précédentes; en effet, on prendra sur la circonférence c l'arc a correspondant à ce déplacement α°, à partir du point t, et en menant par la seconde extrémité t' de cet arc une tangente à C_h, on aura la nouvelle projection horizontale de D. On vérifiera si l'arc compris sur C_h entre les points de contact M_h et M'_h est bien semblable à l'arc a : ce qui se fait en prolongeant les deux rayons A_hM_h, $A_hM'_h$ jusqu'à C et en s'assurant que l'arc $\mu\mu'$, intercepté sur la circonférence C entre les prolongements de ces rayons, est égal à l'arc a.

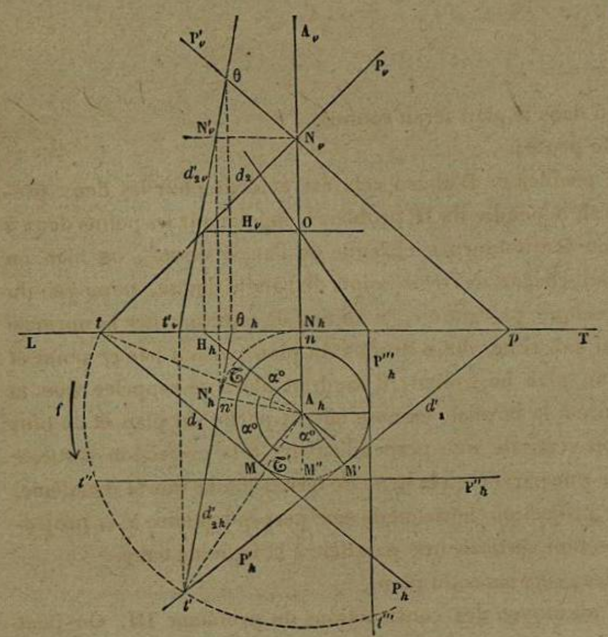
Parmi ces tangentes, il en est une, D'_h, qui est parallèle à la ligne de terre; on reconnaît aisément qu'alors la droite correspondante D′ est dans l'espace parallèle au plan vertical. Il en est une autre, D''_h, qui est perpendiculaire à la ligne de terre; la droite D″ qui lui correspond est alors dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre. Enfin, si l'on prend la tangente D'''_h parallèle à D_h, on aura la projection horizontale de la droite D après une demi-révolution autour de l'axe A; les deux projections verticales D_v, D'''_v sont alors symétriquement placées par rapport à la ligne A_v, sur laquelle elles se coupent au point N_v où se projette verticalement le diamètre NN‴ du cercle AN.

Les points de la droite D, tels que N et P, situés à même distance au-dessus et au-dessous du plan C, sont projetés horizontalement sur la même circonférence; cette remarque permet de simplifier les constructions, quand on doit déplacer la droite D de quantités angulaires données.

III^e Problème. — *Faire tourner un plan* P *d'un angle* α *autour d'un axe* A (*fig.* 6).

Supposons l'axe vertical et le plan donné par ses traces P_v, P_h.

Fig. 6.



Le sens du mouvement est indiqué par la flèche *f*.

Appliquons la construction précédente à chacune des deux traces considérées comme des droites quelconques d_1 et d_2 situées dans les plans de projection. La droite d_1 effectue sa rotation dans le plan horizontal où elle se trouve déjà; elle ne cessera donc pas d'être la trace horizontale du plan P, sa plus courte distance à l'axe est la perpendiculaire A_hM, en faisant tourner le point M de l'arc MM′ correspondant à l'angle α, et en menant par M′ la tangente d'_1 à cet axe, on aura la nouvelle trace horizontale P'_h sur laquelle le point t se sera transporté en t'. Quant à la trace verticale P_v, en la considérant comme une droite quelconque d_2 du plan vertical, ses projections sont dans le plan vertical la ligne d_2 elle-même, et dans le plan horizontal la ligne de terre; sa plus courte distance à l'axe est projetée horizontalement en vraie grandeur en A_hN_h et verticalement en un point unique N_v; dans le mouvement, le point N décrit un arc NN′ semblable à MM′ et se projette en N'_h et N'_v. La droite d_2 prend alors pour projection horizontale la tangente d'_{2h} à l'arc $N_hN'_h$ menée du point N'_h. Cette tangente doit nécessairement passer en t'. En joignant t'_v et N'_v, on aura la nouvelle projection verticale d'_{2v} de la droite d_2, et, par suite, le point θ qui fait partie de la nouvelle trace verticale P'_v; il n'y a donc plus qu'à mener la ligne $\theta p'$ pour avoir cette nouvelle trace verticale P'_v.

