CONTRERAS

TRIGONOMETRIA

TRATADO

DE

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA Y ESFÉRICA

ADOPTADO COMO TEXTO EN LA

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

Y ESCRITO POR

MANUEL MARÍA CONTRERAS,

Profesor de Matemáticas en dicho Establecimiento
y en la Escuela Normal, Ingeniero de Minas, Ensayador y Beneficiador de Metales, etc.

Tercera edicion revisada y corregida.

MÉXICO.

IMPRENTA DE J. F. JENS, CALLE DE SAN JOSÉ EL REAL NUMERO 22.

1888

OPINIONES publicadas sobre las Matemáticas del Ingeniero Manuel María Contreras.

Los que suscribimos certificamos:

1° Que el profesor D. Manuel María Contreras escribió su tratado de matemáticas por encargo del director de la Escuela Nacional Preparatoria, con el objeto de satisfacer debidamente el programa del actual plan de estudios.

2° Que el original de su aritmética fué examinado por los CC. profesores Gabino Barreda, Francisco Diaz Covarrubias, Rafael A. de la Peña é Ignacio Ortiz de Zárate; que el de su álgebra, lo fué por los profesores Manuel Fernandez Leal y Luis del Castillo, y que los de su geometría y trigonometría lo fueron por los profesores Manuel Ramirez y Francisco Echeagaray, quienes unánimemente los consideraron buenos y adecuados á la enseñanza.

3° Que la junta general de catedráticos de dicha Escuela, ha ratificado esa calificacion y los ha aceptado como obras de texto.

4° Que las modificaciones que la experiencia ha indicado y hemos propuesto al autor, las ha adoptado, y que seguirá haciendo algunas otras en las posteriores ediciones, con el fin de ir sucesivamente facilitando y mejorando la enseñanza de los alumnos, y

5° Que con el uso de los mencionados tratados de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría, hemos obtenido durante varios años, muy buenos resultados en la instruccion de nuestros discípulos, tanto en las clases del gobierno como en las particulares.

México, Octubre 16 de 1878.—*M. Fernandez.—M. Ramirez.—M. Calderon.—A. Barroso.—F. Echeagaray.—J. Vallarino.—Rafael Barba.—M. Villamil.—Rafael Angel de la Peña.—Emilio G. Baz.—Luis del Castillo y Pacheco.—Ignacio Ortiz de Zárate.*

Del anterior documento resulta, pues, que las obras de matemáticas del Sr. Contreras, no solo fueron examinadas y declaradas buenas por personas competentes, sino que con el uso de ellas durante algunos años se han obtenido buenos resultados en la enseñanza.

Suplicamos á nuestros colegas, se sirvan reproducir el anterior certificado, en honor de una persona que, como el Sr. Contreras, coopera con empeño á la instruccion de la juventud.

(Diario Oficial, Octubre 26 de 1878).

Señores redactores de *La Libertad*.

Agradecerémos mucho á vdes. se sirvan publicar en su acreditado diario el certificado siguiente:

Los que suscriben, antiguos profesores de la Escuela Nacional de Agricultura y Veterinaria, certifican: que durante los años de 1875 y 1876, han dado la clase de primer curso de matemáticas siguiendo como obra de texto la del Sr. Ingeniero Manuel María Contreras, con notorio aprovechamiento de los alumnos, como consta por las calificaciones que obran en los libros respectivos de exámen. Como constancia extendemos el presente en México á 21 de Octubre de 1878.—*Manuel Cordero.—José C. Segura.—Vicente U. Alcaráz.*

Señores redactores de *La Libertad*.

Suplicamos encarecidamente á vdes. se sirvan insertar en su ilustrado diario el certificado adjunto:

Como directores de establecimientos de instruccion primaria y preparatoria en esta capital, certificamos: que en nuestros respectivos colegios y durante varios años se han adoptado como obras de texto para la enseñanza de matemáticas los tratados de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría escritos por el ingeniero Manuel María Contreras, y que con ellos se han obtenido buenos resultados en la instruccion y aprovechamiento de los discípulos.

México, Octubre 18 de 1878.—*Adrian Fournier*, director del Licéo Franco-Mexicano.—*Ricardo Rode*, socio director del Rode's English Boarding School.—*Emilio Kalthain.—A. Bracho.—Emilio G. Baz*, director del instituto Anglo-Franco-Mexicano.—*M. Soriano.—José Saturnino Yarza*, director del colegio Hispano-Mexicano.

(La Libertad, Octubre 22 y 31 de 1878).

TRIGONOMETRIA RECTILINEA.

INTRODUCCION.

723.—Al ocuparnos en geometría de los triángulos, hemos visto que, por regla general, cuando se conocen tres de los elementos de un triángulo, pueden determinarse gráficamente los demás, y con ese motivo explicamos en qué casos la cuestion admite una ó varias resoluciones y cuándo es indeterminada. El objeto definitivo de la trigonometría rectilínea, es resolver analítica y numéricamente los mismos problemas y ademas determinar la superficie de un triángulo cuando se tienen los datos suficientes.

El procedimiento usado en trigonometría, tiene una gran superioridad sobre el que explicamos en geometría, por el empleo del análisis para el estudio y fundamento de las cuestiones, y porque resolviendo éstas aritméticamente, se puede alcanzar un grado de aproximacion mucho mayor que al hacerlo gráficamente.

Para resolver de un modo general el problema de que se ocupa la trigonometría, en el que comunmente hay tres incógnitas, se necesita conocer las relaciones que existen entre los lados, los ángulos y la superficie de un triángulo para establecer tres ecuaciones con cantidades diferentes en las que entren las incógnitas, y ademas se presten á una solucion aritmética fácil. De aquí nace naturalmente, la necesidad de estudiar á fondo las diversas relaciones que existen entre los elementos personas competentes, sino que con el uso de ellas durante algunos años se han obtenido buenos resultados en la enseñanza.

Suplicamos á nuestros colegas, se sirvan reproducir el anterior certificado, en honor de una persona que, como el Sr. Contreras, coopera con empeño á la instruccion de la juventud.

(Diario Oficial, Octubre 26 de 1878).

Señores redactores de *La Libertad.*

Agradecerémos mucho á vdes. se sirvan publicar en su acreditado diario el certificado siguiente:

Los que suscriben, antiguos profesores de la Escuela Nacional de Agricultura y Veterinaria, certifican: que durante los años de 1875 y 1876, han dado la clase de primer curso de matemáticas siguiendo como obra de texto la del Sr. Ingeniero Manuel María Contreras, con notorio aprovechamiento de los alumnos, como consta por las calificaciones que obran en los libros respectivos de exámen. Como constancia extendemos el presente en México á 21 de Octubre de 1878.—*Manuel Cordero.—José C. Segura.—Vicente U. Alcaráz.*

Señores redactores de *La Libertad.*

Suplicamos encarecidamente á vdes. se sirvan insertar en su ilustrado diario el certificado adjunto:

Como directores de establecimientos de instruccion primaria y preparatoria en esta capital, certificamos: que en nuestros respectivos colegios y durante varios años se han adoptado como obras de texto para la enseñanza de matemáticas los tratados de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría escritos por el ingeniero Manuel María Contreras, y que con ellos se han obtenido buenos resultados en la instruccion y aprovechamiento de los discípulos.

México, Octubre 18 de 1878.—*Adrian Fournier*, director del Liceo Franco-Mexicano.—*Ricardo Rode*, socio director del Rode's English Boarding School.—*Emilio Kalthain.—A. Bracho.—Emilio G. Baz*, director del instituto Anglo-Franco-Mexicano.—*M. Soriano.—José Saturnino Yarza*, director del colegio Hispano-Mexicano.

(La Libertad, Octubre 22 y 31 de 1878).

TRIGONOMETRIA RECTILINEA.

INTRODUCCION.

723.—Al ocuparnos en geometría de los triángulos, hemos visto que, por regla general, cuando se conocen tres de los elementos de un triángulo, pueden determinarse gráficamente los demás, y con ese motivo explicamos en qué casos la cuestion admite una ó varias resoluciones y cuándo es indeterminada. El objeto definitivo de la trigonometría rectilínea, es resolver analítica y numéricamente los mismos problemas y ademas determinar la superficie de un triángulo cuando se tienen los datos suficientes.

El procedimiento usado en trigonometría, tiene una gran superioridad sobre el que explicamos en geometría, por el empleo del análisis para el estudio y fundamento de las cuestiones, y porque resolviendo éstas aritméticamente, se puede alcanzar un grado de aproximacion mucho mayor que al hacerlo gráficamente.

Para resolver de un modo general el problema de que se ocupa la trigonometría, en el que comunmente hay tres incógnitas, se necesita conocer las relaciones que existen entre los lados, los ángulos y la superficie de un triángulo para establecer tres ecuaciones con cantidades diferentes en las que entren las incógnitas, y ademas se presten á una solucion aritmética fácil. De aquí nace naturalmente, la necesidad de estudiar á fondo las diversas relaciones que existen entre los elementos de un triángulo cualquiera, y buscar el mejor modo de hacer entrar en los cálculos los ángulos.

En geometría hemos visto que á los ángulos se sustituyen los arcos del círculo que les son proporcionales; y en trigonometría, con la mira de facilitar las especulaciones, los arcos están representados por varias líneas rectas que con ellos tienen relaciones constantes, y las cuales se llaman líneas trigonométricas. De este modo, á la comparacion de los ángulos, se sustituye la de líneas rectas. Para comprender que este método es posible, basta reflexionar en que la magnitud de una cuerda, fija completamente el valor de un arco en un círculo dado. Ademas de la cuerda, hay otras líneas trigonométricas llamadas seno, tangente, etc., que pronto daremos á conocer; pero todas ellas, lo mismo que la cuerda, tienen una relacion fija con el arco, de modo que éste ó el ángulo pueden determinarse por una línea trigonométrica y recíprocamente. El método que hemos explicado para determinar la relacion del diámetro á la circunferencia, inscribiendo á ésta sucesivamente polígonos regulares de 4, 8, 16, etc. lados, y determinando el valor numérico de éstos, da una idea de la posibilidad de construir una tabla en la que se tenga la correspondencia entre los ángulos y las magnitudes de las cuerdas, y cuya tabla podría servir para pasar de los ángulos á sus cuerdas y recíprocamente. Si por otra parte se conocen las relaciones que ligan los lados y los ángulos de un triángulo, fácilmente se concibe que pueden llegarse á determinar en él, los lados por las cuerdas de sus ángulos y recíprocamente. Lo que decimos de la cuerda, es aplicable á las demas líneas trigonométricas que vienen á ser *magnitudes auxiliares*, para resolver el problema general de determinar unos por otros los elementos de un triángulo. Como acabamos de indicarlo, con el intermedio de las líneas trigonométricas, el problema se divide en dos partes distintas; una, que es la construccion de las tablas que expresan la correspondencia entre los valores de los arcos y sus líneas trigonométricas, puede hacerse préviamente una vez para siempre á fin de obtener el ángulo por la línea trigonométrica; y la otra, que lleva por mira determinar los elementos de un triángulo dado por medio de las relaciones que los ligan con las líneas trigonométricas de sus ángulos, hay necesidad de ejecutarla aritméticamente en cada caso práctico, pero con suma facilidad despues de construida la tabla de las líneas trigonométricas. Este procedimiento es análogo al de los logaritmos, en el que una vez para todas, se ha calculado una tabla representando los números en ella contenidos, por las diversas potencias de un número constante, y despues un problema numérico se resuelve ejecutando operaciones correlativas, pero mucho más sencillas con los logaritmos

préviamente calculados, y los cuales solo han servido de intermedio entre los datos y el resultado final del problema. El uso de las tablas de las líneas trigonométricas tiene, ademas, la ventaja de conducir desde luego á un valor numérico: objeto definitivo de las investigaciones trigonométricas.

