que la roue O fût toujours la roue *menante*, soit à droite, soit à gauche, car alors on voit bien que la poussée ne s'exercerait jamais qu'après la ligne des centres. On pourrait obtenir le même avantage dans l'engrenage à développantes de la *fig.* 24, si l'on réduisait les profils des dents de O' aux parties intérieures *gfa*, *heb*,.... Les engrenages de ce genre, où une seule des roues peut mener, sont dits *non réciproques*.

879. Mais cette disposition offrirait des inconvénients dans les grandes machines, à mouvements rapides, à résistances très-inégales, où les vitesses sont régularisées par l'emploi des volants. Car, alors, en raison des petites variations périodiques que subit la vitesse, et à cause du jeu qui doit toujours exister entre les dents (n° **837**), chacune des deux roues, tout en continuant de marcher dans le même sens, se trouve tantôt *menante* et tantôt *menée* : or, pour remplir ce double rôle, elles doivent toutes deux être armées de dents saillantes en dehors des cercles primitifs, comme on le voit dans la *fig.* 32, où l'engrenage est dit réciproque. Ainsi, pour conserver cet avantage sans retomber dans l'inconvénient d'avoir des contacts, tant en avant qu'en arrière de la ligne des centres, il faudra *démaigrir* les dents *du côté opposé à celui où le mouvement doit avoir lieu*, c'est-à-dire enlever les parties que nous avons couvertes de hachures dans la *fig.* 32; mais le système ne pourra fonctionner que dans un seul sens, celui qui est indiqué par les flèches φ et φ' (*).

880. (*Fig.* 32.) *Limite du nombre des dents.* A la poussée d'un couple de dents doit succéder, sans interruption aucune, la poussée d'un autre couple, afin d'éviter les chocs rétrogrades que l'on nomme des *à-coups* : il faut donc qu'à l'instant où les deux dents GAZ et *gaz* commencent à se toucher sur la ligne des centres en A, les dents G'A'Z' et *g'a'z'* du couple précédent soient encore en prise. Or, en abaissant la normale Ax sur le profil *a'g'* (rectiligne ou non), on sait que le pied x de cette normale doit être (n° **812**) le point de contact de l'enveloppée *a'g'* avec l'enveloppe A'Z'; si donc ce point x se trouve au-dessous du sommet Z' de la dent de la roue O, la condition demandée sera remplie; sinon, il y aurait des à-coups, et pour les éviter, il faudra rapprocher les dents en augmentant leurs nombres n et n', qui devront toujours être choisis proportionnels aux rayons R et R' des cercles primitifs. Il suit de là que le nombre n' des dents de la petite roue admet un *minimum*, qui varie avec la nature des profils et avec le rapport des vitesses angulaires; aussi, en cherchant à déterminer par le calcul la position du pied de la normale Ax, M. *Savary* a trouvé les limites suivantes, où μ désigne le rapport $\frac{R'}{R}$, qui est toujours moindre que l'unité :

Dans un engrenage à flancs. . . . . $n' =$ ou $> 10(1+\mu)$;
Dans un engrenage à lanterne. . . . . $n' =$ ou $> 7+4\mu$;
Dans un engrenage à développantes. . . . . $n' =$ ou $> 16+2\mu$.

(*) Ce procédé, ainsi que les remarques précédentes, sont tirés des Leçons que M. *Savary* avait rédigées pour son Cours de machines à l'École Polytechnique.

Nous ne rapporterons point ici les calculs qui conduisent à ces résultats, parce qu'ils peuvent être avantageusement remplacés, dans chaque exemple, par la vérification graphique citée plus haut, laquelle n'exige que le tracé provisoire de deux dents.

CHAPITRE V.

DES ENGRENAGES CONIQUES.