On doit reconnaître que les arcs $N_hN'_h$ et tt' sont semblables à l'arc MM′ et correspondent, sur le cercle de rayon A_hM, à des arcs nn', ℭℭ′ égaux à l'arc MM′, circonstance dont on devra profiter, ainsi qu'il a été dit au II^e problème, pour simplifier les constructions.

Parmi toutes les positions que le plan P peut prendre en tournant autour de l'axe A, nous remarquerons principalement les deux suivantes : 1° celle pour laquelle la trace horizontale P_h devient la parallèle P''_h à la ligne de terre, et 2° celle pour laquelle la trace horizontale P_h devient la perpendiculaire P'''_h à la ligne de terre. Dans le premier cas, le plan P est lui-même parallèle à la ligne de terre, le point t vient en t'', et la trace verticale, qui est aussi parallèle à la ligne de terre, s'obtient au moyen de la droite d^2, ainsi qu'il a été dit. Dans le second cas, le plan est perpendiculaire au plan vertical, le point t vient en t''', et la trace verticale s'en déduit toujours par les mêmes considérations.

Il est bien évident d'ailleurs que, pendant tout le mouvement, le plan P forme toujours le même angle avec le plan horizontal; on peut, comme vérification, s'en assurer en prenant dans chaque situation différente la ligne de plus grande pente, passant par le point fixe O où l'axe A perce le plan P. Ce point O s'obtient fort aisément à l'aide de l'horizontale H correspondante à la position initiale P.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé le plan P incliné d'une manière quelconque sur les plans de projection, et par conséquent rencontrant l'axe qui est toujours donné perpendiculaire à l'un d'eux. Si le plan P était parallèle à l'axe, le tracé serait tellement simple, que nous ne croyons pas devoir nous y arrêter ici.

Enfin, si au lieu de donner le plan par ses traces, on le donnait soit:

1° Par deux droites se coupant;

2° Par deux parallèles;

3° Par trois de ses points;

4° Par l'une de ses normales dont le pied dans le plan serait connu;

5° Par l'une de ses lignes de plus grande pente;

la solution serait toujours ramenée au II^e problème. D'abord cela est évident pour les deux premiers cas; quant au troisième cas, on le ferait dépendre du II^e problème, en joignant les points deux à deux, ce qui fournirait deux droites qu'on ferait tourner chacune de l'angle donné, ou bien on traiterait directement la question en déplaçant chacun des trois points de l'angle donné, au moyen du I^er problème. Le quatrième cas exigerait quelque précaution, si au lieu de faire tourner la normale et son pied de l'angle donné, on voulait lui substituer deux droites du plan passant par ce point et parallèles l'une au plan vertical, l'autre au plan horizontal; il faudrait alors se rappeler que la première de ces lignes, étant perpendiculaire à la normale comme faisant partie du plan et de plus parallèle au plan vertical, a pour projection verticale une perpendiculaire à la projection verticale de la normale et pour projection horizontale une parallèle à la ligne de terre; tandis que la deuxième, étant parallèle au plan horizontal, a pour projection horizontale une perpendiculaire à la projection horizontale de la normale et pour projection verticale une parallèle à la ligne de terre.

Ces deux lignes se nomment quelquefois les *principales* du plan.

Le cinquième cas se résout évidemment au moyen des constructions du problème III. On peut toujours faire partir la ligne de plus grande pente d'un point de l'axe de rotation et remarquer que les projections horizontales de cette ligne, avant et après le déplacement, font précisément entre elles l'angle donné α.

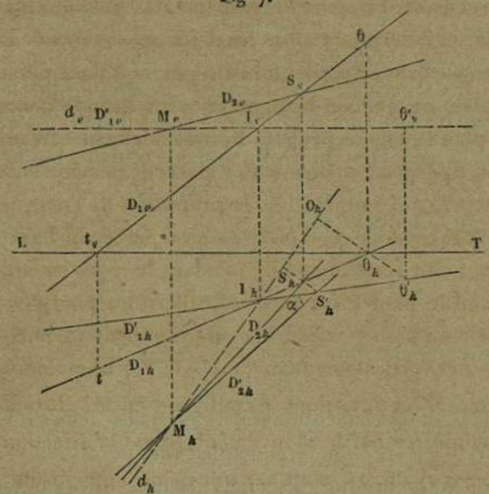
Au surplus, nous n'insistons pas sur ce cinquième cas, parce que la détermination d'un plan, au moyen de sa ligne de plus grande pente pour un point donné, rentre, à proprement parler, dans le système de projections désigné sous le titre de *Méthode des plans cotés et nivelés*, et nous renvoyons au texte de Leroy, livre IX, chapitre II de cette édition.

