MEF décrit du centre O. Ainsi AF, A_2F_2,..., seront les seules portions des flancs sur lesquelles s'exercera la poussée des dents; et tandis que le contact x s'avancera de a_2 vers z_2 sur la petite roue, sur la grande il marchera en sens contraire de A_2 vers F_2 : de sorte que, le chemin total parcouru par ce contact étant plus grand que dans les autres cas, le frottement augmentera considérablement.

Mais il y a encore un autre inconvénient plus grave, résultant de l'entaille qu'il faut pratiquer dans la petite roue pour permettre au flanc AF de tourner librement. Car, pendant la révolution des deux cercles O et O' autour de leurs centres immobiles, la courbe parcourue par le point F sur le petit cercle mobile est la même (n° **809**) que celle qu'il décrirait sur le plan fixe de ce cercle, si l'on faisait rouler la circonférence $\alpha\beta$ sur $\alpha'\beta'$; donc, cette courbe est une épicycloïde à nœud $\theta\lambda F\mu z$ qui viendrait raccorder en z le profil az, comme nous l'avons prouvé dans un cas semblable au n° **841**. Par conséquent, il faudra éviter la roue O' suivant le contour $F\lambda\theta$, lequel enlèvera une petite portion du profil az; d'où il résultera que la dent azb ne commencera à être en prise qu'un peu après la ligne des centres. Mais ce qui est bien plus grave, c'est que la base de la dent se trouvera tellement affaiblie par cette entaille, qu'elle n'offrira plus de résistance suffisante; et, conséquemment, le système d'engrenage représenté dans la *fig.* 21 doit être proscrit absolument dans la pratique.

856. *L'engrenage intérieur ne peut pas être* RÉCIPROQUE; c'est-à-dire qu'il est impossible de donner à chaque roue *des dents* et *des flancs* à la fois, afin que chacune de ces roues puisse être *menante* à son tour. En effet, si l'on superpose les *fig.* 20 et 21 de manière à faire coïncider les deux rayons désignés par O'a, on verra bien que le profil AZ serait recouvert par le flanc AF, et qu'il faudrait détruire ce dernier pour pouvoir exécuter l'autre : de même, dans la roue O', le flanc af ne peut coexister avec l'entaille $a\lambda$F.

857. (*Pl.* 69, *fig.* 22.) ENGRENAGE A LANTERNE. On désigne sous ce dernier nom une espèce de tambour composé de deux *tourteaux* ou plateaux circulaires, égaux, parallèles, et réunis par des cylindres droits, nommés *fuseaux*, dont les bases sont les cercles c, c', c'' : les centres de ces petits cercles sont situés tous sur une circonférence $\alpha'\beta'$ qui forme le *cercle primitif* de cette espèce de roue, et la *fig.* 22 représente une *coupe* faite entre les deux plateaux par un plan qui leur est parallèle; c'est pourquoi les cercles c, c', c'',..., sont couverts de hachures. Cette lanterne est mise en mouvement par une roue O dont le *cercle primitif* est $\alpha\beta$; les dents de celle-ci sont ordinairement taillées à part et ensuite implantées dans le corps de la roue : alors on les nomme des *alluchons*, lesquels s'exécutent en bois très-dur, tandis que les fuseaux, qui s'usent plus vite par le frottement, sont quelquefois en fonte. Ce genre d'engrenage ne s'emploie que pour de fortes machines où l'on n'a pas besoin d'une grande précision dans les mouvements; car il n'offre pas autant de douceur et de régularité que l'engrenage à flancs.

Après avoir choisi (n° **836**) deux nombres entiers n, n', qui soient entre eux comme les rayons des circonférences $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, on divisera la première en n parties

égales AA', A'A'',..., la seconde en n' parties égales aa', $a'a''$,...; d'où il résultera aussi AA' $=$ aa' : on marquera les bases des dents AB, A'B',..., égales au plus à la moitié d'une division AA'; puis, en prenant un arc ac plus petit que le quart de la division aa', on emploiera la corde de cet arc pour décrire tous les cercles c, c', c'',..., qui seront les bases des fuseaux. Cela fait, comme le profil AZ doit être l'enveloppe (n° **810**) de l'espace qui serait parcouru par le cercle c dans l'hypothèse où la circonférence $\alpha'\beta'$ roulerait sur $\alpha\beta$ immobile, on observera d'abord que le point c décrirait alors une épicycloïde cl facile à construire (n° **471**); si donc, de divers points de cette épicycloïde et avec un rayon constamment égal à la corde ca, on décrit plusieurs arcs de cercle, il suffira de tracer une courbe AZλ qui leur soit tangente, pour obtenir le profil demandé par un moyen plus expéditif que la construction par points indiquée au n° **823**.

