$, et le profil ab en $a'b'$, l'autre roue O aura dû tourner d'un angle AOA' tel, que l'arc $AA' = aa'$; et dans cette position, la courbe inconnue AB, transportée en A'B', devra aussi toucher le profil $a'b'$ en un certain point m'. Un pareil contact devra se reproduire pour toute autre rotation satisfaisant à l'égalité des arcs parcourus par les points A et a; mais, comme dans ce genre de mouvement les deux profils AB et ab se déplacent simultanément, il n'est pas facile d'apercevoir la relation géométrique qui doit les lier entre eux : tandis que cela deviendrait fort aisé, si l'un de ces profils demeurait immobile. Nous allons donc tâcher de ramener la question à ce dernier état.

809. A cet effet, et lorsque les deux roues ont déjà pris la position où les dents sont devenues A'B' et $a'b'$, faisons tourner tout le système autour du point O, sans altérer la situation relative d'aucune de ses parties, et de manière que le rayon OA′ reprenne sa position primitive OAZ, et le profil A′B′ sa première situation AB. Par là, la ligne des centres OO′ aura décrit l'angle $O'OO_2$ correspondant à un arc AA_2, égal à AA′ : le cercle O′ sera devenu le cercle O_2, et le profil $a'b'$ aura pris la position a_2b_2, qui devra évidemment se retrouver tangente au profil primitif AB, comme cela avait lieu pour $a'b'$ et A′B′. Mais, puisque les arcs A_2A et A_2a_2 sont les mêmes que AA′ et Aa', qui ont par hypothèse la même longueur, il s'ensuit que ces arcs A_2A et A_2a_2 sont aussi égaux entre eux; et de là résulte cette conséquence remarquable : *le cercle* O_2, *avec son profil* a_2b_2, *n'est autre chose que ce que deviendrait le cercle* O′ *avec son profil* ab, *si l'on faisait* ROULER *ce dernier cercle, sans glisser, sur la circonférence* O *demeurée entièrement* IMMOBILE, *ainsi que son profil* AB.

Et comme il en serait de même pour tout autre angle de rotation, satisfaisant à la condition $AA' = aa'$, on peut poser ce principe général : Lorsque deux cercles tangents O et O′ tournent autour de leurs centres *immobiles*, de manière que leurs circonférences prennent des *vitesses égales*, leurs positions *relatives*, et celles des courbes qu'ils entraînent avec eux, sont les mêmes que si l'on avait laissé le cercle O entièrement immobile, et qu'on eût fait *rouler* le cercle O′ sur le premier.

810. (*Fig.* 3.) D'après cela, on voit que la propriété caractéristique de la courbe AB peut être énoncée comme il suit : *Le profil* AB *doit être* L'ENVELOPPE *de toutes les positions* a_2b_2, a_3b_3,..., *qu'occupera le profil* ab, *lorsqu'on fera* ROULER *le cercle* O′ *sur le cercle* O, *qui demeure entièrement immobile*. Ainsi, après avoir construit un certain nombre de positions O'_2, O'_3, O'_4,..., du cercle roulant O′, avec les courbes correspondantes a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4,..., il n'y aura plus qu'à tracer une courbe Aee_2e_3... qui soit tangente à toutes ces *enveloppées*. Mais ce procédé fort simple, qui offrirait déjà une approximation suffisante dans beaucoup de cas, acquerra toute la précision désirable, si nous donnons, comme nous allons le faire, un moyen de trouver la position même des points de contact.

811. (*Fig.* 3.) Observons, d'abord, que l'enveloppe de toutes les courbes ab, a_2b_2, a_3b_3,..., n'est autre chose que le lieu des intersections consécutives i, i', i'',..., de toutes ces courbes supposées *infiniment voisines*; car ce lieu aurait évidemment deux points communs avec chacune de ces enveloppées, et conséquemment il serait tangent à chacune d'elles.

Cela posé, si l'on considère le cercle individuel O'_3 avec l'enveloppée correspondante a_3b_3, et qu'on mène à celle-ci une normale A_3e_3 partant du point de contact du cercle mobile, je dis que e_3 sera le point de contact de l'enveloppe AB sur la courbe a_3b_3. En effet, pendant la rotation du cercle O'_3 pour passer à une position infiniment voisine, le point e_3 décrit (n° **474**) un petit arc circulaire $e_3\varepsilon$ qui a pour rayon la distance A_3e_3 : or, puisque cette droite a été choisie normale à la courbe a_3b_3, l'arc $e_3\varepsilon$ sera tout entier sur l'enveloppée a_3b_3; donc le point ε se trouvera commun à l'enveloppée a_3b_3 et à celle qui la suit immédiatement, et dès lors ce point appartiendra à l'enveloppe cherchée AB. Mais cette enveloppe passerait aussi par un point analogue ε' situé à gauche de e_3, et qui serait l'intersection de la courbe

a_3b_3 avec l'enveloppée qui la précède immédiatement; donc l'élément $\varepsilon'e_3\varepsilon$ se trouve commun à l'enveloppée a_3b_3 et à l'enveloppe générale AB : par conséquent, le contact de ces deux lignes est bien en e_3, et leur *normale commune* est A_3e_3.