Les considérations précédentes, appliquées à la solution des questions contenues dans le premier livre de cet ouvrage, conduisent à des constructions beaucoup plus compliquées que celles données par l'auteur, lesquelles d'ailleurs ont été *consacrées* par l'enseignement de Monge et sont généralement adoptées. Mais si leur emploi manque de simplicité en pratique, il a, comme *exercice*, l'avantage d'habituer les commençants à *lire* facilement dans l'espace, et c'est pour ce motif, comme indication du parti qu'on peut en tirer à ce point de vue, que nous avons placé ici quelques exemples.

Ier EXEMPLE.

Mener par un point M *une droite* D_2 *qui coupe une droite* D_1 *sous un angle donné* α.

Fig 7.



Soient LT la ligne de terre, M_v, M_h les deux projections du point M, et D_{1v}, D_{1h} les deux projections de la droite D_1; menons par le point M une horizontale d du plan P, déterminé par le point et la droite D_1; faisons tourner le plan P autour de l'horizontale d comme axe, jusqu'à ce qu'il devienne parallèle au plan horizontal de projection, la droite D_1 sera emportée dans ce mouvement de rotation; prenons sa projection horizontale D'_{1h} après le mouvement et coupons-la sous l'angle α, par une droite D'_{2h} menée de M_h, cette droite D'_{2h} sera la projection horizontale de la droite D_2 après la rotation du plan P, il ne restera plus qu'à la ramener à la position qu'elle doit occuper avant le mouvement du plan.

Nous aurons d_v en menant par M_v une parallèle à la ligne de terre, qui coupera D_{1v} en I_v; d'où nous conclurons I_h et, par suite, d_h en joignant $M_h I_h$. L'horizontale d étant prise pour axe de rotation, tous les points de la droite D_1, excepté le point I qui reste immobile, décriront autour de l'axe des arcs de cercle dont les centres seront sur l'axe et dont les plans seront perpendiculaires à ce même axe; si donc nous considérons le point θ entre autres, ce point, après le mouvement, sera projeté en θ'_h, θ'_v, que l'on déterminera en abaissant de θ_h la perpendiculaire $\theta_h O_h$ sur l'axe, en cherchant la vraie grandeur de cette ligne et en la reportant de O_h en θ'. En joignant I_h et θ'_h, on obtiendra D'_{1h}; quant à la projection D'_{1v}, elle se confond évidemment avec d_v. Menons, ainsi qu'il a été dit, la droite D'_{2h} par le point M_h en coupant D'_h sous l'angle α, et il ne nous restera plus qu'à replacer D_- dans sa vraie position D_2, ce qui se fera aisément d'après les explications précédentes : pour cela on ramènera le point S'_h, sommet de l'angle, dans la position S_v, S_h, et en joignant M et S, on obtiendra enfin la droite D_2.

IIe EXEMPLE.

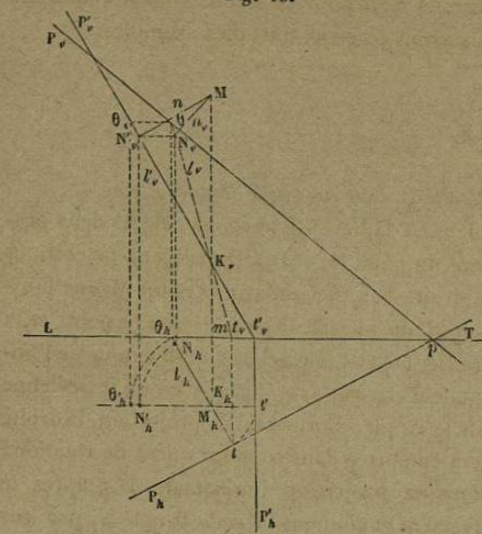
Déterminer la plus courte distance d'un point M *à une droite* D.

La construction étant celle de l'exemple précédent, en y remplaçant l'angle α par un angle de 90 degrés, nous ne la reprendrons pas.

IIIe EXEMPLE.

Déterminer la plus courte distance d'un point M *à un plan* P.

Fig. 10.



Soient LT la ligne de terre, $M_v M_h$ les projection n du point M, et $P_v P_h$ les traces du plan P; faisons tourner le plan P autour de la projetante horizontale du point M, prise pour axe, jusqu'à ce que ce plan devienne perpendiculaire au plan vertical; à cet instant la normale au plan sera parallèle au plan vertical de projection, et, par conséquent, se projettera en vraie grandeur sur ce plan. Nous pourrons ensuite ramener le système à sa position initiale, et déterminer alors les deux projections de la normale dans cette position. Du point où l'axe perce le plan on abaisse la ligne de plus grande pente du plan P, elle se projette horizontalement suivant $\theta_h M_h t$ perpendiculaire à P_h, et verticalement suivant θt_v qui coupe en K_v la projection de l'axe; le point K est donc celui où le plan est percé par l'axe, et ce point reste immobile pendant le mouvement.