858. Cette branche AZλ de l'enveloppe du petit cercle c se prolongerait dans l'intérieur de la circonférence $\alpha\beta$ jusqu'à un point de rebroussement indiqué par ε', dans la *fig.* 10 de la *Pl.* 67; et comme à l'époque où l'enveloppée toucherait l'enveloppe en ce point ε', l'axe c du fuseau aurait déjà dépassé la ligne des centres OO', rien ne s'opposerait à ce que l'on gardât ce prolongement de AZλ : mais, pour plus de facilité dans la pratique, on termine ce profil au point δ' qui répond à A sur la *fig.* 22, et pour lequel le contact arrive quand ce point A est parvenu sur la droite OO' (n° **825**). Ainsi, dans l'engrenage à lanterne, les dents ne seront jamais en prise avant la ligne des centres.

859. Quant à l'entaille nécessaire pour que les fuseaux se meuvent librement, on pourrait lui donner pour contour le demi-cercle décrit sur la corde de l'arc AB' comme diamètre; mais on se contente ordinairement de tracer la portion de rayon AG un peu plus grande que la corde ac, et de décrire du point O l'arc de cercle GH' terminé aussi au rayon B'H'. Il est vrai que la droite AG n'est pas rigoureusement tangente au profil AZ, puisque la normale commune à cette courbe et à l'épicycloïde cl, serait la corde ac (n° **823**); mais l'arête saillante qui en résultera en A sera très-obtuse, et d'ailleurs on pourra l'adoucir, sauf à ce que la dent ne commence à se trouver en prise qu'un peu plus tard.

860. Il est bon d'échanfriner les dents, mais sans cesser de remplir la condition du n° **844**, afin que le mouvement se continue sans *à-coups*. Pour cela, on tirera la droite Ac', qui, étant normale (n° **823**) à l'enveloppée $c'a'b'$ et à l'enveloppe A'Z', déterminera leur point de contact x; et alors il suffira de prendre un rayon un peu plus grand que Ox pour décrire la circonférence à laquelle commencera l'échanfrinement. Si cette normale Ac' fournissait un point x qui fût au-dessus de la section Z' des deux profils symétriques, les fuseaux seraient trop écartés pour remplir la condition du n° **844**; et dans ce cas, il faudrait augmenter leur nombre n' en faisant aussi varier le nombre n des dents de la roue, de manière que le rapport des nombres n et n' restât toujours le même que celui des rayons R et R' des cercles primitifs $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$.

861. (*Fig.* 23.) CRÉMAILLÈRE A FUSEAUX. Lorsque le rayon R' devient infini, le cercle primitif $\alpha'\beta'$ se réduit à une droite, et la lanterne devient une crémaillère XY. Dans ce cas, la courbe *cl* décrite par la droite $\alpha'\beta'$ roulant sur $\alpha\beta$, étant une développante de cercle, la courbe équidistante AZ sera aussi une développante de $\alpha\beta$, engendrée par le point *a*, de sorte qu'on peut tracer immédiatement cette dernière, sans recourir à *cl*. L'entaille AGH'B' s'exécutera comme ci-dessus; et ici la normale A*c'* coïncidant toujours avec $\alpha'\beta'$, les points de contact x de tous les profils des dents se trouveront constamment sur la ligne $\alpha'\beta'$: donc, pour échanfriner les dents, il suffira de tracer une circonférence avec un rayon un peu plus grand que Ox.

862. (*Fig.* 22.) CRÉMAILLÈRE *avec une* LANTERNE. Si, dans la *fig.* 22, on supposait au contraire le rayon R infini, la roue O deviendrait une crémaillère armée de dents, qui conduiraient la lanterne O'. Dans ce cas, la courbe *cl* serait une *cycloïde* ordinaire décrite par le point *c* du cercle $\alpha'\beta'$ qui roulerait sur la ligne $\alpha\beta$ devenue droite; et le profil AZ devant être une courbe équidistante de cette cycloïde, on le construirait par des arcs de cercle, comme au n° **857**.