Como en algunos casos, una línea trigonométrica es poco á propósito para representar un ángulo con la suficiente exactitud, hay necesidad de servirse de varias líneas trigonométricas; y como muchas veces hay ventaja en reemplazar las relaciones de unas líneas por las que existen entre otras, conviene en el estudio de la trigonometría, aumentar las líneas trigonométricas y dar un gran desarrollo á las investigaciones de las relaciones que existen entre las diversas líneas trigonométricas y sus más simples funciones, tanto por ser esto de notoria utilidad para poder resolver fácilmente las cuestiones en que entran magnitudes angulares y determinar los elementos desconocidos de un triángulo, como porque sirve de base á multitud de especulaciones teóricas y prácticas en las otras partes de las matemáticas.

Resulta, pues, que la trigonometría tiene que estudiar las relaciones geométricas que existen entre los lados y los ángulos de un triángulo, conocer las diferentes líneas rectas que pueden reemplazar á los ángulos y servir para fijar su magnitud, establecer el número necesario de líneas trigonométricas, conocer las relaciones que existen entre unas y otras, y construir tablas que fácilmente den los valores de los ángulos conociendo los de sus líneas trigonométricas y viceversa; teniendo la trigonometría por objeto definitivo la resolucion de los problemas en que entran magnitudes angulares y la determinacion de los elementos de un triángulo.

La resolucion de un triángulo y el conocimiento de las fórmulas trigonométricas, es de la mayor importancia en matemáticas, tanto por su inmediata aplicacion á los triángulos, cuanto porque pudiendo descomponerse un polígono cualquiera en triángulos, resulta que las cuestiones de poligonometría se reducen á problemas de trigonometría.

Creemos que lo expuesto es bastante para hacer comprender la siguiente definicion:

724.—*La trigonometría tiene por objeto resolver los problemas relativos á las magnitudes angulares, y determinar los elementos desconocidos de un triángulo.*

En un triángulo consideramos sus lados, sus ángulos y su superficie.

Resolver un triángulo es calcular los valores numéricos de sus elementos desconocidos, cuándo para esto tenemos los datos suficientes.

El problema de que casi siempre se ocupa la trigonometría, es: conocidos tres de los elementos de un triángulo, determinar los demás.

725.—Teniendo que figurar en nuestros cálculos los ángulos cuyos valores son proporcionales á los arcos, y debiendo reemplazarse para facilitar las investigaciones, los arcos por otras magnitudes auxiliares, llamadas líneas trigonométricas, que tienen relaciones fijas con los arcos y los ángulos, ántes de ocuparnos especialmente de las líneas trigonométricas daremos, en general, una idea de las funciones circulares.

Se llama funcion, toda expresion analítica que contiene dos cantidades variables, en la que el valor de una de ellas depende del que se asigne á la otra. Por ejemplo: la superficie del círculo es una funcion del radio; porque como hemos visto, estando representada la superficie del círculo por la expresion analítica

$$s = \pi r^2$$

á cada valor que tenga ó le demos al radio r, corresponderá otro determinado para la superficie s y recíprocamente. Son pues r y s cantidades variables, pero cuyos valores cambian correlativamente segun una ley cifrada en la fórmula $s = \pi r^2$

726.—Líneas negativas y positivas.—Hemos dejado indicado (268) que los signos + y — tienen la notable propiedad de indicar analíticamente la oposicion de sentido de que son susceptibles ciertas cantidades. Si sobre una línea recta ó curva F C (Fig. 345) consideramos como positivas las medidas tomadas arriba de A en la direccion indicada por la flecha, las medidas en sentido contrario se considerarán como negativas. Las magnitudes AB, y BC de 3 y de 7 milímetros, irán precedidas del signo +, y las AD, DE y EF respectivamente iguales á 5, 2 y 4 milímetros, estarán marcadas con el signo —. Si suponemos un móvil que partiendo del punto A subió 6 mm., en seguida bajó 10, luego subió 8, y por último bajó 7 mm., su distancia al punto de partida estará expresada por la ecuacion:

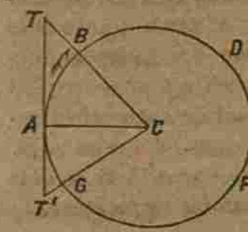
(Fig. 345)

$$x = +6 - 10 + 8 - 7$$
$$x = -3$$

6

lo que quiere decir que el móvil quedaba 3 mm. abajo de A por estar

el resultado precedido del signo —. Igualmente, si convenimos en considerar como positivas las distancias medidas á la derecha de un plano ó de una recta, serán negativas las medidas en direccion opuesta. Es de notar que el sentido en que se estimen los signos de las cantidades es enteramente arbitrario, pudiendo haberse considerado en el caso de nuestra figura como positivas las distancias tomadas abajo de A, en direccion contraria de la indicada por la flecha; pero entónces serían negativas las medidas hechas hácia arriba.



(Fig. 346)

En el círculo de la figura 346, si tomamos el punto A como orígen de las medidas hechas sobre la circunferencia y consideramos como positivos los arcos medidos en el sentido en que se mueven las manos de un reloj de A hácia B, D, F, G indicado por la flecha, será necesario reputar como negativos y preceder del signo — á los arcos, como AG, AGF tomados en direccion opuesta. En la misma figura, si convenimos en considerar como positiva la tangente AT tomada arriba de A, estimaremos como negativa la tangente A T' que se mide para abajo de A.

Líneas trigonométricas.

727. *Se llaman líneas trigonométricas á las rectas que tienen una dependencia constante con el arco, de tal manera, que conociendo una cualquiera de ellas, se puede determinar el arco á que corresponde y recíprocamente.*

(Fig. 347)

Por ejemplo: dado el arco A B, (fig. 347) la recta B D bajada desde uno de sus extremos B perpendicular al radio C A que pasa por el otro extremo A, es una línea trigonométrica que se llama *seno* del arco A B ó del ángulo B C A. Como al arco A B no puede corresponder mas que un solo *seno* B D, en el círculo cuyo radio es A C, resulta que hay una relacion fija entre la magnitud del arco y la de su seno. Si conocido el seno B D, quisiéramos gráficamente determinar la magnitud de su arco, en el punto C levantaríamos una perpendicular E C igual al seno dado B D, y tirando por su extremo E una paralela á A C su interseccion

2

con la circunferencia determinaría el otro extremo del arco A B que tiene por seno á B D.

(Fig. 348)

728.—Diversas líneas trigonométricas.—Considerando el arco A B (fig. 348) acabamos de ver que la recta B D es su *seno*. *Tangente es la perpendicular* AT *levantada por uno de los extremos del arco, al radio que termina en este punto* A *hasta que encuentra al radio* C B *prolongado que pasa por el otro extremo*. Si por el punto B se tira la tangente B S, la parte S C comprendida entre el extremo S de la tangente y el centro del círculo se llama *secante*.* La recta A D, comprendida entre el extremo A del arco y el pié D del seno, se llama *seno verso* del arco A B. En resúmen, *las líneas trigonométricas directas* del arco A B con las abreviaturas con que comunmente se les indica, son las siguientes:

B D=sen. A B
A T=tang. A B
S C=sec. A B
A D=sen. ver. A B

El complemento del arco A B es B E y conforme á las definiciones anteriores B D'=D C será el seno del arco B E, E T' será su tangente, S' C su secante, y E D' su seno verso; pero al seno del complemento de un arco se le llama *coseno*, á la tangente del complemento *cotangente*, á la secante del complemento *cosecante*, y al seno verso del complemento *coseno verso*; por lo cual *las líneas trigonométricas indirectas* del arco A B con las abreviaturas usadas, serán las siguientes:

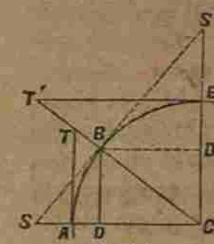
D C =cos. A B
E T'=cot. A B
S' C =cosec. A B
E D'=cos. ver. A B.

729.—Fórmulas fundamentales.—Vamos á determinar las relaciones que existen entre las diversas líneas trigonométricas de un mismo ángulo y el radio del círculo, que generalmente se toma igual á la unidad con el fin de simplificar las fórmulas.

Considerando el triángulo rectángulo B D C, (fig. 348) y en virtud

* Varios autores toman como secante la recta C T que es igual á S C por ser iguales los triángulos rectángulos S B C y T A C; no haciéndolo nosotros para evitar los inconvenientes que tal sistema presenta para fijar el signo de la secante.

de que el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos, se tiene:



(Fig. 348)

$$\text{B C}^2=\text{B D}^2+\text{D C}^2$$

sustituyendo los valores de esas rectas, representando por r el radio del círculo, y llamando a el arco A B, resulta:

$$r^2=\text{sen}^2a+\cos^2a$$

Considerando el triángulo rectángulo S B C, se tiene:

$$\text{S C}^2=\text{B C}^2+\text{B S}^2$$

sustituyendo los valores de estas rectas y atendiendo á que por la igualdad de los triángulos S B C y T A C (384) B S=A T=tang.a, resulta:

$$\sec^2a=r^2+\text{tang}^2a$$

Considerando el triángulo rectángulo S' B C, se tiene:

$$\text{S' C}^2=\text{C B}^2+\text{B S'}^2$$

Atendiendo á que por la igualdad de los triángulos S' B C y T' E C (384) B S'=E T'=cot a, y sustituyendo los valores de las otras rectas resulta:

$$\text{cosec}^2a=r^2+\cot^2a.$$

Siendo B D paralela á T A, el triángulo B D C será semejante á T A C (514) y á su igual S B C. Comparando los lados homólogos de los dos primeros triángulos, se tiene:

$$\text{A T} : \text{A C} :: \text{B D} : \text{D C}$$

sustituyendo $\quad \text{tang.a} : r :: \text{sen.a} : \text{cos.a}$

luego $\quad \text{tang.a}=\dfrac{r.\text{sen.a}}{\text{cos.a}}$

Comparando los lados homólogos de los triángulos S B C y B D C, se tiene:

$$\text{S C} : \text{B C} :: \text{B C} : \text{D C}$$

sustituyendo $\quad \text{sec.a} : r :: r : \text{cos.a}$

de donde $\quad \text{sec.a}=\dfrac{r^2}{\text{cos.a}}$

Comparando los lados homólogos de los triángulos B D C y S' B C, que son semejantes por ser rectángulos y tener el ángulo $S'=B\ C\ D$ como complementos ambos del mismo ángulo B C S', se tiene:

(Fig. 348)

$$S'\,C : \hat{B}\,C :: B\,C : B\,D$$

sustituyendo $\quad \text{cosec.a} : r :: r : \text{sen.a}$

luego $\quad \text{cosec.a} = \dfrac{r^2}{\text{sen.a}}$

Comparando los lados homólogos de los triángulos semejantes B D C y T' E C, se tiene:

$$T'\,E : E\,C :: D\,C : B\,D$$

sustituyendo $\quad \text{cot.a} : r :: \text{cos.a} : \text{sen.a}$

luego $\quad \text{cot.a} = \dfrac{r.\text{cos.a}}{\text{sen. a}}$

Por último, comparando los lados homólogos de los triángulos semejantes T' E C y T A C, se tiene:

$$T'\,E : E\,C :: A\,C : A\,T$$

sustituyendo $\quad \text{cot.a} : r :: r : \text{tang.a}$

luego $\quad \text{cot.a} = \dfrac{r^2}{\text{tang.a}}$

Como se habrá observado, para sacar las cinco últimas fórmulas, se ha comparado el triángulo de que forma parte la línea trigonométrica cuyo valor se busca, con el triángulo B D C en que entran el seno y coseno, excepto en el último caso que el triángulo de que forma parte la cotangente se comparó con aquel en que entra la tangente. Ademas, la primera razon la hemos formado siempre con la línea trigonométrica cuyo valor buscamos y el radio. La segunda razon, naturalmente quedará determinada por los lados homólogos.