Quand le plan P est perpendiculaire au plan vertical, cette ligne de plus grande pente l devient parallèle au plan vertical; elle se projette alors horizontalement suivant $\theta'_h M_h t'$ parallèle à la ligne de terre, et verticalement suivant $t'_v K_v \theta'_v$; les points t et θ_h décrivent dans le plan horizontal les arcs semblables tt' et $\theta_h \theta'_h$ dont le centre est en M_h et dont les projections verticales sont $t_v t'_v$ et $\theta\theta'_v$; la trace P_h, emportée par le mouvement, prend la direction $P'_h t' t'_v$ perpendiculaire à la ligne de terre; les trois points t'_v, K_v, θ'_v sont sur une même ligne droite, qui est à la fois la nouvelle trace verticale P'_v et la nouvelle projection verticale l'_v de la ligne l; la normale n au plan est donc, suivant ce qui a été dit en commençant, représentée en vraie grandeur par $M_v N'_v$ perpendiculaire à l'_v, son pied est projeté en $N'_v N'_h$, et si l'on ramène le tout à la position initiale, on a définitivement $M_v N_v$, $M_h N_h$ pour projections de la normale n, et N_v, N_h pour projections de son pied dans le plan.

Nous proposerons sur ce même exemple deux cas particuliers : 1° celui où le plan P est parallèle à la ligne de terre; 2° celui où les deux traces P_v et P_h du plan P sont en prolongement l'une de l'autre. Nous avons indiqué les constructions sans reprendre l'explication.

On sait que les traces d'un plan sont en prolongement l'une de l'autre quand le plan passe par P, une perpendiculaire à la ligne de terre élevée dans le plan bissecteur de l'un ou de l'autre des dièdres $\widehat{SA}$ ou $\widehat{IP}$ supérieur formés par les plans de projection antérieur ou inférieur postérieur, et réciproquement.

On doit remarquer ce fait important : *dans les trois figures relatives à ce problème* les traces du plan et les projections de la normale, situées sur le même plan de projection, sont perpendiculaires entre elles, ce qui est la conséquence de ce principe : Quand deux droites sont perpendiculaires entre elles dans l'espace, si l'une d'elles est parallèle à l'un des plans de projection, les projections des deux droites sur ce même plan sont *perpendiculaires* entre elles.

On tire un parti tellement avantageux de ce principe pour la recherche de la plus courte distance d'un point à une droite ou à un plan, que nous croyons devoir indiquer ici cette application, quoiqu'elle soit étrangère aux mouvements de rotation dont l'emploi présente, dans le cas actuel, ainsi qu'on a pu le reconnaître, une complication au moins inutile pour la pratique.

Fig. 11.

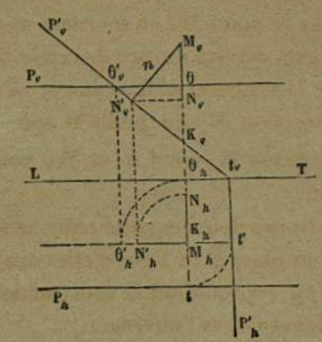
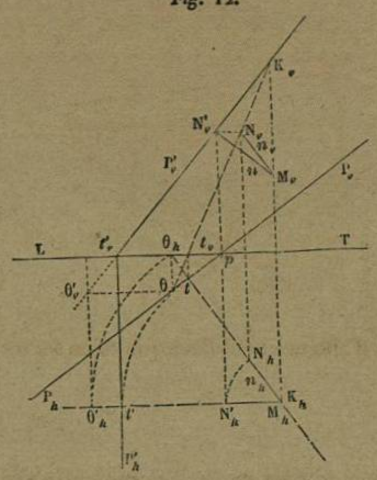
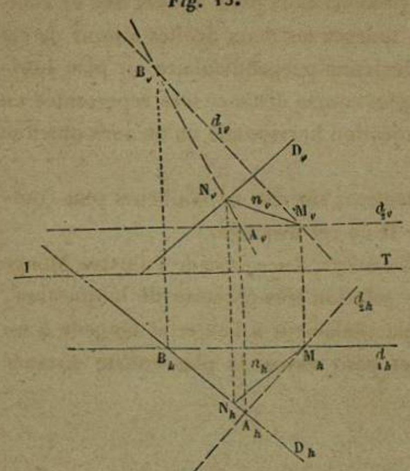


Fig. 12.