881. (*Pl.* 71, *fig.* 1.) On appelle ainsi le système de deux roues dont les axes, au lieu d'être parallèles, vont se rencontrer sous un angle quelconque. Soient Z'O' et Z'*o'* ces deux axes, situés ici dans le plan vertical de notre épure; on commencera par tracer dans l'angle O'Z'*o'*, une droite Z'A' telle, que les deux perpendiculaires abaissées d'un quelconque de ses points sur les deux axes, soient en raison inverse des vitesses angulaires (n° **805**) que l'on veut imprimer aux deux roues, c'est-à-dire en raison inverse des nombres de tours que ces roues doivent faire dans un même temps : ces nombres étant assignés par la question, la détermination graphique de la droite Z'A' est trop facile pour nous y arrêter davantage. Ensuite, selon la grandeur plus ou moins considérable que l'on voudra donner aux deux roues, on choisira sur la droite Z'A' un point A' plus ou moins éloigné de Z', et duquel on abaissera sur les axes les perpendiculaires A'O', A'*o'*; ce seront là les rayons des *cercles primitifs*, lesquels serviront de bases à deux cônes de révolution Z'A'O' et Z'A'*o'* dont chacun sera, pour ainsi dire, le noyau d'une des roues.

882. Maintenant, pour obtenir entre les vitesses angulaires le rapport assigné ci-dessus, il suffira évidemment de faire tourner les deux cônes primitifs autour de leurs axes immobiles, de telle sorte que les circonférences A'O' et A'*o'* prennent des *vitesses absolues* qui soient *égales* (n° **807**). Or, pour remplir cette condition au moyen de la poussée de deux dents correspondantes, il faut terminer ces dents par deux surfaces coniques ayant leur sommet commun en Z', et dont l'une soit l'*enveloppe* de l'espace que parcourrait l'autre, si, en laissant tout à fait immobile le cône Z'A'O', on faisait *rouler* sur celui-là le cône Z'A'*o'* qui entraînerait avec lui la surface de sa dent; car, en appliquant ici les détails que nous avons donnés aux n^{os} **808** et **809**, on verra bien que ce *roulement* amène les deux cônes primitifs dans la même *situation relative* que s'ils avaient tourné autour de leurs axes immobiles et de manière à faire parcourir *des arcs égaux* par deux points quelconques des circonférences A'O' et A'*o'*.

883. (*Fig.* 1.) D'après ce principe, la solution la plus simple s'obtiendra en formant : 1° la dent de la petite roue avec un plan mené par l'axe Z'*o'* et qui reçoit le nom de *flanc*; 2° la dent de la grande roue, avec une surface conique qui soit constamment tangente à ce flanc, dans toutes les positions qu'il occupera pendant le roulement du cône primitif Z'A'*o'*; et l'on va voir que ce cône, *enveloppe* du flanc, a pour base une épicycloïde sphérique.

Dans le plan du cercle primitif dont le rayon est A′o′ (plan que nous appellerons le *plan auxiliaire* de projection, et qui est rabattu ici avec ce cercle suivant A′Ge′), traçons une circonférence A′Fo′ qui ait pour diamètre le rayon A′o′, et faisons-la rouler successivement : 1° sur le cercle primitif du rayon O′A′, en conservant toujours entre leurs plans l'inclinaison marquée par l'angle o′A′X; 2° dans l'intérieur et dans le plan du cercle primitif qui a pour rayon o′A′. Pendant le premier mouvement de rotation, un point quelconque de la circonférence mobile, par exemple celui qui est rabattu en *m* sur le plan horizontal, décrira une épicycloïde sphérique dont nous savons trouver la projection horizontale DM (n° **482**), et dont le cône générateur A′S′o′ s'obtient en élevant par le centre ω′ la perpendiculaire ω′S′ sur le plan du cercle mobile; de sorte que cette épicycloïde est située tout entière sur la sphère décrite avec le rayon S′A′ : d'ailleurs, si l'on rabat le point (M, M′) en F sur le plan auxiliaire, on sait (n° **470**) que la droite projetée suivant (A′M, A′M′), et qui a pour vraie position A′F dans le plan auxiliaire, se trouve être une normale de l'épicycloïde au point (M, M′). D'un autre côté, pendant la rotation du cercle A′Fo′ sur A′Ge′, le même point générateur (M, M′) ou F décrira une épicycloïde rectiligne (n° **475**) qui sera précisément la droite o′FG. Cela posé, si l'on conduit un plan par cette droite o′FG et par l'axe Z′o′, je dis que *ce plan méridien* sera *tangent au cône qui aurait pour sommet le point* Z′ *et pour base l'épicycloïde projetée sur* DM. En effet, si l'on observe que le plan méridien en question a pour trace verticale Z′o′X, et pour trace sur le plan auxiliaire la ligne o′F elle-même, on reconnaîtra aisément que ce plan est perpendiculaire sur la droite rabattue suivant A′F, et projetée suivant (A′M, A′M′) : or, puisque cette droite est normale à l'épicycloïde, il est certain que le plan méridien Z′o′F contient la tangente de cette courbe au point (M, M′); et comme il passe aussi par le sommet Z′ du cône épicycloïdal, il sera bien tangent à cette surface, tout le long de la génératrice qui réunira le sommet Z′ avec le point F relevé en (M, M′).