812. D'après cela, quand l'enveloppée ab sera définie géométriquement, on saura mener à ses diverses positions des normales partant des points A_2, A_3,..., lesquelles feront connaître autant de points e_2, e_3,..., de l'enveloppe générale. Si l'enveloppée ab n'est donnée que graphiquement, après l'avoir transportée dans la position a_3b_3 par exemple, on cherchera une ouverture de compas telle, qu'en décrivant du centre A_3 un arc de cercle, il touche simplement la courbe a_3b_3; une petite portion de cet arc appartient sensiblement à l'enveloppe, et en raccordant tous les arcs semblables par un trait continu, on obtiendra l'enveloppe cherchée avec une exactitude suffisante pour la pratique. Néanmoins, ce tracé offrirait encore plus de précision, si on l'effectuait avec les rayons des *cercles osculateurs* de l'enveloppe; c'est pourquoi nous allons donner le moyen de trouver ces derniers.

813. (*Pl.* 66, *fig.* 4.) *Centres de courbure de l'enveloppe*. Soit O′ une position quelconque du cercle mobile qui touche le cercle fixe O au point α; soient ab l'enveloppée correspondante à cette situation, AmB l'enveloppe générale, C′ et C les centres de courbure de ces lignes pour le point de contact m, centres qui doivent être sur la normale commune αm, et dont le premier est censé connu par la définition de la courbe amb. Si l'on prend sur les cercles primitifs deux arcs $\alpha\alpha_1$ et $\alpha\alpha'$ qui soient égaux en grandeur absolue et infiniment petits, la droite $C\alpha_1m_1$ sera une normale de l'enveloppe, et $C'm'\alpha'$ une normale de l'enveloppée; car le centre de courbure C ou C′ doit être l'intersection de la normale αm avec une normale infiniment voisine. Or, quand la rotation du cercle O′ aura amené le point α' en contact avec a_1, les deux normales $C\alpha_1$ et $C'\alpha'$ se trouveront nécessairement en ligne droite, ainsi que les deux rayons $O\alpha_1$ et $O'\alpha'$; d'où l'on conclut que les angles $O\alpha_1C$ et $O'\alpha'C'$ doivent être égaux actuellement, puisqu'ils ne changeront pas de grandeur pendant le roulement du cercle O′. Cela posé, en désignant par φ l'angle $O\alpha C = O'\alpha C'$, on a évidemment

$$O\alpha_1C = \varphi + O - C, \quad O'\alpha'C' = \varphi + C' - O';$$

d'où il résulte, en égalant ces deux expressions,

$$(a) \qquad O + O' = C + C'.$$

Pour estimer ces derniers angles, il faut employer les arcs décrits de leurs sommets avec un rayon égal à l'unité, et comparer ces arcs avec $\alpha\alpha_1$ et $\alpha\alpha'$ que l'on doit regarder comme une seule ligne droite perpendiculaire à $O\alpha O'$. Dès lors, en posant

$$O\alpha = R, \quad Cm = \rho, \quad O'\alpha = R', \quad C'm = \rho', \quad \alpha m = p, \quad \alpha\alpha_1 = \alpha\alpha' = ds,$$

et en décrivant avec le rayon $C\alpha$ ou $C'\alpha$ un arc de cercle qui aura évidemment pour longueur $ds.\cos\varphi$, on trouvera aisément

$$\text{angle } O = \frac{ds}{R}, \quad O' = \frac{ds}{R'}, \quad C = \frac{ds.\cos\varphi}{\rho - p}, \quad C' = \frac{ds.\cos\varphi}{\rho' + p};$$

puis, en substituant ces valeurs dans l'égalité précédente (a), il viendra

$$\text{(A)} \qquad \left(\frac{1}{\rho - p} + \frac{1}{\rho' + p}\right)\cos\varphi = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}:$$

formule très-simple, qui fera connaître le rayon de courbure ρ de l'enveloppe, et par suite son centre de courbure C, quand on connaîtra le rayon ρ' de l'enveloppée, et les quantités p et φ qui seront déterminées pour chaque position du cercle mobile O′. Mais nous allons donner de cette formule une traduction graphique qui dispensera de tout calcul.

814. On prévoit aisément, sans tracer une nouvelle figure, qu'on devra changer le signe de ρ' dans cette formule, quand le centre C′ tombera du même côté que C par rapport au point m : il en faudra faire autant pour R′, si le centre O′ est placé du même côté que O relativement au point de contact α des deux cercles. Ainsi, dans le cas de la *fig.* 5, l'équation (A) prendra la forme

$$\text{(B)} \qquad \left(\frac{1}{\rho - p} - \frac{1}{\rho' - p}\right)\cos\varphi = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'},$$

qui est bien symétrique dans toutes ses parties. Sous ce point de vue, il eût été plus rationnel d'établir la démonstration sur la *fig.* 5, où les centres sont placés d'un même côté de la tangente; mais comme ce dernier cas se présente beaucoup plus rarement dans les engrenages, nous avons voulu fixer l'attention du lecteur sur les données les plus habituelles.