863. (*Pl.* 70, *fig.* 24.) ENGRENAGE A DÉVELOPPANTE. Après avoir déterminé, comme au n° **836**, les divisions égales AA', *aa'*, ainsi que les bases des dents AB, *ab*, sur les cercles primitifs $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, dont les rayons sont représentés par R, R', on tracera par le point A une droite TAT' faisant un angle arbitraire avec la ligne OAO'; et des centres O, O', on décrira deux nouveaux cercles CD, C'D', tangents à cette droite TAT' : les rayons de ces cercles *auxiliaires* se trouveront évidemment proportionnels à R et R'. Cela posé, en faisant rouler la droite TAT' sur la circonférence CD, le point A décrira une courbe FAZ développante de ce cercle; et la même droite roulant ensuite sur C'D', le point *a* décrira aussi une développante *faz* de cette dernière circonférence. Or on a vu (n° **829**) que ces deux courbes FAZ et *faz* étaient respectivement enveloppe et enveloppée; donc (n° **810**) ce sont là les profils conjugués qu'il faut adopter pour les dents, afin qu'il passe par la ligne des centres, dans le même temps, des arc égaux AA' et *aa'* mesurés sur les cercles primitifs.

864. Pour échanfriner les dents, en satisfaisant à la condition du n° **844**, on observera qu'ici le point x où la droite AT' rencontre la développante $a'z'$, est précisément le pied de la normale abaissée du point A sur cette courbe; donc il faudra prendre le rayon du cercle d'échanfrinement au moins égal à Ox. De même, pour les dents de la roue O', le rayon analogue devra égaler ou surpasser un peu la distance O'x'. Quant à l'entaille nécessaire pour donner passage aux dents, après avoir continué la développante ZAF jusqu'à son origine F sur le cercle auxiliaire, on prolongera cette courbe (s'il le faut) suivant un rayon FGO, jusqu'à une profondeur telle, que OG soit un peu moindre que la différence entre O'O et O'*z*; semblablement, pour le creux de la roue O', le rayon O'*g* du fond de l'entaille devra être un peu moindre que la différence entre OO' et OZ. On doit observer qu'ici les dents seront en prise tant avant qu'après la ligne des centres; à moins qu'on ne réduisît les dents de la roue *menée* O' à ne pas dépasser le cercle primitif, suivant la forme *gabh* : mais alors l'engrenage ne serait plus *réciproque*.

865. Quoique nous ayons laissé arbitraire l'angle TAO = φ formé par la tangente aux cercles auxiliaires avec la ligne des centres, il est convenable que cet angle soit au moins égal aux trois quarts d'un angle droit, afin que les entailles à pratiquer dans les deux roues n'aient pas trop de profondeur. En outre, nous ferons observer que ce système d'engrenage est souvent préféré par les constructeurs modernes, à cause des deux avantages suivants :

1° La largeur des dents va toujours en augmentant jusqu'à l'extrémité inférieure EF, ce qui les rend susceptibles d'une plus grande résistance; tandis que dans la *fig.* 14, les flancs convergent vers le centre, et la base des dents se trouve quelquefois bien affaiblie.

2° Quand un engrenage à développante est exécuté, on peut diminuer ou augmenter d'une petite quantité la distance OO' primitivement adoptée pour l'écartement des axes, sans que le système cesse de fonctionner aussi régulièrement; et cela est précieux dans la pratique, où il est souvent très-difficile de placer les axes rigoureusement à la même distance qu'on a supposée dans l'épure. Pour justifier cette latitude, imaginons que, dans la *fig.* 24, on ait abaissé le centre O avec les cercles $\alpha\beta$ et CD, et qu'ils aient pris les positions O_2, $\alpha_2\beta_2$, C_2D_2 (le lecteur les tracera aisément); alors, si l'on mène une tangente commune aux deux circonférences C_2D_2 et C'D', cette droite coupera la ligne des centres en un point A_2 qui divisera la distance O_2O' en deux parties dont le rapport sera encore le même que celui des rayons des circonférences C_2D_2 et C'D'. D'ailleurs cette nouvelle tangente, en roulant tour à tour sur ces deux circonférences, décrira par le point A_2 les mêmes développantes AZ et *az* qui formaient déjà les profils des dents de l'engrenage primitif; seulement ces développantes se toucheront par d'autres points correspondants que dans la première position de l'engrenage. Donc le nouveau système fonctionnera comme l'ancien, et en produisant des vitesses angulaires qui auront le même rapport que dans le premier cas.