D'ailleurs, ce contact continuera de subsister le long d'une génératrice variable sur ce cône épicycloïdal, pendant que le cône primitif Z′o′A′ roulera sur le cône Z′O′A′; car, pour toutes les positions du point F sur le petit cercle, les deux cordes A′F et o′F, $A'F_2$ et $o'F_2$,..., se trouveront toujours perpendiculaires l'une à l'autre. Donc le plan Z′o′F est bien propre à former le *flanc* d'une dent de la roue Z′o′A′, puisqu'il sera touché constamment et conduit par la dent que termine le cône épicycloïdal [Z′, DM], de la même manière que si le cône primitif Z′o′A′ roulait, sans glisser, sur l'autre cône Z′O′A′ : ce qui remplit bien la condition du n° **882**.

884. (*Fig.* 1.) Il reste à trouver l'étendue précise que doit avoir le flanc pour correspondre à un arc limité DM de l'épicycloïde. A cet effet, rabattons le flanc Z′o′F sur le plan vertical, autour de l'axe Z′o′ : dans ce mouvement, le point F décrira l'arc de cercle F*f* dont le centre est en o′; et la droite Z′*f* sera le rabattement de la génératrice de contact qui aboutit au point (M, M′). Mais, à l'époque où le flanc passait par l'origine D de l'épicycloïde, il touchait le cône épicycloïdal suivant la génératrice projetée sur O′D, laquelle se rabattra évidemment sur Z′A′.

Donc l'angle A′Z′*f* mesure en vraie grandeur sur le flanc, l'espace angulaire qui a été *conduit* et touché par la dent épicycloïdale, pendant que le flanc a roulé depuis le point D jusqu'en (M, M′). Ce sera donc à cette partie angulaire A′Z′*f* qu'il faudra restreindre l'exécution du flanc, si la dent est réduite à la portion du cône qui correspond à l'arc DM.

885. Mais ce procédé ne serait pas d'une application commode dans l'épure générale qui va suivre, attendu qu'alors nous ne connaîtrons immédiatement que la projection horizontale M de l'extrémité de l'arc DM, avec la sphère Z′A′P′o′ sur laquelle est située l'épicycloïde. Dans ce cas, il faudra rabattre le point M en R, projeter ce dernier en P′ sur le grand cercle de la sphère, et abaisser sur l'axe Z′O′ la perpendiculaire P′K′ qui représentera le parallèle sur lequel doit être situé le point de l'épicycloïde projeté en M. Alors ce parallèle P′K′ coupera le cercle générateur qui a pour diamètre A′o′, suivant une corde projetée au point M′; on rabattra cette corde suivant M′F, qui fera connaître le point F, duquel on déduira *f* et le reste comme ci-dessus.

886. (*Pl.* 71, *fig.* 2.) *Tracé de l'épure.* Soient Z′O′ et Z′o′ les axes des deux roues, situés dans le plan vertical de projection; soient aussi A′O′ et A′o′ les rayons des *cercles primitifs* que l'on déterminera comme il a été dit au n° **881** : ces deux cercles sont représentés sur les deux plans (*fig.* 3 et 4) perpendiculaires aux axes, par les circonférences OA et *oa*. Après avoir choisi deux nombres entiers *n* et *n′*, qui soient entre eux dans le même rapport que les rayons primitifs, on divisera la circonférence OA en *n* parties égales AA_1, A_1A_2,..., et la circonférence *oa* en *n′* parties égales aa_1, a_1a_2,...; et il arrivera nécessairement (n° **836**) que les divisions AA_1 et aa_1 seront de même longueur absolue. Ensuite, on subdivisera chacun de ces arcs en deux parties dont une AB, destinée à former la base de la dent, soit moindre que l'autre BA_1 d'environ un *douzième* de l'arc total AA_1 (*voyez* n° **837**).