Para determinar el seno verso, basta observar, que

$$A\,D = A\,C - D\,C$$

sustituyendo $\quad \text{sen.ver.a} = r - \text{cos.a}$

Para determinar el coseno verso, observaremos, que

$$E\,D' = E\,C - C\,D'$$

y como $C\,D' = B\,D$ sustituyendo, resulta:

$$\text{cos.ver.a} = r - \text{sen.a}$$

Para mejor fijar en la memoria de los alumnos las anteriores fórmulas, que son de muy frecuente uso, las pondremos á continuacion:

$$r^2 = \text{sen}^2\text{a} + \text{cos}^2\text{a}$$

$$\text{sec}^2\text{a} = r^2 + \text{tang}^2\text{a}$$

$$\text{cosec}^2\text{a} = r^2 + \text{cot}^2\text{a}$$

$$\text{tang.a} = \frac{r.\text{sen.a}}{\text{cos.a}}$$

$$\text{sec.a} = \frac{r^2}{\text{cos.a}}$$

$$\text{cosec.a} = \frac{r^2}{\text{sen.a}}$$

$$\text{cot.a} = \frac{r.\,\text{cos.a}}{\text{sen.a}}$$

$$\text{cot.a} = \frac{r^2}{\text{tang.a}}$$

de esta se deduce: $\quad \text{tang.a} = \dfrac{r^2}{\text{cot.a}}$

$$\text{sen.ver.a} = r - \text{cos.a}$$

$$\text{cos.ver.a} = r - \text{sen.a}$$

Hemos dicho que generalmente y con el fin de simplificar las fórmulas, se hace el radio del círculo al cual se refieren las líneas trigonométricas igual á la unidad. Si en las fórmulas anteriores introducimos la condicion de

$$r = 1$$

se trasformarán en las siguientes, que son las que más á menudo se usan:

$$1 = \text{sen}^2\text{a} + \text{cos}^2\text{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{sec}^2\text{a} = 1 + \text{tang}^2\text{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{cosec}^2\text{a} = 1 + \text{cot}^2\text{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\text{tang.a} = \frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\text{sec.a}=\frac{1}{\text{cos.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$\text{cosec.a}=\frac{1}{\text{sen.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$\text{cot.a}=\frac{\text{cos.a}}{\text{sen.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

$$\text{cot.a}=\frac{1}{\text{tang.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

$$\text{tang.a}=\frac{1}{\text{cot.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

$$\text{sen.ver.a}=1-\text{cos.a}\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

$$\text{cos.ver.a}=1-\text{sen.a}\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

730.—NOCIONES SOBRE LA HOMOGENEIDAD.—En álgebra (241) explicamos lo que se entiende por grado de un término, y por expresiones homogéneas: ahora haremos notar, que al tratar algebráicamente una cuestion de geometría, cada literal, por regla general, representa una línea: de modo que *a* no puede introducirse en los cálculos, si no es refiriendo la magnitud de la línea que representa á la de otra que implícitamente se ha tomado por unidad, como el metro, la pulgada, etc., ó á la de otra línea *b* conocida. En el primer caso, *a* representa un número concreto de metros, pulgadas, etc.; y en el segundo, $\frac{a}{b}$ será un número abstracto, al cual se podrá sustituir la relacion de otras magnitudes *c*, y *d* á condicion de que se tenga la ecuacion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

No entrando en los cálculos sino expresiones homogéneas, como todas las operaciones y combinaciones que por las reglas del cálculo se ejecuten con ellas, como reduccion á un comun denominador, adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion á la misma potencia y extraccion de raíz del mismo grado, conducen á un resultado homogéneo; resulta que cuando no se ha tomado como unidad una de las líneas que entran en la cuestion, y cada una de ellas se representa por una literal, todas las expresiones del cálculo, sea en su orígen al establecer las ecuaciones fundamentales, sea en las intermedias ó en las definitivas, tendrán que ser homogéneas.

Para plantear un problema valiéndonos de las relaciones geométricas que forman parte del enunciado, no podemos hacerlo sino de dos maneras: estableciendo proporciones, ó ecuaciones. En el primer caso, siendo homogéneos los términos de las respectivas razones, lo serán los miembros de las ecuaciones que de ellas resulten, sea dividiendo cada antecedente por su consecuente, ó formando é igualando los productos de extremos y medios. Si se forma una ecuacion, habrá que expresar la igualdad de extensiones lineales por medio de términos de una dimension, ó la equivalencia de valores superficiales de dos dimensiones como x^2, ab, ó de volúmen indicados por términos de tres dimensiones como r^3, abc.

Estando las ecuaciones fundamentales de un problema formadas de términos homogéneos, como todas las operaciones que con ellos se hagan, tienen que ser iguales para que no se altere la ecuacion, se infiere que cuando se ha representado por una letra cada una de las líneas que entran en un problema, las expresiones todas del cálculo serán homogéneas.

Al contrario, cuando por simplificar los cálculos y las fórmulas finales, alguna de las líneas que forman parte de la cuestion, se ha tomado por unidad, el resultado podrá dejar de ser homogéneo, en razon de que siendo las diversas potencias de 1 iguales á 1, el *grado* de cada uno de los términos en que entra esta línea puede resultar disminuido una ó varias unidades.

Por ejemplo: en las fórmulas todas que hemos sacado representando el radio por r, y las demás líneas de la figura por sus respectivas anotaciones, sea fundándonos en que el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos, que es una expresion de equivalencia de superficies, ó en la comparacion de triángulos semejantes, hemos obtenido resultados homogéneos, tales como

$$r^2=\text{sen}^2\text{a}+\text{cos}^2\text{a}$$

$$\text{sec}^2\text{a}=r^2+\text{tang}^2\text{a}$$

$$\text{tang.a}=\frac{r.\text{sen.a}}{\text{cos.a}}$$

$$\text{cot.a}=\frac{r^2}{\text{tang.a}}$$

pero cuando hemos tomado el radio del círculo igual á la unidad, estas mismas fórmulas se han trasformado en

$$1=\text{sen}^2a+\cos^2a$$

$$\sec^2a=1+\text{tang}^2a$$

$$\text{tang}.a=\frac{\text{sen}.a}{\cos.a}$$

$$\cot.a=\frac{1}{\text{tang}.a}$$

cuyas expresiones no son ya homogéneas.

Sin embargo, como en este último caso se sabe cuál es la línea del problema que se ha tomado igual á la unidad, basta multiplicar los términos por una potencia adecuada de esa línea, que en nuestro ejemplo ha sido r, para tener desde luego las fórmulas que se habrian obtenido sin hacer esa simplificacion.

Así, pues, en lo de adelante para facilitar los cálculos supondremos el radio igual á 1, y cuando sea necesario restituiremos el valor de r suprimido, multiplicando por una potencia adecuada de r los términos que lo necesiten, para hacer todos los de nuestras fórmulas de igual grado.

Repetiremos que el grado de un término de la forma entera se estima por el número de sus factores literales; que el de una fraccion se determina restando las dimensiones del denominador de las del numerador; y que en un radical hay que dividir por el índice del radical el grado de la expresion que está dentro del signo. Sin embargo, debemos advertir que algunas veces al estimar las dimensiones de un término, no se llevan en cuenta algunos factores aun cuando sean literales. Esto se hace *cuando alguna literal está representando un coeficiente numérico.* Por ejemplo, si $x=n.a$ representa un arco múltiplo de a, como n está en lugar del coeficiente 1, 2, 3.... la expresion $x=n.a$ será homogénea, aunque aparentemente el 2° miembro tenga dos dimensiones. Esta observacion es igualmente aplicable al caso en que una línea trigonométrica venga á hacer el oficio de coeficiente. Por ejemplo: $\text{sen}.30°=\frac{1}{2}$, y si en una expresion representamos 30° por m, sen.m no deberá considerarse como factor, porque está en lugar del conficiente $\frac{1}{2}$; pero por regla general, las líneas trigonométricas representan líneas, y las expresiones en que entran deben ser homogéneas por indicar resultados de operaciones idénticas hechas con términos del mismo grado.

731.—Problemas.—I.—*Determinar todas las líneas trigonométricas en funcion del seno.*

De la fórmula (1) n° 729 resulta $\cos.a=\sqrt{1-\text{sen}^2a}$

„ (4) „ $\text{tang}.a=\frac{\text{sen}.a}{\cos.a}=\frac{\text{sen}.a}{\sqrt{1-\text{sen}^2a}}$

„ (7) „ $\cot.a=\frac{\cos.a}{\text{sen}.a}=\frac{\sqrt{1-\text{sen}^2a}}{\text{sen}.a}$

„ (5) „ $\sec.a=\frac{1}{\cos.a}=\frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2a}}$

„ (6) „ $\text{cosec}.a=\frac{1}{\text{sen}.a}$

„ (10) „ $\text{sen.ver}.a=1-\sqrt{1-\text{sen}^2a}$

„ (11) „ $\cos.\text{ver}.a=1-\text{sen}.a$

II.—*Determinar todas las líneas trigonométricas en funcion del coseno.*

De la fórmula (1) n° 729 resulta: $\text{sen}.a=\sqrt{1-\cos^2a}$

„ (4) „ $\text{tang}.a=\frac{\text{sen}.a}{\cos.a}=\frac{\sqrt{1-\cos^2a}}{\cos.a}$

„ (7) „ $\cot.a=\frac{\cos.a}{\text{sen}.a}=\frac{\cos.a}{\sqrt{1-\cos^2a}}$

„ (5) „ $\sec.a=\frac{1}{\cos.a}$

„ (6) „ $\text{cosec}.a=\frac{1}{\text{sen}.a}=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2a}}$

„ (10) „ $\text{sen.ver}.a=1-\cos.a$

„ (11) „ $\cos.\text{ver}.a=1-\sqrt{1-\cos^2a}$

III.—*Determinar todas las líneas trigonométricas en funcion de la tangente.*

Hemos visto que

$$\cot.a=\frac{1}{\tan g.a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

$$\sec^2 a=1+\tan g^2 a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

luego $\sec.a=\sqrt{1+\tan g^2 a}$

$$\operatorname{cosec}^2 a=1+\cot^2 a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

luego $\operatorname{cosec}.a=\sqrt{1+\frac{1}{\tan g^2 a}}=\frac{\sqrt{1+\tan g^2 a}}{\tan g.a}$

$$\operatorname{cosec}.a=\frac{1}{\operatorname{sen}.a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

luego $\operatorname{sen}.a=\frac{1}{\operatorname{cosec}.a}=\frac{\tan g.a}{\sqrt{1+\tan g^2 a}}$

$$\operatorname{sen}.a=\frac{1}{\cos.a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

luego $\cos.a=\frac{1}{\sec.a}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan g^2 a}}$

$$\operatorname{sen.ver}.a=1-\cos.a=1-\frac{1}{\sqrt{1+\tan g^2 a}}$$

$$\cos.\operatorname{ver}.a=1-\operatorname{sen}.a=1-\frac{\tan g.a}{\sqrt{1+\tan g^2 a}}$$