866. CRÉMAILLÈRE *à dents obliques*. Lorsque, dans la figure précédente, on suppose que le cercle primitif $\alpha'\beta'$ acquiert un rayon infini, ce cercle se change en une droite, et la roue O' en une crémaillère XY à dents obliques, dont les profils *gaz*, *g'a'z'*,..., sont des droites perpendiculaires à TT'; car le cercle auxiliaire C'D' ayant pour rayon la perpendiculaire abaissée du centre O' sur TT', vient se confondre avec cette dernière droite; et comme le point de contact s'éloigne en même temps à l'infini, si l'on veut faire rouler la droite TT' sur cette circonférence dégénérée en ligne droite, chaque point *a* décrira une perpendiculaire *gaz* à la ligne TT'. Les contacts des dents conjuguées seront encore ici placés tous sur la droite TT', en a, x, x'; mais la poussée s'exerçant suivant une normale à *gaz*, c'est-à-dire suivant TT', qui est *oblique* à la direction XY du mouvement que doit prendre la crémaillère, il en résultera un frottement considérable dans les *coulisses* qui maintiennent cette pièce : c'est pourquoi le système de la *fig.* 25 est moins avantageux que celui de la crémaillère droite (*fig.* 18). Au surplus, cette dernière n'est qu'un cas particulier de la *fig.* 25 : celui où la droite arbitraire TAT' serait menée à angle droit sur AO.

867. (*Fig.* 26.) *L'engrenage à développante peut être* INTÉRIEUR; c'est lorsque les deux cercles primitifs $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ sont embrassés l'un par l'autre. Alors, après avoir mené sous un angle arbitraire la droite TAT', et avoir tracé les deux cercles intérieurs CD, C'D', tangents à cette droite et concentriques avec O et O', il faudra encore faire rouler la droite TAT' successivement sur les circonférences CD, C'D', pour engendrer les profils GAZ et *gaz*, qui seront toujours des développantes de cercle. Mais ici les deux points de contact de cette tangente commune TAT' étant d'un même côté par rapport au point A, les développantes tourneront leur concavité dans le même sens; et il en résultera un frottement beaucoup plus considérable, par suite des petites imperfections inévitables dans l'exécution des profils matériels. Aussi, le système actuel, et en général tous les engrenages intérieurs, sont rarement employés dans la pratique.

Nous ajouterons seulement qu'après avoir prolongé la développante *zaf* jusqu'à son origine *f* sur le cercle C'D', on devra limiter l'autre développante ZA au point *correspondant* G; pour trouver celui-ci, il faudra (n° **834**) ramener le point *f* en *f'* sur la tangente TAT' au moyen d'un arc décrit du point O', puis transporter le point *f'* en G par un arc de cercle décrit du point O. Enfin, on prolongera le profil *zaf* suivant un rayon *fg*O', d'une quantité suffisante pour que l'entaille permette à la dent de la roue O de se mouvoir librement.

868. (*Pl.* 70, *fig.* 27.) CAMES ET PILONS. Soit ABZ l'axe d'une tige verticale qui doit alternativement monter de la quantité AB et redescendre ensuite librement, abandonnée à son propre poids. Pour produire ce mouvement rectiligne analogue à celui de la crémaillère du n° **851**, on emploie une roue dont l'axe horizontal est projeté en O, et dont le cercle primitif $\alpha\beta$ est tangent à la verticale AZ; et l'on arme cette roue de *cames* ou dents AX, A_2X_2, A_3X_3, assez éloignées les unes des autres pour laisser au *pilon* le temps de retomber de B en A avant d'être saisi par la dent suivante. Le profil antérieur de ces cames doit être une développante AXY du cercle $\alpha\beta$; car cette courbe aura la propriété (n° **851**) de toucher constamment le *mentonnet* horizontal M du pilon, dans un point qui demeurera sur la droite AZ toujours normale à la développante AXY, quelque position que prenne cette courbe pendant la rotation autour du point O. L'étendue précise AX qu'il faudra donner à ce profil pour qu'il conduise le mentonnet depuis A jusqu'en B, s'obtiendra (n° **834**) en décrivant avec le rayon OB un arc de cercle qui viendra couper la développante AY au point demandé X. On pourrait terminer la came par le rayon AO; mais, pour éviter de faux contacts hors de la verticale AZ, ce qui ferait déverser la tige et produirait des frottements nuisibles, on échanfrine la came suivant une petite courbe AD arbitraire, laquelle doit raccorder le rayon AO déjà tangent à AX.