887. (*Fig.* 2 et 3.) Cela posé, dans le plan du cercle primitif A′o′, et sur ce rayon, comme diamètre, décrivons un cercle qui est rabattu ici suivant ω″A (*fig.* 3); puis, faisons-le rouler sur la circonférence O′A′, en maintenant entre leurs plans l'inclinaison primitive O′A′o′. Dans ce mouvement, le point (A, A′) du cercle mobile décrira une épicycloïde située sur la sphère qui a pour rayon s′A′; et pour construire cette courbe sans déplacer le contact actuel A des deux cercles, on prendra deux arcs égaux A*m* et AI, d'où l'on déduira (n° **482**) les projections M, M′, d'un point de l'épicycloïde qui aurait son origine en I; mais comme l'origine est réellement en A, on verra bien qu'il suffit de prendre l'arc ρμ égal à RM, pour obtenir un point μ de la projection horizontale Aμλ de l'épicycloïde demandée. Alors le cône, qui aura pour base cette épicycloïde et pour sommet le point (Z′, O), formera (n° **883**) la dent qui commence en (A, A′); mais il reste à en trouver les intersections avec les deux surfaces coniques inférieure et supérieure qui terminent le noyau de la roue, et dont nous n'avons pas encore parlé.

888. Par le point A′ menons une droite indéfinie A′Q′, formant avec A′Z′ un angle un peu plus grand que 90°; puis, après avoir marqué la longueur A′α′ que l'on veut donner aux dents, menons la droite $\alpha'V'$ parallèle à $A'Q'$, et faisons tourner ces deux parallèles autour de l'axe vertical $(O, O'Z')$; nous produirons ainsi deux cônes de révolution que l'on terminera à deux cercles horizontaux $Q'Q''$, $V'V''$, assez écartés pour que le solide qu'ils comprendront offre une résistance suffisante : ce solide forme ce qu'on appelle l'*enrayure*, qui est quelquefois évidée, comme dans la *Pl.* 68; tandis que la partie comprise entre les deux cônes décrits par $A'Q'$ et $\alpha'V'$ forme la *couronne* dans laquelle sont taillés les dents et les creux, et qui devra être prolongée jusqu'à une certaine limite $Z'N'P'$ dépendant de la saillie que l'on voudra donner aux dents, comme nous l'expliquerons tout à l'heure (n° **890**).

Quant à la petite roue, on tirera la droite $A'q'$ dans une direction à peu près symétrique de $A'Q'$ par rapport à la ligne $A'Z'$; puis, du point α' on mènera $\alpha'v'$ parallèle à $A'q'$, et l'on terminera les deux cônes, que ces parallèles décriront autour de $Z'o'$, par les deux cercles de l'enrayure $v'v''$ et $q'q''$. Enfin, on prolongera ces mêmes cônes jusqu'à la limite $Z'n'p'$ que nous allons apprendre à assigner pour la saillie des dents de cette seconde roue.

889. Revenons maintenant au cône épicycloïdal qui avait son sommet en (O, Z') et pour base l'épicycloïde projetée sur $A\mu\lambda$, et cherchons la courbe ACL suivant laquelle se projette son intersection avec le cône inférieur décrit par la révolution de la droite $A'Q'$. Comme cette épicycloïde est située sur la sphère du rayon $s'A'$, si nous coupons cette surface et les deux cônes ci-dessus par un plan vertical, tel que $O\lambda$, et que nous le rabattions sur le plan vertical autour de l'axe $(O, O'Z')$, on verra bien que le point λ se transportera en λ', et que $Z'\lambda'$ sera le rabattement de la génératrice du cône épicycloïdal; donc, en prolongeant cette droite jusqu'en L', où elle coupe la génératrice $Q'A'P'$, et en ramenant par un arc de cercle le point L' en L sur $O\lambda$, ce dernier point L appartiendra à la projection demandée ACL.