IV.—*Determinar el valor de la tangente en funcion de cada una de las otras líneas trigonométricas.*

En funcion del seno:

$$\tan g.a=\frac{\operatorname{sen}.a}{\cos.a}=\frac{\operatorname{sen}.a}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

Del coseno: $\tan g.a=\frac{\operatorname{sen}.a}{\cos.a}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos.a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$

De la cotangente: $\tan g.a=\frac{1}{\cot.a}$

De la secante: como, $\sec^2 a=1+\tan g^2 a$

se tiene: $\tan g.a=\sqrt{\sec^2 a-1}$

De la cosecante: $\tan g.a=\frac{1}{\cot.a}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}$

Del seno verso: como, $\operatorname{sen.ver}.a=1-\cos.a$

se tiene: $\cos.a=1-\operatorname{sen.ver}.a$

sustituyendo en (b) $\tan g.a=\frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos.a}$

resulta $\tan g.a=\frac{\sqrt{1-(1-\operatorname{sen.ver}.a)^2}}{1-\operatorname{sen.ver}.a}$

Del coseno verso: como, $\cos.\operatorname{ver}.a=1-\operatorname{sen}.a$

se tiene: $\operatorname{sen}.a=1-\cos.\operatorname{ver}.a$

sustituyendo en (a) $\tan g.a=\frac{\operatorname{sen}.a}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}}$

resulta: $\tan g.a=\frac{1-\cos.\operatorname{ver}.a}{\sqrt{1-(1-\cos.\operatorname{ver}.a)^2}}$

V.—*Determinar el valor del seno en funcion de cada una de las otras líneas trigonométricas.*

Al resolver los cuatro problemas anteriores, hemos hallado ya el valor del seno en funcion del coseno y de la tangente, cuyos valores son:

$$\operatorname{sen}.a=\sqrt{1-\cos^2 a}$$

$$\operatorname{sen}.a=\frac{\tan g.a}{\sqrt{1+\tan g^2 a}}$$

Para tenerlo en funcion de la *cotangente*, sabemos que: (fórmulas 6 y 3)

$$\operatorname{sen}.a=\frac{1}{\operatorname{cosec}.a}\ \text{y}\ \operatorname{cosec}^2 a=1+\cot^2 a$$

luego $\operatorname{sen}.a=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 a}}$

Para determinarlo en funcion de la *secante*

$$\text{sec.a}=\frac{1}{\text{cos.a}}=\frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2\text{a}}}$$

elevando al cuadrado y quitando los denominadores:

$$\text{sec}^2\text{a}-\text{sec}^2\text{a.sen}^2\text{a}=1$$

despejando á sen^2a y extrayendo raíz, resulta:

$$\text{sen.a}=\frac{\sqrt{\text{sec}^2\text{a}-1}}{\text{sec.a}}$$

Para la *cosecante* tenemos:

$$\text{cosec.a}=\frac{1}{\text{sen.a}}$$

luego $$\text{sen.a}=\frac{1}{\text{cosec.a}}$$

Para el seno verso tenemos:

$$\text{sen.ver.a}=1-\text{cos.a}=1-\sqrt{1-\text{sen}^2\text{a}}$$

de donde $$\sqrt{1-\text{sen}^2\text{a}}=1-\text{sen.ver.a}$$

elevando al cuadrado $$1-\text{sen}^2\text{a}=(1-\text{sen.ver.a})^2$$

$$\text{sen}^2\text{a}=1-(1-\text{sen.ver.a})^2$$

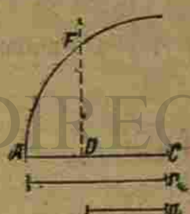
$$\text{sen.a}=\sqrt{1-(1-\text{sen.ver.a})^2}$$

Para el coseno verso tenemos:

$$\text{cos.ver.a}=1-\text{sen.a}$$

de la que $$\text{sen.a}=1-\text{cos.ver.a}$$

VI.—*Construir gráficamente un arco dada la longitud del radio, y la de su coseno.*

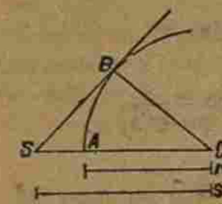

(Fig. 349)

Sea r (fig. 349) la longitud del radio, *a* la de su coseno. Haciendo centro en C y con un radio A C=r se trazará un arco de magnitud indefinida. Sobre el radio y desde el centro hácia A se llevará una parte C D igual al coseno *a*. En el punto D levantarémos una perpendicular y su interseccion con el arco determinará la magnitud del A F buscado.

Al resolver este problema hemos prescindido de los signos que pueden tener el arco y el coseno,

porque todavía no hemos explicado los signos de las líneas trigonométricas.

VII.—*Dada la magnitud r del radio* (fig. 350) *y la s de la secante, determinar gráficamente el ángulo á que corresponde.*


(Fig. 350)

Tómese A C=r: trácese un arco de círculo indefinido: prolónguese el radio C A y tomando C S=s, desde el punto S tírese la tangente S B, cuyo punto de contacto determinará el ángulo B C A buscado.

La determinacion del punto B se hace con más exactitud gráficamente valiéndose del seno ó del coseno, porque estas líneas cortan el arco próximamente en una direccion perpendicular, mientras que el punto de contacto, por finas que sean las líneas, se confunde en mayor extension con la circunferencia.

VIII.—*Determinar el valor de todas las líneas trigonométricas del arco de 30°.*

Si el arco A B (fig. 351) es de 30°, B D será el seno de este arco. Prolongando B D hasta B' por ser el radio C A perpendicular á la cuerda B B' la dividirá en dos partes iguales así como al arco B A B' (475), por consiguiente el arco B A B' será de 60°, su cuerda B B' igual al radio (497), y el seno B D de 30° igual á la mitad del radio. Se vé, pues, que el seno de un arco cualquiera es igual á la mitad de la cuerda del arco duplo, y en el caso de ser el arco de 30° siendo el radio 1 tendrémos

$$\text{sen. }30°=\tfrac{1}{2}$$

$$\text{cos. }30°=\sqrt{1-\text{sen}^2 30°}=\sqrt{1-\tfrac{1}{4}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{tang.}30°=\frac{\text{sen.}30°}{\text{cos.}30°}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\text{cot.}30°=\frac{1}{\text{tang. }30°}=1\div\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$$\text{sec. }30°=\frac{1}{\text{cos. }30°}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\tfrac{2}{3}\sqrt{3}$$

Se ve, pues, que la secante de 30° es doble de la tangente del mismo arco

$$\text{cosec.}30^\circ=\frac{1}{\text{sen. }30^\circ}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$$\text{sen. ver.}30^\circ=1-\cos.30^\circ=1-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos.\text{ver.}30^\circ=1-\text{sen.}30^\circ=1-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}$$

En resúmen, *las líneas trigonométricas de* 30° serán:

$$\text{sen.}30^\circ=\tfrac{1}{2},\ \cos.=\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ \text{tang.}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cot.=\sqrt{3},\ \sec.=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\text{cosec.}=2,\qquad \text{sen. ver.}=1-\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\quad \cos.\text{ver.}=\tfrac{1}{2}$$

Tomando como base que $\cos.60^\circ=\frac{1}{2}$ y siguiendo el mismo procedimiento se determinarían con facilidad los valores de todas las líneas trigonométricas del arco de 60°; pero supuesto que las líneas directas de un arco son iguales á las indirectas de su complemento, tendrémos que *las líneas trigonométricas de* 60° serán:

$$\text{sen.}60^\circ=\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ \cos.=\tfrac{1}{2},\ \text{tang.}=\sqrt{3},\ \cot.=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sec.=2$$

$$\text{cosec.}60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}},\ \text{sen. ver.}=\tfrac{1}{2},\ \text{y}\ \cos.\text{ver.}=1-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

(Fig. 351)

IX.—*Determinar las líneas trigonométricas del arco de* 45° (fig. 351).—Siendo el arco E A de 45° medida del ángulo E C A, el triángulo rectángulo T A C, de que hace parte la tangente, será isósceles, supuesto que los ángulos T y T C A, valdrán cada uno 45°. En consecuencia, T A=A C luego:

$$\text{tang.}45^\circ=1$$

$$\sec.45^\circ=\sqrt{1+\text{tang}^2 45^\circ}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\sec.a=\frac{1}{\cos.a}\qquad ó\ \cos.a=\frac{1}{\sec.a}$$

luego $\cos.45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\text{sen.}45^\circ=\sqrt{1-\cos^2 45}=\sqrt{1-\tfrac{1}{2}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cot.45^\circ=\frac{1}{\text{tang.}45^\circ}=1$$

$$\text{cosec. }45^\circ=\frac{1}{\text{sen.}45^\circ}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt{2}$$

$$\text{sen. ver.}45^\circ=1-\cos.45^\circ=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos.\text{ver.}45^\circ=1-\text{sen.}45^\circ=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

En resúmen, *para el arco de 45° las líneas trigonométricas serán:*

$$\text{sen.}45^\circ=\cos.=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \text{tang.}45^\circ=\cot.=1,\quad \sec.45^\circ=\text{cosec.}=\sqrt{2}$$

$$\text{sen. ver.}45^\circ=\cos.\text{ver.}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

X.—*Construir un ángulo de 30, de 45 y 60 grados.*

Para construir el ángulo de 30° nos bastará tomar una recta igual á la mitad del radio, la cual nos representará el *seno* del arco buscado, y el problema se convierte en este otro: conocido el radio y el seno, determinar el arco, cuya resolucion hemos indicado (727).

Si el ángulo que trata de construirse es de 45°, tomarémos la tangente ó la cotangente de la misma magnitud que el radio.

Por último, si el ángulo que trata de construirse es de 60°, tomarémos su coseno igual á la mitad del radio, y procederémos como en el problema VI.

Valores correlativos entre los arcos y sus líneas trigonométricas.

732.—Vamos á examinar los diversos valores que pueden tomar las líneas trigonométricas cuando se hace variar el arco á que pertenecen desde 0° hasta $+\infty$ y desde 0° hasta $-\infty$, considerando sus signos, sus magnitudes y los valores que les son correlativos en arcos menores que 90°.

Para facilitar la inteligencia de este importante punto, que servirá de fundamento no solo á las especulaciones de la trigonometría sino tambien á otros ramos de las matemáticas, considerarémos, sucesivamente, cada una de las líneas trigonométricas observando sus variaciones al pasar el arco por sus diversas magnitudes.

733.—Valores correlativos del seno.—Si en la fig. 352, tomamos el punto A como orígen de los arcos, considerando como positivos los medidos en el sentido A B C.... indicado por la flecha, (que es en el que se mueven las manitas de un reloj), y negativos los arcos medidos en direccion opuesta, al moverse el lado B O girando al rededor del punto O, segun se verifique en un sentido ó en otro, engendrará el punto B todos los arcos positivos comprendidos entre 0° y el ∞ ó los negativos entre 0° y —∞.

Ya hemos visto que el seno del ángulo A Ô B se determina bajando desde el extremo B, la perpendicular B J al otro lado, así es que consideramos como positivos los senos medidos en el sentido de B á J, de arriba para abajo, y reputarémos como negativos, los que se midan en sentido contrario. El radio del círculo lo seguirémos considerando igual á la unidad.