Soient M_v, M_h, D_v, D_h les projections du point M et de la droite D; désignons par d_1 et d_2 les deux *principales* (1) d'un plan P passant par le point M et perpendiculaire à la droite D. Supposons que la ligne d_1 soit la principale parallèle au plan vertical, elle aura (en vertu du principe énoncé ci-dessus) pour projection verticale une droite d_{1v}, perpendiculaire à D_v; la projection horizontale sera d'ailleurs une parallèle d_{1h} à la ligne de terre; la ligne d_2, qui est, par suite, la principale parallèle au plan horizontal aura (toujours conséquemment au principe) pour projection horizontale une droite d_{2h} perpendiculaire à D_h et pour projection verticale une parallèle d_{2v} à la ligne de terre. En coupant ces deux droites en A et B par le plan projetant horizontal de D, on détermine une droite AB qui est située dans le plan P et qui coupe la droite D au point N; en joignant M, N, on obtient la plus courte distance demandée *n*.

Fig. 13.



IV^e EXEMPLE.

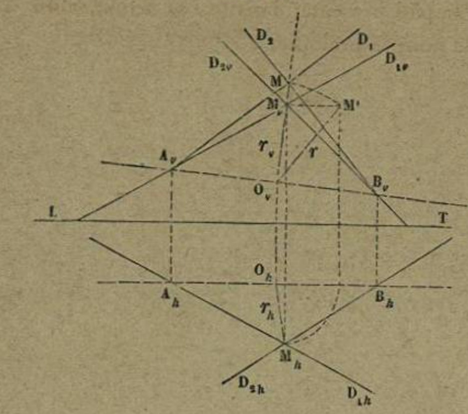
Déterminer l'angle de deux droites D_1 et D_2 se coupant en un point M.

Soient D_{1h}, D_{1v}, D_{2h}, D_{2v}, M_h, M_v les projections des données, faisons tourner le plan déterminé

(1) Nous avons déjà dit que nous entendions par *principales* d'un plan P pour un point M, les droites menées par le point M dans le plan P, parallèlement aux deux plans de projection.

par les deux droites jusqu'à ce qu'il devienne parallèle à l'un des plans de projection, au plan vertical, par exemple, et l'angle demandé se projettera verticalement en vraie grandeur.

Fig. 14.



Nous prendrons pour axe de rotation la principale AB, parallèle au plan vertical, sa projection horizontale sera A_hB_h, parallèle à la ligne de terre, et nous en déduirons A_vB_v; le point M, en tournant avec le plan autour de cet axe, décrira un arc de cercle dont nous savons trouver le centre O et le rayon *r*, ce qui nous fournira la projection M'_v du point M après le mouvement, en joignant M'_v avec A_v et B_v, nous aurons l'angle demandé.

Si les deux droites données ne se rencontraient pas, on mènerait d'un point M de l'une d'elles une parallèle à l'autre, et l'on reproduirait la construction précédente, qui d'ailleurs ne diffère que dans les termes de celle donnée dans l'ouvrage.

V^e EXEMPLE.

Déterminer la plus courte distance entre deux droites non situées dans le même plan.

Soient D_1 et D_2 les droites données, on prendra sur D_1, un point M à volonté, on abaissera la projetante horizontale de ce point, et l'on fera tourner les droites D_1 et D_2 autour de cette ligne jusqu'à ce que la première devienne parallèle au plan vertical; prenant alors pour nouvel axe de rotation la projetante verticale du point M, on fera de nouveau tourner les deux droites autour de cet axe, jusqu'à ce que D_1, qui était parallèle au plan vertical, devienne perpendiculaire au plan horizontal. Dans cette dernière position des deux droites, leur plus courte distance sera représentée en vraie grandeur par la perpendiculaire abaissée de M_h sur la projection horizontale qu'on aura obtenue pour la droite D_2, après le double mouvement de rotation.

Nous avons donné cette construction comme exercice seulement; car elle est d'ailleurs plus compliquée dans l'exécution que celle indiquée livre I^er, chapitre II de cet ouvrage.

On peut consulter encore pour ce problème le *Traité de Géométrie descriptive* de l'illustre Monge (Paris, Klostermann fils, 1811), page 43, on y trouvera une solution très-élégante de la question, fondée sur l'emploi d'un plan mené par l'une des droites parallèlement à l'autre et tangent à un cylindre de révolution qui a pour axe cette autre droite et pour rayon la plus courte distance cherchée.

FIN.