890. De là on déduira la courbe BD symétrique de AC par rapport à la *ligne milieu* de la dent, sur laquelle ces courbes iraient se rencontrer; mais, en les prolongeant ainsi, les deux faces coniques de la dent se couperaient suivant une arête vive, ce que l'on doit éviter avec soin (n^{os} **843** et **876**) : c'est pourquoi on *échanfrine* la dent, en traçant un arc de cercle PCD placé un peu au-dessous du point de section des courbes AC et BD, il en résulte une nouvelle face conique ayant pour sommet le point $(Z'O)$ et pour base un arc de la circonférence $(PCD, P'P'')$. C'est ce cercle d'échanfrinement qui détermine la limite $Z'P'$ dont nous avons parlé au n° **888**; et la vraie mesure de la saillie que présentent les dents au-dessus du cône primitif $Z'A'O'$ est exprimée par l'angle $A'Z'P'$.

Le cône supérieur de la couronne, décrit par la révolution de la droite $\alpha'V'$, sera coupé par les faces coniques de la dent, suivant des courbes $\alpha\gamma$, 6δ, évidemment *semblables* avec AC et BD, puisque les génératrices $\alpha'V'$ et $A'Q'$ sont parallèles; de sorte qu'on pourra tracer ces courbes au moyen de rayons vecteurs proportionnels.

891. Quant à la petite roue, après avoir tracé un cercle horizontal sur $(OA, O'A')$

comme diamètre, on fera rouler le cône droit $S'A'\Omega'$ sur le cône $S'A'o'$: le point (A', a) du cercle mobile décrira une épicycloïde située sur la sphère du rayon $S'A'$, et dont on construira la projection $\alpha\mu'$ sur le plan auxiliaire de la *fig.* 4; puis, en imaginant un cône qui ait pour base cette épicycloïde et pour sommet le point $(Z'o)$, on cherchera l'intersection de ce cône épicycloïdal avec le cône de la couronne décrit par la révolution de la droite $A'q'$ autour de l'axe $Z'o'$, ce qui fournira la projection ac du contour de la dent. De là on déduira par symétrie les diverses courbes b_1d_1, a_1c_1,..., que l'on coupera, avant leur rencontre, par le cercle d'échanfrinement pd_1c_1, lequel fera connaître le point p' et la saillie $A'Z'p'$ que présenteront les dents de cette roue au dehors du cône primitif $Z'A'o'$. Nous ne faisons qu'indiquer ces diverses opérations, parce qu'elles sont toutes semblables à celles que nous avons effectuées pour la première roue.

Remarque. Quoique la saillie de la dent ait pour limite rigoureuse la droite $Z'p'$, il sera bon, afin de laisser quelque jeu à la machine, de tracer une autre droite $Z'p''$ un peu plus écartée de l'axe, et de considérer cette dernière comme la limite fictive de la dent, quand il s'agira tout à l'heure de déterminer l'étendue des flancs et des entailles de la grande roue.

892. *Limites des flancs.* Nous avons vu au n° **883** que les flancs de la grande roue qui seront conduits par les dents de la petite sont les plans verticaux OA, OA_1, OA_2,...; mais pour déterminer la partie utile de ces plans, c'est-à-dire celle qui est successivement touchée par la portion de cône épicycloïdal correspondante à l'arc fini ac, il faudra recourir à la méthode du n° **885**. Ainsi, du point p'', où la génératrice extrême $Z'p''$ du cône épicycloïdal rencontre le grand cercle $O'p''A'$ de la sphère qui contient l'épicycloïde en question, abaissons sur l'axe $Z'o'$ la perpendiculaire $p''k'$; elle coupe le diamètre $O'A'$ du cercle générateur au point 2, que l'on projettera en 3 sur la circonférence de ce cercle; on rabattra le point 3 en 4 sur le plan vertical, et la droite $Z'4$, que l'on prolongera jusqu'en F', où elle rencontre le cône inférieur de la couronne, fera connaître la partie angulaire $A'Z'F'$ du flanc qui seule est conduite par la dent correspondante à l'arc ac. Toutefois, comme la droite $Z'F'$ rencontre aussi le cône supérieur de la couronne au point φ', on doit dire que la grandeur précise du flanc est donnée par le trapèze $A'\alpha'\varphi'F'$, dont les angles F' et φ' fourniront sur le plan horizontal les circonférences auxquelles il faudra terminer les côtés des flancs AF, $\alpha\varphi$, BE,....