Si el punto B coincidiera con A, el arco sería nulo y el valor de la perpendicular B J, ó del seno tambien lo sería. Luego el seno de 0° es cero. Al ir aumentando el ángulo en el primer cuadrante entre A y C, el seno B J continuará siendo positivo é irá creciendo hasta llegar á ser igual á 1 cuando el arco A C es de 90°.

(Fig. 352)

Al pasar al 2° cuadrante el lado móvil del ángulo, y tomar una posicion cualquiera como O D, el seno D K decrece; pero como el sentido de la perpendicular es el mismo que entre 0 y 90°, el seno sigue siendo positivo. Al llegar á coincidir el lado móvil con O F, el ángulo y el arco tendrán el valor de 180° y el seno será nulo. Así, pues, en el 2° cuadrante, el seno decrece de + 1 á 0 siendo siempre positivo, é igual á 0 cuando el arco vale 180°.

Al pasar el lado móvil del ángulo al tercer cuadrante, como el sentido en que se baja la perpendicular G L es contrario á aquel en que se ha bajado en los dos primeros cuadrantes, resulta que el seno es negativo y va creciendo desde 0 hasta — 1, teniendo este último valor, cuando el ángulo es de 270°.

Si el lado móvil pasa de H, el seno I M en el cuarto cuadrante es negativo y va decreciendo desde — 1 hasta 0 cuando el arco llega al valor de 360°.

Si el ángulo continúa creciendo en el mismo sentido, el seno vuelve

á tomar los valores y signos que tuvo en los ángulos que son el exceso sobre 360°. Otro tanto sucederá si el ángulo se compone de cualquier múltiplo de 360° más un arco menor que la circunferencia. Resulta, pues, que si á un ángulo se le agrega 360°, 2×360°, 3×360°.... el seno no cambia de signo ni de valor, y como se llama *amplitud del período de una línea trigonométrica, el arco que puede añadirse una ó varias veces al arco á que corresponde la línea trigonométrica sin que ésta cambie de valor ni de signo*, 360° grados será la amplitud del período del seno.

734.—Consideremos ahora los arcos negativos, para lo cual tendrémos que suponer que, el punto móvil del ángulo, gira en la direccion A I H G.... Vemos que en el primer cuadrante negativo — A H, el seno es negativo lo mismo que en el segundo — H F, creciendo y decreciendo lo mismo que en los dos primeros cuadrantes positivos. En el tercero y cuarto cuadrantes negativos, F C y C A, el seno es positivo, esto es, tiene signo contrario al que tenia cuando el arco era positivo, y crece y decrece lo mismo que cuando considerábamos el tercero y cuarto cuadrantes positivos. En resúmen, cuando el arco es negativo, el seno es el mismo que corresponde al arco positivo, pero tiene signo contrario, lo cual se cifra en la siguiente ecuacion:

$$\text{sen.}(-a) = -\text{sen.}\,a$$

735.—Véamos qué relacion existe entre los senos de los *arcos suplementarios*. El seno del ángulo A O D es D K. El suplemento de A O D es D O F. El arco D F=A B, por ser arcos del mismo círculo comprendidos entre paralelas, y como el seno de A B, que es B J=D K, por lados opuestos del paralelógramo D J, se infiere que *el seno de un ángulo es igual y del mismo signo que el de su suplemento.*

De la inspeccion de la figura, resulta igualmente que el seno del arco A C F G=180°+F G es el mismo que el del arco F G, pero tomado con signo contrario. Si seguimos agregando al arco 180°, el seno va teniendo el mismo valor absoluto, pero alternativamente cambia de signo. En consecuencia, llamando á un arco cualquiera *a*, se tiene que:

$$\text{sen.}\,a = \text{sen.}(180° - a)$$

y

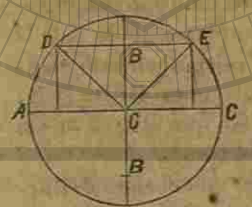
$$\text{sen.}\,a = -\text{sen.}\,(180° + a)$$

736.—Harémos notar, que cuando el radio del círculo se ha tomado igual á la unidad, todos los valores que puede adquirir el seno, están comprendidos entre + 1 y — 1 cuyos límites no puede sobrepasar. Para alcanzar estos límites, basta que el ángulo cambie 180°, pasando de

90° á 270° ó de —90° á +90°. Por último, si se prescinde del signo, el seno toma todos los valores de que es susceptible en una variacion del arco de 0 á 90°.

Para determinar el *seno* de un arco $\pm$A mayor que una circunferencia, se dividirá por 360°, que es el período del seno, y la resta de la division ($\pm$A—n. 360°) nos servirá para fijar el signo y la magnitud del seno. Si el fin del arco de la resta queda en el primero ó en el segundo cuadrante el seno será *positivo*, y si queda en el tercero ó en el cuarto, será *negativo*. En cuanto á la magnitud del arco cuyo seno es igual al de $\pm$A, bastará observar que si la resta de la division no llega á 90°, desde luego se tendrá el arco cuyo seno es igual al dado. Si la resta queda en el segundo ó en el tercer cuadrante, se tomará la diferencia á 180°, supuesto que sen.(180°$\pm$a)=$\mp$sen.a, y si queda en el cuarto se buscará la diferencia á 360° una vez que sen.(360°—a)=—sen.a. Por ejemplo: sen.3175°=—sen.65°; porque siendo 3175=8×360+295, el seno de 3175° será el 295°; quedando este arco en el cuarto cuadrante el seno será negativo, y el mismo que corresponde al arco 65°=360°—295°.

737.—De las consideraciones que anteceden, resulta que á un arco dado corresponde un solo seno; pero que por el contrario á un seno pueden corresponder una infinidad de arcos. Vamos á explicar algo mas esto y á determinar los valores de los arcos que tienen el mismo seno.



(Fig. 353)

Si en la fig. 353 el radio del círculo es la unidad, y estando en A el orígen, se conoce el seno s=O B de los arcos que buscamos, llevaremos la magnitud de este seno conocido de O á B y tirando por B la recta D E paralela al diámetro A C, tendremos desde luego que el seno B O corresponde al arco A D y al A D E que es su suplemento. Ademas, corresponderá igualmente á todos los arcos que resulten de agregar á A D y á A D E, 360° ó cualquier múltiplo de 360°. De suerte que si representamos por *a* el arco A D y por x y x' los arcos variables á que puede corresponder el mismo seno B O, tendremos:

$$\text{B O=sen x=sen x'}$$

$$\text{siendo} \qquad x=a+n.360° \qquad x'=180°—a+n.360°=180°(2n+1)—a$$

en estas ecuaciones *n* representa un número entero cualquiera, cuyo valor tambien puede ser cero.

Si el seno es negativo, como B'O, los arcos tambien lo serán y cambiando el signo de *a* en los valores de x y x' los arcos á que pertenece el mismo seno negativo, estarán representados por las ecuaciones:

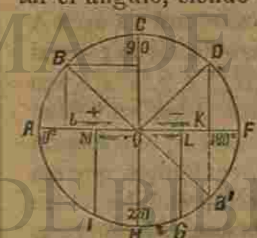
$$x=n.360°—a \qquad x'=180°(2n+1)+a.$$

En general, sea cual fuere la magnitud del arco *a*, si se le agrega á este arco n×360° ó un número par de semi-circunferencias, todos estos arcos tendrán el mismo seno; pero si se le agrega solo (2 n+1) 180° ó un número impar de semi-circunferencias, como una de sus extremidades se trasportará del extremo de un diámetro á su opuesto, el seno será de la misma magnitud pero de signo contrario.

738.—Valores correlativos del coseno.—Ya hemos dicho que el coseno del arco A B (fig. 354), es el seno B E de su complemento B C, ó lo que es igual á B E, la parte J O del radio comprendida entre el pié J del seno y el centro O. Consideraremos, pues, como positivos, los cosenos medidos en la direccion de J á O; dejando subsistentes las demas convenciones que establecimos al tratar del seno, como son el sentido de los arcos positivos, que el radio es la unidad, etc.

Cuando el arco es nulo, esto es, cuando el punto B coincide con A, el coseno será el radio AO. A medida que el arco crece, el coseno disminuye hasta llegar á ser nulo cuando el arco A C es de 90°. Así, pues, en el primer cuadrante el coseno es positivo, va decreciendo al aumentar el arco; para 0° el cos=1, y para 90° el cos=0.

Cuando el valor del arco pasa de 90°, como A C D, su coseno es K O, y como la medida de esta recta se hace en direccion opuesta á la de J O, el coseno será negativo, é irá creciendo á medida que el arco aumenta hasta llegar á ser igual —1 cuando D coincide con F. Esto es, en el segundo cuadrante el coseno es negativo, su valor crece al aumentar el ángulo, siendo 0 para 90° y —1 para 180°.



(Fig. 354)

Si el valor del arco es mayor que 180° como A C F G su coseno L O será negativo, decrecerá al ir aumentando el arco hasta ser nulo para el arco A C F H. Esto es, en el tercer cuadrante el coseno es negativo; decrece al aumentar el arco, siendo —1 para 180° y 0 para el arco de 270°.

Cuando el arco pasa de 270°, como A C F H I, su coseno será M O y como se mide en la misma direccion que el J O del primer cuadrante, será positivo; crecerá al aumentar el arco hasta ser igual con el radio

A O cuando el arco sea de una circunferencia completa. Por tanto en el cuarto cuadrante, el coseno es positivo; crece al aumentar el ángulo; siendo 0 para el arco de 270° y +1 para el de 360°.

Si el arco sigue creciendo en el mismo sentido, el coseno volverá á pasar por los valores que tuvo para los ángulos que son el exceso sobre 360° y con los mismos signos. Otro tanto sucederá si el arco pasa de 2, 3, etc., circunferencias. Este arco de 360° es la *amplitud del período del coseno.*

Se habrá notado que tanto el seno como el coseno cambian de signo cuando su valor pasa por cero, y veremos que lo mismo sucede con las demas líneas trigonométricas, y con todas las cantidades.

739.—Si suponemos ahora que el arco sea negativo cuando se mida, en el sentido A I H G.... se observará que en el 1er. cuadrante negativo el coseno M O es positivo, como lo era en el cuadrante A C, y decrece de +1 á o: que en el 2° cuadrante negativo H F el coseno L O es negativo y crece de o á —1, como lo era en el 2° cuadrante positivo; verificándose lo mismo en los siguientes cuadrantes. Esto es, el coseno de un arco negativo es igual y del mismo signo que el que corresponde al arco considerado como positivo, lo cual se cifra en la siguiente ecuacion:

$$\cos.(-a)=\cos.a$$

740.—Véamos qué relacion existe entre el coseno de un ángulo y el *de su suplemento*. En la misma (fig. 354) se tiene que el arco D F suplemento del A C D es igual á A B, y O K=O J por ser iguales los triángulos O B J y O D K; pero como el sentido en que se mide K O es contrario al en que se mide J O, resulta que *el coseno de* A C D *es igual al coseno de su suplemento tomado con signo contrario.* Esto es,

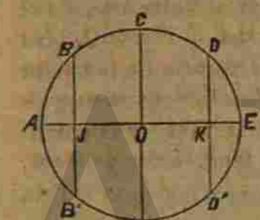
$$\cos.a=-\cos.(180-a)$$

Si á un arco cualquiera A B se le agregan 180° resultará un arco A C F B', cuyo coseno O K será igual al de A B, pero de signo contrario. Esto es,

$$\cos.a=-\cos.(180^\circ+a)$$

741.—Los valores que puede adquirir el coseno, cualquiera que sea la magnitud del arco positivo ó negativo, están comprendidos entre +1 y —1 lo mismo que los del seno; pero á medida que el seno crece, el coseno decrece y vice-versa. Para alcanzar sus límites el coseno basta que el arco varíe de 0° á 180° ó de 180° á 360°, y si se prescinde del signo basta que el arco cambie de 0 á 90°.