869. Quant au *mentonnet* sur lequel la came exerce sa poussée dans la direction verticale AZ, c'est une pièce horizontale et rectangulaire M' qui, dans les anciennes machines, se fixait en avant de la tige du pilon, comme on le voit *fig.* 28; et la saillie EB devait égaler la différence entre les rayons OA et OX de la *fig.* 27 : mais comme alors la poussée de la came passait fort loin du centre de gra-

vité du pilon, il en résultait un *couple* de forces qui tendait à déverser la tige et produisait un frottement considérable sur les *jumelles* G et *g* entre lesquelles se meut cette pièce. Pour éviter cet inconvénient grave, surtout quand le poids du pilon est considérable, on emploie ordinairement la disposition proposée par *Montgolfier*, et qui est représentée dans la *fig.* 29. Ici la tige ou le *manche* du pilon est formé de deux parties TM et T_2N, réunies par des *jumelles* latérales J et *j*; de sorte que l'intervalle de M à N offre un vide dans lequel la dent AX de la came peut pénétrer, et en agissant sur la face horizontale M qui fait l'office de mentonnet, cette came soulève bien le manche dans la direction de son axe ABZ, pour l'amener de A en B. Arrivé dans cette dernière situation, le pilon ne retombe pas encore, parce qu'il reste à la came à parcourir la demi-épaisseur du mentonnet; mais ce petit temps perdu deviendra presque insensible, en échanfrinant la dent *ax* suivant la courbe indiquée par des points ronds, ce qu'il faut toujours faire pour ne pas laisser subsister des parties aiguës ou des arêtes vives qui entameraient les surfaces et pourraient produire des arcs-boutements.

870. Une autre combinaison, indiquée *fig.* 30, est employée dans les mines où les pilons doivent avoir un poids considérable. La tige T_3 est d'une seule pièce, mais on la garnit de deux mentonnets latéraux *m'*, *m''*, sur lesquels agissent les deux branches x', x'' (*fig.* 31) de la came *ax* qui, alors, est fourchue. Nous supposons ici que les trois cames projetées verticalement sur ax, a_2x_2, a_3x_3, sont fourchues et servent à faire mouvoir le manche T_3, tandis que les cames à dent unique AX, A_2X_2, A_3X_3, agissent sur le manche TMT_2; car on adapte ainsi sur le même arbre autant de rangs de cames qu'il y a de pilons à faire mouvoir, avec le soin de faire correspondre les cames de diverses séries à des rayons différents OX et Ox, afin que les tourillons ne supportent pas en même temps le poids de tous les pilons. Les trois dents de chaque série sont en fonte, et coulées d'un seul jet avec l'anneau qui réunit leurs bases; et cet anneau, polygonal à l'intérieur, s'adapte sur l'arbre de la roue qui est en bois, et offre le même nombre de pans.

871. Pour maintenir les tiges des pilons toujours dans la même direction verticale, tout en leur laissant la liberté de monter et de descendre, on les enferme entre deux pièces horizontales et parallèles (G, G') (*g*, G') nommées *jumelles;* et celles-ci sont reliées entre elles par des *entre-toises* qui empêchent aussi la tige de s'écarter à droite ou à gauche dans la direction de l'axe O'O''. Un second rang de jumelles (G_2, G'') (g_2, C''), est placé dans la partie inférieure, mais à une hauteur telle, qu'il ne gêne pas la course du pilon. Les signes en forme d'X que l'on voit sur l'épure indiquent, en charpente, des bouts de pièces ou des sections faites perpendiculairement aux fibres du bois.

872. (*Pl.* 66, *fig.* 8.) DES EXCENTRIQUES. Dans quelques machines, on emploie une sorte de roue dont le contour extérieur n'a pas, pour centre de figure, le centre du mouvement de rotation, et qui a pour but de faire alternativement monter et descendre une tige verticale AZ, mais graduellement, et non pas brusquement comme dans le cas des pilons dont nous venons de parler. Ce contour forme donc une courbe *excentrique* qui peut offrir plusieurs variétés; mais il suffira d'en citer un exemple, celui que l'on désigne sous le nom de *courbe en cœur*. Soit AA_4 la hauteur dont la tige doit monter : après avoir partagé cet intervalle en parties égales, 4 par exemple, on en fera autant pour la demi-circonférence décrite avec le rayon OA_4; puis, sur les divers rayons $O1$, $O2$, $O3$, on prendra les distances