Pour la petite roue, on trouvera d'une manière semblable les côtés des flancs af, be,..., en opérant sur la génératrice $Z'P'$ du cône épicycloïdal qui forme la dent de la grande roue.

893. *Limites des entailles.* Au lieu de faire tourner les deux roues autour de leurs axes immobiles, nous pouvons, d'après le principe du n° **809**, laisser le cône $Z'A'O'$ entièrement fixe et faire rouler sur celui-là le cône $Z'A'o'$ qui entraînera avec lui la dent correspondante à l'arc ac. Pendant cette rotation, l'arête extrême $Z'p''$ de la dent engendrera une surface conique ayant son sommet en Z', et pour base l'épicycloïde rallongée qui sera décrite par le point x' où cette arête va couper le plan du cercle mobile $A'o'$; et les intersections de cette surface avec les deux cônes qui terminent la couronne de la grande roue, indiqueront évidemment les limites de l'entaille à pratiquer, pour que la dent de la petite roue puisse se mouvoir librement.

(*Fig.* 2 et 5.) Afin de construire, sans confusion, cette épicycloïde rallongée qui sera tout entière sur la sphère $x'y'$ décrite avec le rayon $Z'x'$, transportons le triangle $Z'A'O'$ dans la situation $Z''A''O''$, et en traçant la droite $A''x''$ égale et parallèle à $A'x'$, nous aurons les projections x'' et x du point générateur quand il est arrivé dans le plan vertical; d'ailleurs le cercle $x''y''$, décrit avec la distance $Z''x''$ pour rayon, représentera la sphère qui contient l'épicycloïde cherchée. Cela posé, si nous traçons le cercle $A''B''$ avec le rayon $O''A''$, et le cercle $A''b''$ avec un rayon $o''A''$ choisi égal à $o'A'$, ce dernier sera le rabattement du cercle mobile qui doit rouler sur l'autre; de sorte qu'en prenant deux arcs égaux $A''M = A''m$, et en prolongeant le rayon $o''m$ d'une quantité mG égale à $A''x''$, le point G serait le rabattement, et g, g' les projections du point générateur quand la rotation aurait fait parcourir l'arc $A''M$, si l'origine de cette rotation était en M; mais comme cette origine est vraiment en A'', on verra bien qu'il faut tracer la circonférence $gihl$ et porter l'arc gi de h en l, pour obtenir un point l de la projection lx de l'épicycloïde demandée.

Maintenant, il faut imaginer un cône qui ait son sommet en Z'' et pour base l'épicycloïde projetée sur lx, et en chercher l'intersection avec le cône inférieur de la couronne de la grande roue, lequel aura pour génératrice, sur la *fig.* 5, la droite $A''Q''$ menée parallèlement à $A'Q'$ de la *fig.* 2. D'abord, la génératrice $Z''x''$ du cône épicycloïdal fournira, par sa rencontre avec $A''Q'''$, un point (X'', X) de l'intersection demandée. Ensuite, considérons la génératrice quelconque projetée sur $O''l$, et rabattons-la sur le plan vertical : le point de l'épicycloïde projeté en l étant à la même hauteur que g', il se transportera en k', sur la sphère $x''y''$; la génératrice sera donc rabattue suivant $Z''k'$, et alors elle coupera $A''Q''$ au point (r', r); de sorte qu'il n'y aura plus qu'à ramener par un arc de cercle le point r en L sur Ol, pour obtenir un point de la courbe $E''LX$ suivant laquelle se projette horizontalement l'intersection des deux cônes ci-dessus indiqués.

894. C'est cette courbe $E''LX$ qu'il faudra transporter sur la *fig.* 3 suivant EH, avec le soin de placer le point E'' (que nous allons apprendre à déterminer) à l'extrémité E du flanc BE, et le sommet X sur le cercle *limite* THG, lequel se déduit du point T' où la couronne de la roue est rencontrée par l'arête $Z'p''x'$. Quant au point E'' de la *fig.* 5, si l'on se représente bien la rotation du cône primitif $Z'A'o'$ sur le cône immobile $Z'A'O'$, on reconnaîtra aisément qu'il faut prolonger le cercle $B''A''$ d'une quantité $A''U''$ égale à l'arc b_1u de la *fig.* 4; puis, tirer le rayon $O''U''$ sur lequel on prendra la longueur $U''E''$, égale au flanc BE de la *fig.* 3.