Para determinar el *coseno* de un arco $\pm A$, mayor que una circunferencia, se dividirá por 360°, que es el período del coseno, y la resta $\pm A - n.\,360^\circ$ servirá para obtener el signo y la magnitud del coseno. Para determinar el signo se observará en qué cuadrante queda el fin del arco de la resta, siendo *positivo* el coseno en el 1° y en el 4°, y *negativo* en el 2° y en el 3er. cuadrante. En caso de que la resta no llegue á 90° este arco tendrá un coseno igual al del dado $\pm A$. Si el fin del arco de la resta queda en el 2° ó 3er. cuadrante se tomará la diferencia á 180°; y si queda en el 4° se restará de 360° para tener un arco menor que 90°, cuyo coseno es igual al de $\pm A$, supuesto que $\cos.(180^\circ \pm a)=-\cos.a$ y que $\cos.(360^\circ-a)=\cos.a$. Por ej. $\cos.\,2028^\circ=-\cos.\,48^\circ$; porque $2028^\circ=5\times360+228^\circ$, y como la resta 228° queda en el 3er. cuadrante, el coseno será negativo é igual al del arco de $48^\circ=228-180^\circ$.



(Fig. 355)

742.—Dada la magnitud $c=$ O J (fig. 355) del coseno positivo, véamos cuáles son los diferentes arcos á que puede corresponder el mismo coseno. Si llevamos la magnitud de O J sobre el radio O A, y por el punto J levantamos la perpendicular B B', tendremos que el coseno dado corresponderá á los arcos A B, y A C E B' así como á todos los que resulten de agregarles 360° y los múltiplos de 360°. Si representamos por *a* el arco A B=A B', por x y x' los arcos variables á que puede corresponder el mismo coseno, y por *n* un número entero que puede tener toda clase de valores incluso el de cero, tendremos

$$O\,J=\cos.x=\cos.x'$$

siendo $x=a+n.360^\circ \quad x'=(360^\circ-a)+n.360^\circ=360^\circ(n+1)-a$

Si el coseno dado O K es negativo, lo llevaremos de O á K y levantando por K la perpendicular D D' dicho coseno pertenecerá á los arcos A C D y A C E D', así como á todos los que resulten de agregarles 360° y los múltiplos de 360°. Llamando *a* el arco D E, los diferentes arcos á que pertenece el coseno $-c=$ K O estarán representados por

$$x=180^\circ-a+n\,360^\circ \quad x'=180^\circ+a+n\,360^\circ$$

ó $x=180^\circ(2n+1)-a \quad x'=180^\circ(2n+1)+a$

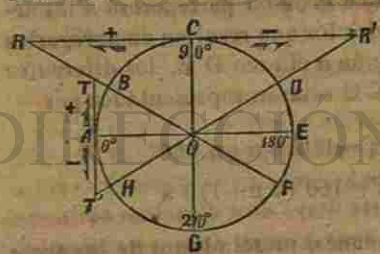
Para no complicar nuestras explicaciones, prescindimos de los arcos negativos á que puede pertenecer el mismo coseno.

Determinado uno de los ángulos á que pertenece un coseno, pertenecerá igualmente á todos los que resulten de agregarle sucesivamente 360°; y si se le agrega 180° ó un número impar de semi-circunferencias, se obtendrán los arcos á que corresponde el coseno con signo cambiado.

743.—Valores correlativos de la tangente y cotangente.—Dado el arco A B (fig. 356) su tangente será la recta A T, y su cotangente la línea C R. Reputaremos como positivas las tangentes medidas arriba de A en la direccion de A á T, y como negativas las medidas abajo de A hácia T'. Respecto de las cotangentes consideraremos como positivas las medidas de C hácia R, y como negativas las medidas de C para R'.

Esto supuesto, si el punto B coincidiera con A, el ángulo sería nulo y la tang. A T tambien lo sería. Al crecer el ángulo la tangente será positiva é irá aumentando hasta llegar á ser infinita cuando el arco sea A C, por ser entónces paralelas las rectas A T y O C. En cuanto á la cotangente C R es infinita cuando el arco es nulo, su valor disminuye al crecer el arco y es nula cuando éste adquiere la magnitud A C. En consecuencia, en el 1er. cuadrante la tang. y la cotangente son positivas: cuando el arco aumenta la tang. crece y la cot. decrece: para el arco de 0° la tang.$=o$ y la cot.$=\infty$, y para 90° la tang.$=\infty$ y la cot.$=o$.

Al pasar el arco al 2° cuadrante y tener un valor como A C D, tendremos que tomar la tang. para abajo de A, á fin de que pueda encontrar el lado D O prolongado en T', por lo que la tangente será negativa, lo mismo que la cotangente, que es C R'. Al ir creciendo el arco A C D la tangente va disminuyendo y la cotangente irá aumentando, de modo que cuando el arco sea A C E la tangente será nula y la cotangente ∞. Esto es, en el 2° cuadrante la tangente y la cotangente son negativas, al crecer el ángulo la tangente disminuye y la cotangente aumenta, siendo para el arco de 180° la tang.$=o$ y la cot.$=\infty$.



(Fig. 356)

Cuando el arco pasa de 180° como A C E F, la tangente será A T y su cotangente C R, ambas positivas. Al aumentar el arco la tangente crecerá y la cotangente disminuirá, hasta llegar á ser infinita la tangente y nula la cotangente cuando el arco sea A C E G. Esto es, en el 3er. cuadrante la tangente y la cotangente son positivas, al aumentar el arco la tangente crece y la cotangente disminuye, y cuando es de 270° la tang.$=\infty$ y la cot.$=o$.

Cuando pasa el arco de 270° como A C E G H, la tangente es A T' y su cotangente C R', ambas líneas negativas. Al aumentar el arco la tangente disminuye y la cotangente crece, llegando á ser nula la primera é infinita la segunda cuando el arco es de una circunferencia. Así, pues, en el 4° cuadrante son negativas la tangente y la cotangente, la primera disminuye y la segunda crece al aumentar el ángulo, y para 360° la tang.$=o$ y la cot.$=-\infty$.

Debemos hacer notar, que al pasar por el infinito los valores de la tangente y la cotangente siempre cambian de signo y veremos que lo mismo sucede con las demas líneas.

744.—Si el arco es negativo cuando se mide en el sentido A H G F... en el 1er. cuadrante A G la tangente A T' y la cotangente C R' serán negativas; al crecer el arco la tangente aumentará mientras que el valor de la cotangente disminuye, y al ser el arco $=-90°$ la tang.$=-\infty$ y la cotangente$=o$. En el 2° cuadrante negativo la tangente A T y la cotangente C R son positivas, la primera línea decrece y la segunda aumenta, siendo nula la tangente para el arco $=-180°$ y la cotangente $=+\infty$. En el 3° y 4° cuadrantes negativos se observará que los signos de las líneas que estudiamos serán contrarios á los que tuvieron en los mismos cuadrantes positivos, teniendo variaciones y valores idénticos. Así, pues, en general:

$$\text{tang.}\ (-a)=-\text{tang.}\,a$$
$$\text{cot.}\ (-a)=-\text{cot.}\,a$$

745.—Examinemos la relacion que existe entre la tangente y la cotangente de un ángulo y la de *su suplemento*. En la (fig. 356) si se toma D E=A B se tiene que la tangente A T' del arco A C D es igual á la A T del arco A B, pero de signo contrario, supuesto que son iguales los triángulos O A T y O A T'. Respecto de las cotangentes, C R' que es la cotangente de A C D, es igual á C R, cotangente de su suplemento A B, pero de signo contrario; luego

$$\text{tang.}\,a=-\text{tang.}\ (180°-a)$$
$$\text{cot.}\,a=-\text{cot.}\ (180°-a)$$

Si al arco A B se le agregan 180° resultará el A C E F cuya tangente A T y su cotangente C R, son las mismas que corresponden á E F=A B exceso sobre 180° y con el mismo signo. En general:

$$\text{tang.}a = \text{tang.}\ (180^\circ + a)$$
$$\text{cot.}a = \text{cot.}\ (180^\circ + a)$$

De esto resulta, que *el arco de 180° es la amplitud del período de la tangente y de la cotangente.*

746.—Los valores de la tangente y cotangente varían entre $+\infty$ y $-\infty$ y para adquirir estos valores basta un cambio en el arco de 0 á 180°. Si se tiene un arco $\pm A$ de un gran número de grados, dividiéndolo por 180°, amplitud del período, se tendrá una resta $\pm a < 180°$ cuya tangente y cotangente tendrán el mismo valor y signo que las de $\pm A$.

747.—Dada la magnitud A T (fig. 356) de la tangente, ó la C R de la cotangente, determinar todos los arcos que tienen las mismas líneas trigonométricas.

Si en el punto A levantamos la perpendicular A T, reuniendo el punto T con el centro, tendremos que la tangente A T corresponde al arco A B, y á todos los que resulten de agregarle una ó varias veces 180°. En cuanto á la cotangente levantando en C una perpendicular igual á C R y reuniendo R con O, tendremos que esta cotangente corresponderá al arco A B y á todos los que resulten de agregarle una ó varias veces 180°, que es la amplitud del período. Llamando a el arco A B, x los arcos variables que tienen la misma tangente ó cotangente, y n un número entero cualquiera, cuyo valor puede ser cero, tendremos:

$$\text{A T} = \text{tang.}x$$
$$\text{C R} = \text{cot.}x$$

siendo
$$x = a + n.\ 180^\circ$$

En el caso de que la tangente y cotangente fuesen negativas como A T' y C R', los diferentes arcos á que estas líneas podrían corresponder, representando por a el arco A H, serian:

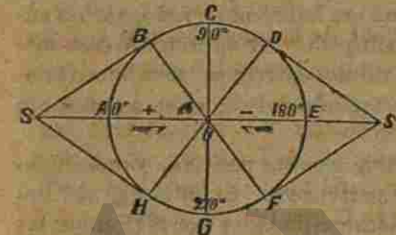
$$x = 360^\circ - a + n.\ 180^\circ = 180^\circ\ (2+n) - a$$

No creemos necesario ocuparnos del caso en que el arco sea negativo, cuyos valores es fácil determinar.

748.—Valores correlativos de la secante.—Dado el arco A B (fig. 357) su secante será S O que consideraremos como positiva al estar medida en la direccion de S á O, y serán negativas las secantes medidas sobre la misma recta S S' en sentido contrario de S' á O.

Si el punto B del arco A B coincidiera con A, éste sería nulo y confundiéndose S con A, la secante S O seria igual al radio; al crecer el arco, la secante tambien creceria siendo positiva, y al llegar el punto B á C, la secante seria infinita por ser S O paralela á la tangente en C. Se ve, pues, que en el 1er. cuadrante, la secante es positiva; que su valor aumenta al crecer el arco; que para 0° sec. $= 1$, y para 90° sec $= +\infty$.