$$OB = OA_1, \quad OC = OA_2, \quad OD = OA_3, \quad OE = OA_4,$$

et la courbe ABCDE, jointe à la branche symétrique AB′C′D′E, composera l'excentrique demandée. En effet, la tige AZ étant retenue dans la même direction verticale par les guides m et n, lorsqu'on fera tourner la roue autour de son axe O, et que le rayon vecteur OB aura pris la position OA_1, la poussée oblique qu'elle exerce sur la tige aura fait monter celle-ci et aura transporté son pied A en A_1, puisque ce dernier point coïncidera avec B. De même, quand le rayon OC sera devenu vertical, le pied A se trouvera transporté en A_2, et ainsi de suite jusqu'à ce que OE coïncide avec OA_4; puis, le mouvement de rotation continuant dans le même sens, la branche ED′C′B′A laissera redescendre la tige graduellement depuis A_4 jusqu'en A.

873. Ce système ne s'emploie que dans le cas où il ne faut pas exercer un grand effort sur la tige; et alors même on doit chercher à diminuer les frottements dus à la poussée oblique. Pour cela on garnit le pied de la tige d'un *galet* mobile autour de l'axe horizontal A, et l'on adopte pour contour de la roue une courbe *abcded′b′a* qui soit équidistante de l'excentrique primitive; cette nouvelle courbe se trace en la rendant tangente à des arcs de cercle décrits de divers points de ABCD... avec un rayon constamment égal à celui du galet. Par là, le mouvement rectiligne de la tige demeure le même que dans le premier cas; mais, au lieu d'un frottement de glissement, on n'a plus qu'un frottement de roulement, lequel est beaucoup moindre.

874. Quand on veut éviter le changement un peu brusque de vitesse qui a lieu aux points extrêmes A et A_4, on divise l'intervalle AA_4 en parties inégales, au moyen d'une demi-circonférence décrite sur cette distance comme diamètre, et que l'on partage en arcs égaux; les ordonnées de ce demi-cercle fournissent les points A_1, A_2, A_3,..., et la courbe ABCDE, construite comme ci-dessus, ne présente plus de points saillants. Nous laissons au lecteur le soin de tracer l'excentrique dans cette nouvelle hypothèse.

875. Remarques. Nous avons fait observer diverses fois que, pour un tel système d'engrenage, la poussée des dents ne s'exerçait qu'*après la ligne des centres*, dans le sens du mouvement; tandis que, pour tel autre système, il y avait des dents en prise *avant la ligne des centres*. Cette distinction est importante à faire, à cause des inconvénients graves que présente souvent le dernier de ces deux cas.

D'abord, on doit se rappeler que dans tous les engrenages examinés ci-dessus, les profils des dents ne roulent pas simplement l'un sur l'autre, mais qu'il y a aussi un glissement (nº **817**), lequel est parfois assez considérable, comme on l'a vu aux nºs **833** et **834**. De là résulte un frottement qui est proportionnel à la pression exer-

cée par les dents l'une sur l'autre, et qui absorbe une partie de la force motrice : or cette perte de force est *plus considérable* pour deux dents qui sont en prise *avant la ligne des centres*, que pour deux dents analogues qui ne seraient en contact qu'après la même ligne. Cette proposition, que l'expérience confirme, s'établit par des principes de mécanique et par des calculs dont l'exposition nous éloignerait trop du but graphique de cet ouvrage; mais nous pouvons, du moins, la justifier par les considérations suivantes.