Sur le cône supérieur de la couronne, le cercle *limite* $\theta\eta$ sera fourni par le point θ' où la génératrice $N'\alpha'V'$ est coupée par la même arête $Z'p''x'$; et la courbe $\varepsilon\eta$ étant *semblable* à EH, elle se déduira de celle-ci par des rayons vecteurs proportionnels.

La projection verticale des courbes qui forment le contour des dents se conclura

de la projection horizontale, en ramenant les divers points de celle-ci sur les cercles horizontaux auxquels ils appartiennent. Mais ce tracé, que nous avons effectué ici, ne doit être regardé que comme un complément de la représentation graphique, car il est entièrement inutile pour le constructeur; aussi, sur le plan vertical de la petite roue, nous n'avons figuré qu'une simple *coupe*.

895. (*Fig.* 6.) *Développements des panneaux*. Pour exécuter cet engrenage, il est nécessaire de connaître, *en vraie grandeur*, les intersections des diverses faces de la dent et du creux avec les deux cônes de la couronne qui sont engendrés par la révolution des droites parallèles $P'A'Q'$ et $N'\alpha'V'$ autour de l'axe $O'Z'$. On développera donc ces deux surfaces coniques par la méthode du n° **251**, en cherchant d'abord la position de leurs sommets sur cet axe; ainsi, pour le cône $P'A'Q'$ par exemple, on décrira, avec son apothème, une circonférence sur laquelle on prendra des arcs égaux en grandeur absolue à PC, CD,...; et sur les rayons qui aboutiront à ces points de division, on portera les longueurs des portions de génératrices comprises entre le cercle $P'P''$ et les divers points projetés en A, B, E, H,....

896. Après avoir taillé le solide de l'enrayure et de la couronne, on appliquera sur les deux parois coniques correspondantes à $P'Q'$ et $N'V'$, les panneaux dont nous venons de parler, construits en carton flexible, afin qu'en les faisant fléchir ils puissent coïncider entièrement avec ces surfaces; dans cet état, les courbes *transformées* auront repris leur forme primitive à double courbure, et l'on tracera alors sur les parois coniques le véritable contour des dents et des creux. Ensuite, il n'y aura plus qu'à exécuter les surfaces coniques dirigées vers le sommet Z', au moyen de l'arête d'une *règle* que l'on promènera sur les contours inférieur et supérieur, avec le soin de l'appuyer en même temps sur les points de *repère* qui correspondent à une même génératrice, points qui sont donnés par le tracé même des panneaux.

897. *Remarque*. A l'égard des entailles, nous avons voulu expliquer la méthode rigoureuse qui servirait à enlever le solide *minimum*, et laisserait ainsi aux dents la plus grande résistance possible; mais, dans la pratique, et pour ne pas ajouter aux difficultés d'exécution que présente cet engrenage, on se contente de déterminer les cercles limites THG, $\theta\eta$, au moyen des deux points de section T', θ', marqués sur le plan vertical de la *fig.* 2, et l'on prolonge en ligne droite les côtés des flancs, BE, AF, 6ε,..., jusqu'à ces deux circonférences limites; ou bien, on raccorde leurs extrémités avec ces circonférences par une petite courbe arbitraire, mais située visiblement en dehors de la limite rigoureuse EH. Cette simplification, qui devra toujours être employée, ne nuit en rien à la marche régulière de l'engrenage; mais il n'en est pas de même pour la suivante.