Al pasar el extremo móvil del arco al 2° cuadrante y llegar, por ejemplo á D, la secante S'O será negativa é irá decreciendo al aumentar el arco hasta llegar á ser igual al radio E O cuando el arco es de 180°. Así, pues, en el 2° cuadrante, la secante es negativa, decrece al aumentar el arco y para 180°, sec. $= -1$,



(Fig. 357)

En el 3er. cuadrante, la secante S'O es negativa, crece al aumentar el arco A C E F y cuando llega á 270°, la secante será igual á $= -\infty$ por ser paralela S'O á la tangente que pasara por G.

En el 4° cuadrante, la secante vuelve á ser S O positiva; al crecer el arco A C E G H disminuye, y para el arco de 360° será igual á $+1$.

749.—Si el arco es negativo cuando se mide en el sentido A H G F... la secante S O en el 1er. cuadrante negativo A G es positiva, crece con el arco y cuando es de $-90°$ la sec. $= +\infty$. En el 2° cuadrante negativo G E, la secante S'O es negativa, decrece al aumentar el arco y para $-180°$, sec. $= -1$. En el 3er. cuadrante negativo E C, la secante S'O es negativa, crece con el arco A G E D y para $-270°$, sec. $= -\infty$. En el 4° cuadrante negativo la secante S O es positiva, decrece al aumentar el arco A G E C B, y para $-360°$, sec. $= +1$. Se ve, pues, que la secante de un arco negativo, tiene signo igual á la que corresponde al arco considerado como positivo, y sufre variaciones idénticas á éste, por lo que

$$\sec(-a) = +\sec a.$$

Como si á un arco positivo ó negativo se le agrega una ó varias circunferencias completas, la secante vuelve á tener el mismo valor é igual signo, el arco de 360° será la *amplitud del período de la secante.*

750.—Examinemos la relacion que existe entre una secante y la de *su suplemento.* La secante del arco A C D es S'O, y si tomamos A B = D E suplemento de A C D, tendrémos que por ser los triángulos

S' D O y S B O iguales, S'O será igual á S O, pero de signo contrario, luego:

$$\sec a = -\sec(180° - a)$$

Si á un arco A B se le agregan 180°, resultará el A C E F y como la secante S O de A B es igual en magnitud á la S'O de A C E F, pero de signo contrario, resulta que

$$\sec a = -\sec(180° + a)$$

751.—Los valores de la secante, como se habrá observado, varían entre $+1$ y $+\infty$, y entre -1 y $-\infty$ sin poder ser en ningun caso menores que el radio. Para obtener los valores extremos, basta una variacion en el arco de 0° á 180°, y si se prescinde del signo, será suficiente la de 0 á 90°.

752.—Dada la magnitud S O de una secante positiva, vamos á determinar todos los arcos á que puede pertenecer. Si en la fig. 357 llevamos de O á S la magnitud de la secante dada, y por S tiramos las tangentes S B y S H, dicha secante pertenecerá á los arcos A B, A C E G H y á todos los que resulten de agregarles una ó varias veces 360°. Si representamos por a el arco A B=A H, por x y x' los variables que pueden tener la misma secante, y por n un número entero cualquiera, que puede ser cero, tendremos:

$$S\,O = \sec x = \sec x'$$

siendo $x = a + n.360°$ $x' = (360° - a) + n.360° = 360(n+1) - a$

Si la secante dada es negativa, la llevaremos de O á S' y tirando las tangentes S' D y S' F, pertenecerá á los arcos A D, A C E F y á los que resulten de agregarles una ó varias veces 360°. Si representamos por a el arco D E<90°, los arcos á que pertenece la secante negativa tendrán por expresiones:

$$x = 180° - a + n.360° \qquad x' = 180° + a + n.360°$$

ó

$$x = 180°(2n+1) - a \qquad x' = 180°(2n+1) + a$$

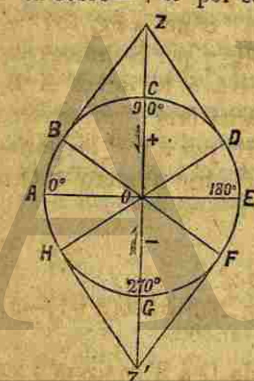
Conocido uno de los arcos á que pertenece una secante, se determinarán todos los demás agregándole á éste, un número par de semi-circunferencias, que es un múltiplo de 360°; pero si se le agrega un número impar de semi-circunferencias, se obtendrán los arcos á que pertenece la misma secante pero con signo contrario.

753.—Valores correlativos de la cosecante.—Dado el arco A B (fig. 358) su *cosecante* será la recta Z O que consideraremos positiva al estar medida de Z á O, y estimaremos como negativas las cosecantes medidas sobre Z Z' de Z' hácia O.

Si suponemos que partiendo de A, se mueve un punto en el sentido de los arcos positivos, éste engendrará todos los arcos positivos imaginables, cuyas cosecantes tratamos de determinar.

Si B coincide con A el arco será nulo, y como la tangente levantada en A es paralela á Z O, la cosecante será infinita; al crecer el arco A B, la cosecante Z O será positiva é irá decreciendo hasta llegar á ser el radio O O cuando el arco sea de 90°. Así, pues, en el primer cuadrante la cosecante es positiva; decrece al aumentar el arco, cuando éste es 0°, cosec$=\infty$, y para 90°, cosec$=+1$.

Al pasar el punto móvil de C, la cosecante del arco A C D, por ejemplo, es Z O positiva, crece al aumentar el arco, y al ser éste de 180°, la cosec$=+\infty$ por ser la tangente levantada en E paralela á Z O.



(Fig. 358)

En el tercer cuadrante, la cosecante Z' O del arco A C E F es negativa, decrece al aumentar el arco, y para 270°, cosec$=-1$.

En el cuarto cuadrante, la cosecante Z' O del arco A C E G H es negativa, crece al aumentar el arco, y cuando éste llega á ser de 360° su cosec$=-\infty$.

754.—Si el punto móvil recorre la circunferencia en el sentido A H G F.... engendrará los arcos negativos, y en el primer cuadrante A G la cosecante Z' O será negativa, decrecerá al aumentar el arco y para $-90°$ será igual á -1. En el segundo cuadrante *negativo* G E la cosec. Z' O es negativa, crece como el arco y para $-180°$ es igual á $-\infty$. En el tercer cuadrante *negativo* E C, la cosecante Z O es positiva, decrece al aumentar el arco A G E D y para $-270°$ es igual á $+1$. En el cuarto cuadrante tambien es positiva, pero crece al aumentar el arco A G E C B, y para $-360°$ es igual á $+\infty$. Resulta que la cosecante de un arco negativo, tiene signo contrario al que tendría si el arco fuese positivo y experimenta variaciones idénticas, por lo que

$$\text{cosec}(-a) = -\text{cosec}.a$$

Como si á un arco se le agrega 360° una ó varias veces, la cosecante vuelve á tener el mismo valor con igual signo, este arco de 360° *es la amplitud del período de la cosecante.*

755.—Examinaremos la relacion que hay entre la cosecante de un arco y *la de su suplemento*. La cosecante del arco A C D es Z O. Si tomamos A B=D E, suplemento de A C D, la cosecante de A B es la misma recta Z O que la de A C D. Luego, *la cosecante de un arco es igual y del mismo signo que la de su suplemento.*

Si al arco A B le agregamos 180° resultará el A C E F cuya cosecante Z' O será igual á la Z O de A B pero de signo contrario. Luego,

$$\text{cosec.}a=-\text{cosec}(180+a)$$

756.—Como se habrá notado, los valores de la cosecante varían entre $+1$ y $+\infty$ y entre -1 y $-\infty$ sin que en ningun caso sean menores que el radio. Para que la cosecante obtenga todos los valores de que es susceptible, basta una variacion en el arco de 90° á 270°, y si no se atiende á los signos, basta que la variacion sea de 0 á 90°.

757.—Vamos, por último, á determinar todos los arcos á que puede pertenecer la misma cosecante positiva O Z. Llevando de O á Z en la fig. 358 la magnitud de la cosecante dada y tirando las tangentes Z B y Z D, se tendrán los arcos A B, y A C D á que corresponde dicha cosecante, pero ademas pertenecerá á todos los que resulten de agregar á estos una ó varias veces 360°. Si representamos por a el arco A B=D E, por x y x' los arcos variables que tienen la misma cosecante y por n un número entero cualquiera, se tiene:

$$Z\,O=\text{cosec }x=\text{cosec }x'$$

$$x=a+n.360^\circ \qquad x'=(180^\circ-a)+n.360^\circ$$

ó $\quad x'=180^\circ(2\,n+1)-a$

Si la cosecante es negativa, la llevaremos de O á Z', tiraremos las tangentes Z' H y Z' F y la misma cosecante pertenecerá á los arcos A C E G H, A C E F y á todos los que resulten de agregarles una ó varias veces 360°. Llamando a el arco A H=F E=B A, tendrán por expresion los arcos que tienen por cosecante á Z'O:

$$x=(360-a)+n.360=360(n+1)-a$$
$$x'=(180^\circ+a)+n.360^\circ=180^\circ(2\,n+1)+a$$

Si se conoce uno de los arcos á que pertenece una cosecante, se determinarán todos los demas agregándole un múltiplo cualquiera de 360°, que es un número par de semi-circunferencias; pero si se le agre-

ga un número impar de semi-circunferencias, se obtendrán los arcos que tienen cosecantes de la misma magnitud pero con signo contrario.

No nos ocuparemos del seno y coseno verso por ser líneas trigonométricas de poco uso, haciendo notar solamente que no se consideran como negativas, y que sus límites son 0 y 1.

758.—Arcos complementarios.—Del exámen minucioso que hemos hecho de todos los valores que puedan tener las líneas trigonométricas, al pasar un arco desde $-\infty$ hasta $+\infty$ resulta, que cuando se prescinde de los signos, una línea trigonométrica adquiere todas las magnitudes de que es susceptible cuando el arco cambia de 0° á 90°; pero si ademas de la línea trigonométrica directa, se considera la indirecta que le es correlativa, esto es, la que corresponde á su complemento, bastará la variacion de 0° á 45° para tener todos los valores de cada línea trigonométrica. En efecto, por las definiciones de las líneas trigonométricas indirectas, hemos visto que el coseno de un arco es el seno de su complemento; que la cotangente de un arco es la tangente de su complemento, etc., y recíprocamente. Así, pues,

$$\begin{array}{ll} \text{sen.}a=\cos.(90^\circ-a) & \cos.a=\text{sen.}(90^\circ-a) \\ \text{tang.}a=\cot.(90^\circ-a) & \cot.a=\text{tang.}(90^\circ-a)\,. \\ \sec.a=\text{cosec.}(90^\circ-a) & \text{cosec.}a=\sec.(90^\circ-a) \\ \text{sen. ver.}a=\cos.\text{ver.}(90^\circ-a) & \cos.\text{ver.}a=\text{sen. ver.}(90^\circ-a) \end{array}$$

y como por otra parte hemos visto que cuando se busca la línea trigonométrica de un arco $\pm A$ de un gran número de grados, hay siempre un arco $\pm a<90^\circ$ que tiene la misma línea trigonométrica, resulta que la determinacion de ésta queda reducida á la de arcos menores que 45° cuando se tienen reglas para fijar los signos de las expresadas líneas trigonométricas.