Les formules (A) et (B) et celles du nº **817** sont dues à M. *Savary*, qui les avait données dans ses Leçons de machines à l'École Polytechnique, ainsi que la construction graphique fort élégante que nous allons exposer.

815. (*Fig.* 6.) Joignons par des droites les centres O et C, O′ et C′; puis, en prolongeant ces droites, cherchons les points D et D′ où elles iront couper la perpendiculaire αD élevée sur la normale commune CαC′ : il arrivera que ces deux points D et D′ seront confondus. En effet, si des centres O et O′ on abaisse des perpendiculaires sur la normale CαC′, on formera des triangles qui seront semblables avec CαD et C′αD′, et desquels on tirera aisément

$$\alpha D = \frac{(\rho - p)R\sin\varphi}{R\cos\varphi - (\rho - p)}, \qquad \alpha D' = \frac{(\rho' + p)R'\sin\varphi}{(\rho' + p) - R'\cos\varphi}.$$

Or la formule (A) donne, en transposant le deuxième et le troisième terme,

$$\frac{R\cos\varphi - (\rho - p)}{(\rho - p)R} = \frac{(\rho' + p) - R'\cos\varphi}{(\rho' + p)R'};$$

ce qui prouve que les valeurs précédentes de αD et αD′ sont bien égales.

816. Ainsi, quand on connaîtra le centre de courbure C′ pour le point m de l'enveloppée *amb*, on tirera la droite C′O′ que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre en un point D la perpendiculaire αD élevée sur la normale αmC′; puis, en joignant ce point D avec O, la droite OD ira couper la normale prolongée C′α au point C, qui sera le centre de courbure de l'enveloppe AmB pour le point m.

Lorsque l'enveloppée *amb*, au lieu d'être définie par ses propriétés géométriques, ne sera donnée que graphiquement, on tracera plusieurs cercles tangents en m à cette courbe, et en choisissant celui d'entre eux qui approchera davantage de se confondre avec *ab* dans les environs de m, son centre pourra être pris pour le point C′.

Dans tous les cas, si, avec les rayons tels que Cm, on décrit de petits arcs de cercle, et qu'on les raccorde par un trait continu, on obtiendra le tracé de l'enveloppe AmB, de la manière graphique la plus exacte.

817. (*Fig.* 4.) Avant d'appliquer ces résultats à divers exemples, nous placerons ici une remarque importante pour la théorie des engrenages; c'est que, pendant la rotation du cercle O′ sur le cercle fixe O, la courbe *amb* ne roule pas simplement sur AmB, mais elle *glisse* en même temps sur cette dernière (nº **469**), d'où il résulte entre les dents des deux roues un *frottement* qui consomme une partie de la force motrice. En effet, lorsqu'à une époque quelconque les cercles O et O′ se touchent en α, le contact m de l'enveloppe avec l'enveloppée est donné par la normale CαmC′, menée de ce point α; donc, quand un déplacement infiniment petit aura fait toucher les cercles par les points α' et α_1, les normales correspondantes seront les droites C′α' et Cα_1, qui vont déterminer les points m' et m_1, par lesquels l'enveloppée et l'enveloppe se toucheront à cette seconde époque du mouvement. Or, si les arcs mm' et mm_1 ne sont pas égaux et dirigés dans le même sens, il est clair qu'il y aura glissement de l'une des courbes sur l'autre : calculons donc ces arcs.

L'arc mm_1 fait partie du cercle osculateur de AmB, et il est semblable à l'arc qui serait décrit avec le rayon Cα, et que nous avons déjà dit (nº **813**) être égal à $ds \,.\, \cos\varphi$. Ainsi on trouvera

$$mm_1 = \frac{\rho\cos\varphi \,.\, ds}{\rho - p}, \qquad mm' = \frac{\rho'\cos\varphi \,.\, ds}{\rho' + p};$$

d'où

$$mm_1 - mm' = \left(\frac{\rho}{\rho - p} - \frac{\rho'}{\rho' + p}\right)\cos\varphi \,.\, ds = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)p\,ds,$$

en réduisant d'après la formule (A). D'ailleurs, si l'on considère un déplacement de grandeur finie, représenté par $s'' - s'$ sur le cercle fixe, la différence des arcs parcourus sur l'enveloppe et l'enveloppée par leur point de contact sera donnée par l'intégrale définie

$$\delta = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\int_{s'}^{s''} p\,ds;$$

donc, en excluant le cas inusité où la portion de normale $\alpha m = p$ changerait de signe dans l'intervalle de s' à s'', il est certain que cette intégrale, composée d'éléments *tous positifs*, ne sera jamais nulle; et, par suite, il y aura toujours un glissement entre les courbes *amb* et AmB.

818. Nous ne nous arrêterons pas au cas très-particulier où p serait supposé constamment nul; car cela exigerait que l'enveloppée et l'enveloppe fussent confondues avec les circonférences O′ et O. Si l'un des deux centres C, C′ était situé entre α et m, on doit apercevoir, sur la *fig.* 4, que les points m_1 et m' seraient