876. (*Pl.* 70, *fig.* 32.) Admettons que, dans la *fig.* 32, O′ soit la roue *menante*, et qu'elle tourne dans le sens indiqué par la flèche φ''. Il peut arriver, soit par suite du trop petit nombre des dents, soit par suite de quelque irrégularité dans leur exécution, qu'à une certaine époque la poussée des deux roues ne s'exerce plus que par un seul point m qui corresponde au dernier élément du profil $a''z''$; alors la pointe z'', ou plutôt l'arête vive qui est projetée sur ce point, sera comparable au tranchant d'un ciseau dont les faces seraient symétriques par rapport au plan diamétral $O'z''$. Or, tant que le mouvement a lieu dans le sens φ'', le contact marche de m vers A''; et, l'angle $O'z''A''$ étant aigu, le ciseau ne fait que frotter sur la surface $G''A''z''$, et la polir sans l'entamer, Mais, si nous changeons les rôles, et que O devenant la roue *menante*, elle tourne dans le sens de la flèche φ, alors le tranchant du ciseau marchera de m vers G'', du côté de l'angle obtus $O'z''G''$: conséquemment il tendra à pénétrer dans la surface $A''G''$, il l'entamera légèrement et apportera beaucoup plus de résistance au mouvement de rotation de l'engrenage. Quelquefois même, sous l'effort d'une grande pression, l'arête z'' pénétrera assez avant dans la surface $A''G''$ pour ne plus pouvoir se dégager, et il y aura un *arc-boutement* qui arrêtera subitement la machine, ou qui fera rompre l'une des dents ainsi engagées. C'est pour cela qu'il faut toujours échanfriner les dents, et avoir soin d'adoucir encore les arêtes qui résulteraient de cette troncature.

877. Mais, lors même que ces précautions ont été prises, il reste toujours des aspérités inévitables sur le bois ou la fonte qui ont servi à former les dents; et ces aspérités produisent, quoique d'une manière moins prononcée, des effets analogues à ceux que nous avons décrits au numéro précédent. D'où l'on doit conclure, conformément à l'expérience, que le frottement et la perte de force motrice sont toujours plus considérables pour deux dents qui se poussent avant la ligne des centres, que pour celles qui sont en contact après cette ligne. En outre, dans le premier de ces cas, il peut encore y avoir arc-boutement, quoique la dent $a''z''b''$ soit échanfrinée, si par quelque légère irrégularité, il arrive que la poussée des deux roues ne se fasse que par le dernier élément du profil conservé $a''z''$, et que la pression soit considérable. Ainsi, nous pouvons poser ce principe général : dans tout engrenage *il faut*, autant que possible, *éviter que les dents commencent à entrer en prise avant la ligne des centres*.

878. Pour remplir cette condition, le premier moyen serait de supprimer dans une des roues, O′ par exemple, toutes les portions de dents qui seraient en dehors du cercle primitif $\alpha'\mathfrak{G}'$, ainsi que le montrent les *fig.* 17, 18, 20, 22, 23, et d'exiger que la roue O fût toujours la roue *menante*, soit à droite, soit à gauche, car alors on voit bien que la poussée ne s'exercerait jamais qu'après la ligne des centres. On pourrait obtenir le même avantage dans l'engrenage à développantes de la *fig.* 24, si l'on réduisait les profils des dents de O' aux parties intérieures *gfa*, *heb*,.... Les engrenages de ce genre, où une seule des roues peut mener, sont dits *non réciproques*.

879. Mais cette disposition offrirait des inconvénients dans les grandes machines, à mouvements rapides, à résistances très-inégales, où les vitesses sont régularisées par l'emploi des volants. Car, alors, en raison des petites variations périodiques que subit la vitesse, et à cause du jeu qui doit toujours exister entre les dents (n° **837**), chacune des deux roues, tout en continuant de marcher dans le même sens, se trouve tantôt *menante* et tantôt *menée* : or, pour remplir ce double rôle, elles doivent toutes deux être armées de dents saillantes en dehors des cercles primitifs, comme on le voit dans la *fig.* 32, où l'engrenage est dit réciproque. Ainsi, pour conserver cet avantage sans retomber dans l'inconvénient d'avoir des contacts, tant en avant qu'en arrière de la ligne des centres, il faudra *démaigrir* les dents *du côté opposé à celui où le mouvement doit avoir lieu*, c'est-à-dire enlever les parties que nous avons couvertes de hachures dans la *fig.* 32; mais le système ne pourra fonctionner que dans un seul sens, celui qui est indiqué par les flèches φ et φ' (*).