898. *Méthode approximative*. Pour éviter la longueur et les difficultés que présente le tracé des épicycloïdes sphériques, beaucoup de constructeurs se permettent d'y substituer des épicycloïdes planes, qu'ils déterminent de la manière suivante. Après avoir fixé les rayons primitifs $A'O'$ et $A'o'$, ils mènent par le point A', et perpendiculairement à la génératrice $Z'A'$, un plan que j'appellerai *plan auxiliaire*, et qui va couper les axes des roues en deux points que je désignerai par O_2 et o_2; dans ce plan auxiliaire ils décrivent deux cercles avec les rayons O_2A', o_2A', et ils opèrent comme si ces deux circonférences devaient rouler l'une sur l'autre, ce qui n'est pas très-éloigné de la vérité, du moins pour le court intervalle pendant lequel s'exerce la poussée d'une même dent.

Ainsi, après avoir rabattu le plan auxiliaire avec les deux circonférences qu'il renferme, on rapportera sur celles-ci les divisions égales marquées sur les cercles primitifs, et l'on construira les profils d'une dent de chaque roue, comme pour un engrenage cylindrique (nº **838**). Ensuite, comme on termine ici les *couronnes* des deux roues d'angle par les surfaces coniques que décriraient les droites $A'O_2$ et $A'o_2$ en tournant autour des axes respectifs, les profils construits ci-dessus remplaceront les panneaux développés sur la *fig.* 6; de sorte qu'il suffira d'appliquer ces profils sur la couronne même, pour pouvoir exécuter les diverses faces des dents et des creux, ainsi que nous l'avons dit au nº **896**.

NOTES DE M. E. MARTELET.

NOTE SUR LES CHANGEMENTS DE PLAN DE PROJECTION ET SUR LES MOUVEMENTS DE ROTATION.

Changement de plans de projection.

Iᵉʳ PROBLÈME. — *Changement de plan de projection par rapport à un point.*

Nous prendrons pour ce premier problème une figure en relief (*fig.* 1), afin de mieux faire comprendre l'épure qui est en regard (*fig.* 2). Soit donc un système ordinaire de plans de projection V et H, se coupant suivant la ligne de terre LT; nous remplaçons le plan vertical V par un autre plan vertical V′, coupant le plan horizontal H suivant la ligne de terre L′ T′, et le plan V suivant la verticale II′. Nous avons projeté un point M de l'espace en M_v et M_h sur les deux premiers plans, et nous demandons quelle sera la projection $M_{v'}$ de ce même point sur le nouveau plan vertical.

On sait: 1° que les deux projections d'un point doivent se trouver sur une même perpendiculaire à la ligne de terre; 2° que la distance d'un point au plan horizontal se mesure par la distance de sa projection verticale à la ligne de terre; par conséquent, en abaissant de M_h la perpendiculaire $M_h m'$ sur L′T′, en prolongeant cette droite d'une longueur $m' M_{v'}$ égale à $m M_v$, on aura en $M_{v'}$ la nouvelle projection verticale du point M.

Fig. 1.

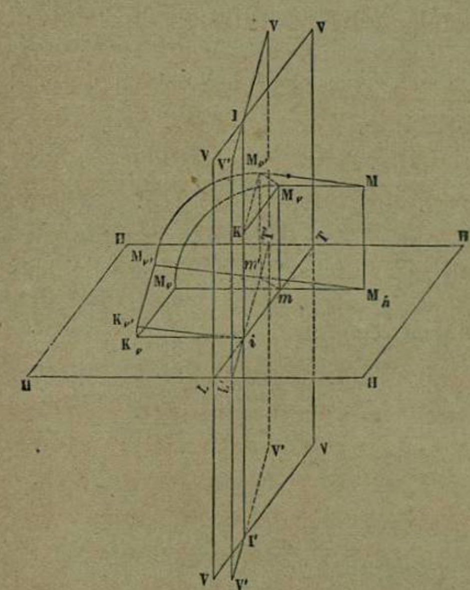
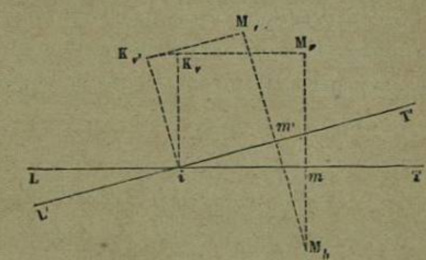


Fig. 2.



$m M_v = iK = m' M_{v'} = iK_v = iK_{v'}$.

Les mêmes considérations devant être employées quand on remplace le plan horizontal H par un