880. (*Fig.* 32.) *Limite du nombre des dents.* A la poussée d'un couple de dents doit succéder, sans interruption aucune, la poussée d'un autre couple, afin d'éviter les chocs rétrogrades que l'on nomme des *à-coups* : il faut donc qu'à l'instant où les deux dents GAZ et *gaz* commencent à se toucher sur la ligne des centres en A, les dents G'A'Z' et *g'a'z'* du couple précédent soient encore en prise. Or, en abaissant la normale Ax sur le profil *a'g'* (rectiligne ou non), on sait que le pied x de cette normale doit être (n° **812**) le point de contact de l'enveloppée *a'g'* avec l'enveloppe A'Z'; si donc ce point x se trouve au-dessous du sommet Z' de la dent de la roue O, la condition demandée sera remplie; sinon, il y aurait des à-coups, et pour les éviter, il faudra rapprocher les dents en augmentant leurs nombres n et n', qui devront toujours être choisis proportionnels aux rayons R et R' des cercles primitifs. Il suit de là que le nombre n' des dents de la petite roue admet un *minimum*, qui varie avec la nature des profils et avec le rapport des vitesses angulaires; aussi, en cherchant à déterminer par le calcul la position du pied de la normale Ax, M. *Savary* a trouvé les limites suivantes, où μ désigne le rapport $\frac{R'}{R}$, qui est toujours moindre que l'unité :

Dans un engrenage à flancs. . . . . $n' =$ ou $> 10(1+\mu)$;
Dans un engrenage à lanterne. . . . . $n' =$ ou $> 7+4\mu$;
Dans un engrenage à développantes. . . . . $n' =$ ou $> 16+2\mu$.

(*) Ce procédé, ainsi que les remarques précédentes, sont tirés des Leçons que M. *Savary* avait rédigées pour son Cours de machines à l'École Polytechnique.

Nous ne rapporterons point ici les calculs qui conduisent à ces résultats, parce qu'ils peuvent être avantageusement remplacés, dans chaque exemple, par la vérification graphique citée plus haut, laquelle n'exige que le tracé provisoire de deux dents.

CHAPITRE V.

DES ENGRENAGES CONIQUES.

881. (*Pl.* 71, *fig.* 1.) On appelle ainsi le système de deux roues dont les axes, au lieu d'être parallèles, vont se rencontrer sous un angle quelconque. Soient Z'O' et Z'*o'* ces deux axes, situés ici dans le plan vertical de notre épure; on commencera par tracer dans l'angle O'Z'*o'*, une droite Z'A' telle, que les deux perpendiculaires abaissées d'un quelconque de ses points sur les deux axes, soient en raison inverse des vitesses angulaires (n° **805**) que l'on veut imprimer aux deux roues, c'est-à-dire en raison inverse des nombres de tours que ces roues doivent faire dans un même temps : ces nombres étant assignés par la question, la détermination graphique de la droite Z'A' est trop facile pour nous y arrêter davantage. Ensuite, selon la grandeur plus ou moins considérable que l'on voudra donner aux deux roues, on choisira sur la droite Z'A' un point A' plus ou moins éloigné de Z', et duquel on abaissera sur les axes les perpendiculaires A'O', A'*o'*; ce seront là les rayons des *cercles primitifs*, lesquels serviront de bases à deux cônes de révolution Z'A'O' et Z'A'*o'* dont chacun sera, pour ainsi dire, le noyau d'une des roues.

882. Maintenant, pour obtenir entre les vitesses angulaires le rapport assigné ci-dessus, il suffira évidemment de faire tourner les deux cônes primitifs autour de leurs axes immobiles, de telle sorte que les circonférences A'O' et A'*o'* prennent des *vitesses absolues* qui soient *égales* (n° **807**). Or, pour remplir cette condition au moyen de la poussée de deux dents correspondantes, il faut terminer ces dents par deux surfaces coniques ayant leur sommet commun en Z', et dont l'une soit l'*enveloppe* de l'espace que parcourrait l'autre, si, en laissant tout à fait immobile le cône Z'A'O', on faisait *rouler* sur celui-là le cône Z'A'*o'* qui entraînerait avec lui la surface de sa dent; car, en appliquant ici les détails que nous avons donnés aux n^{os} **808** et **809**, on verra bien que ce *roulement* amène les deux cônes primitifs dans la même *situation relative* que s'ils avaient tourné autour de leurs axes immobiles et de manière à faire parcourir *des arcs égaux* par deux points quelconques des circonférences A'O' et A'*o'*.

883. (*Fig.* 1.) D'après ce principe, la solution la plus simple s'obtiendra en formant : 1° la dent de la petite roue avec un plan mené par l'axe Z'*o'* et qui reçoit le nom de *flanc;* 2° la dent de la grande roue, avec une surface conique qui soit constamment tangente à ce flanc, dans toutes les positions qu'il occupera pendant le roulement du cône primitif Z'A'*o'*; et l'on va voir que ce cône, *enveloppe* du flanc, a pour base une épicycloïde sphérique.