Cuando se consideran arcos de un gran número de grados, los complementos se estiman con respecto á la línea que en nuestras figuras hemos señalado de 90° á 270°, y *se llama complemento de un arco lo que con respecto á un número impar cualquiera de cuadrantes le falta ó le sobra.*

Los suplementos se estiman con respecto á la línea 0°, 180°, y *se llama suplemento de un arco lo que con respecto á un número par de cuadrantes le falta ó le sobra.*

759.—Leyes de las líneas trigonométricas deducidas de sus fórmulas.—En todo lo que antecede hemos determinado los valores y signos de las líneas trigonométricas, observando en la correspondiente figura cuál es la magnitud y la direccion de la línea que se considera para un arco dado; pero conociendo los valores del seno y coseno para un arco, puede deducirse el de las demas líneas trigonométricas analíticamente, fundándose en las fórmulas generales que hemos demostrado en el número 729.

De las consideraciones geométricas que hemos explicado en los números 733 y 738, resulta que los valores y variaciones del seno y coseno son las que constan en la siguiente tabla:

	Arco de 0°	En el 1er. cuadrante.	Arco de 90°	En el 2° cuadrante.	Arco de 180°	En el 3er. cuadrante.	Arco de 270	En el 4° cuadrante.
Seno	0	+crece	+1	+decrece	0	—crece	—1	—decrece
Coseno	+1	+decrece	0	—crece	—1	—decrece	0	+crece

Por otra parte, las fórmulas de las otras líneas trigonométricas, son:

$$\text{tang.a}=\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}},\quad \text{cot.a}=\frac{1}{\text{tang.a}},\quad \text{sec.a}=\frac{1}{\text{cos.a}},\quad \text{cosec.a}=\frac{1}{\text{sen.a}}$$

En consecuencia, el signo de *la tangente* dependerá del que tengan el seno y coseno. En los cuadrantes 1° y 3° en que ambas líneas tienen el mismo signo la tangente es positiva, y negativa en el 2° y 4° en que los signos del seno y coseno son diferentes. Las variaciones de la tangente dependen de las que tengan los términos del quebrado $\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}}$, y como cuando el seno aumenta el coseno disminuye, y vice-versa, resulta que ambas variaciones cooperan al mismo fin, así es que la tangente seguirá variaciones análogas á las que tiene el seno, que es el numerador de su valor, ó inversas á las del coseno; esto es, crecerá en el 1° y 3er. cuadrante, disminuyendo en el 2° y 4°. Cuando el numerador (el seno) sea 0, tambien lo será el valor de la tangente, y cuando el denominador (el coseno) sea 0, la tangente será infinita. Esto es, será nula cuando el arco sea 0° ó 180°, é infinita cuando sea de 90° ó de 270°.

Respecto de la *cotangente*, siendo su expresion $\frac{1}{\text{tang.a}}$ en la que el numerador es constante y positivo, su signo dependerá y será igual al

de la tangente, siendo positiva en el 1° y 3er. cuadrante, y negativa en el 2° y 4°. Como al crecer la tangente, que es el denominador de la expresion de la cotangente, disminuirá ésta, resulta que las variaciones de *la cotangente* son inversas de las de la tangente, esto es, decrece en el 1° y 3er. cuadrante, y crece en el 2° y 4°. Cuando la tangente es nula en 0° y 180° la cotangente será infinita, y cuando la tangente es ∞ en 90° y 270° la cotangente será 0.

En cuanto á *la secante*, cuya expresion es $\frac{1}{\text{cos.a}}$, su signo será el del coseno siendo positiva en el 1° y 4° cuadrante, y negativa en el 2° y 3°. Las variaciones de la secante serán opuestas á las del coseno, esto es, crecerá en el 1° y 3er. cuadrante, y decrecerá en el 2° y 4°. En los arcos de 0° y 180° en los que el coseno es igual á +1 y á —1 la secante será +1 y —1, y en los arcos de 90° y 270° en los que el coseno es 0 la secante es infinita.

Por último, *la cosecante* cuya expresion es $\frac{1}{\text{sen.a}}$, tendrá el mismo signo que el seno, siendo positiva en el 1° y 2° cuadrantes, y negativa en en el 3° y 4°. Sus variaciones serán inversas de las del seno, que es el denominador de su valor, por lo que decrece en el 1° y 3er. cuadrantes, y crece en el 2° y 4°. Para los arcos de 0° y 180° en los que el seno es nulo, la cosecante es infinita, y para 90° y 270° en los que el seno es +1 y —1 la cosecante es igual á +1 y á —1.

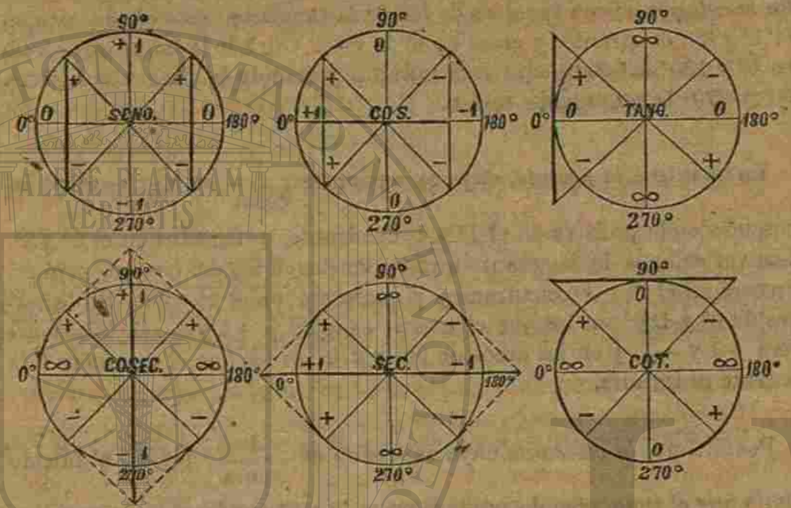
De la fórmula $\text{sen}^2\text{a}+\cos^2\text{a}=1$

inferimos que cuando el seno aumenta, el coseno disminuye, supuesto que la suma de sus cuadrados es constante, y que el mayor valor de cualquiera de estas líneas es el radio, en razon de que un sumando no puede ser mayor que la suma.

De la fórmula $\text{sen.ver.a}=1-\text{cos.a}$

inferimos que el seno verso nunca es negativo, supuesto que el cosen no puede ser mayor que 1.

760.—Representacion de los valores correlativos.—Con el objeto de facilitar á los alumnos que retengan en la memoria los valores correlativos de las líneas trigonométricas, indicaremos en la fig. 359 los signos que tienen en cada cuadrante, y sus valores al principio y fin de cada uno de ellos.



(Fig. 359)

761.—Leyes de los valores correlativos.—Vamos á procurar cifrar en un corto número de reglas las leyes que hemos observado y que se verifican en los valores de las líneas trigonométricas al pasar un arco *positivo* por sus diversas magnitudes. Consideraremos de cada línea trigonométrica los signos; en qué cuadrante crece y en cuáles decrece; sus valores límites; la amplitud del período; la relacion de las líneas de los arcos suplementarios y complementarios; y por último, haremos notar las analogías que hay entre las variaciones de diversas líneas.

Signos.—Tienen el mismo signo la tangente y la cotangente, el seno y la cosecante, el coseno y la secante. Todas las líneas trigonométricas son positivas en el 1^er^ cuadrante, y lo son igualmente en el 2° el seno y la cosecante, en el 3° la tangente y la cotangente, y en el 4° el coseno y la secante; siendo negativas en los otros dos cuadrantes.

Variaciones.—Las variaciones en magnitud de todas las líneas son alternativas al pasar de un cuadrante al siguiente. Esto es, si crece en el 1°, decrecerá el 2°, crecerá el 3° y decrecerá en el 4°. Todas *las líneas*

directas, seno, tangente y secante crecen en el 1° y 3^er^ cuadrante; y *las indirectas*, coseno, cotangente y cosecante, decrecen en el 1° y 3^er^ cuadrante; experimentando unas y otras variaciones en sentido inverso en los otros cuadrantes.

Valores límites.—El seno y coseno varían de 0 á $+1$ y á -1. La tangente y la cotangente de $+\infty$ á $-\infty$. La secante y la cosecante del ∞ á ± 1.

Amplitud del período.—Para la tangente y la cotangente es de 180°, y de 360° para todas las demas.

Arcos suplementarios.—El seno y la cosecante de un arco son iguales y del mismo signo que el seno y la cosecante de su suplemento. Las otras líneas son iguales pero tienen signo contrario.

Arcos complementarios.—Prescindiendo del signo, cualquiera línea trigonométrica directa es igual á la indirecta de su complemento.

Analogías.—Tienen el mismo signo el seno y la cosecante, la tangente y la cotangente, el coseno y la secante. En un cuadrante determinado todas las líneas directas crecen ó todas decrecen, mientras que en el mismo cuadrante todas las indirectas experimentan variaciones contrarias. Los valores límites de las líneas directas son iguales á los de sus indirectas.

762.—Terminaremos esta parte poniendo una tabla de los valores correlativos de los arcos y de las líneas trigonométricas, que los estudiantes podrán consultar en caso de duda, y dando la siguiente

Definicion.—*Se entiende por valores correlativos, la dependencia que existe entre el valor de un arco y la magnitud y signo de sus respectivas líneas trigonométricas.*

El estudio de los valores correlativos tiene por objeto observar las variaciones que en el valor de las líneas trigonométricas produce el cambio de magnitud ó de signo del arco, y determinar el arco menor que un cuadrante, cuya línea trigonométrica es igual á la del arco dado.

TABLA

DE LOS VALORES CORRELATIVOS DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.

ARCOS	SENO	COS	TANG	COT	SEC	COSEC
0°	0	1	0	∞	1	∞
a	+ sen a	+ cos a	+ tang a	+ cot a	+ sec a	+ cosec a
—a	—sen a	+ cos a	—tang a	—cot a	+ sec a	—cosec a
90°—a	+ cos a	+ sen a	+ cot a	+ tang a	+ cosec a	+ sec a
90°	1	0	∞	0	∞	1
90° + a	+ cos a	—sen a	—cot a	—tang a	—cosec a	+ sec a
180°—a	+ sen a	—cos a	—tang a	—cot a	—sec a	+ cosec a
180°	0	—1	0	∞	—1	∞
180° + a	—sen a	—cos a	+ tang a	+ cot a	—sec a	- -cosec a
270°—a	— cos a	—sen a	+ cot a	+ tang a	—cosec a	—sec a
270°	—1	0	∞	0	∞	—1
270° + a	— cos a	+ sen a	—cot a	—tang a	+ cosec a	—sec a
360°—a	—sen a	+ cos a	—tang a	—cot a	+ sec a	—cosec a
360°	0	1	0	∞	1	∞
360° + a	+ sen a	+ cos a	+ tang a	+ cot a	+ sec a	+ cosec a
n. 360°—a	—sen a	+ cos a	—tang a	—cot a	+ sec a	—cosec a
n. 360° + a	+ sen a	+ cos a	+ tang a	+ cot a	+ sec a	+ cosec a
(2k + 1)180°—a	+ sen a	—cos a	—tang a	—cot a	—sec a	+ cosec a
(2k + 1)180° + a	—sen a	—cos a	+ tang a	+ cot a	—sec a	—cosec a

763.—FUNCIONES INVERSAS.—Las expresiones

$$y = \text{sen } x \qquad y = \cos x \qquad y = \text{tang } x \text{ etc.}$$

en las que tanto *y*, como el arco *x* son cantidades variables se les llama *funciones circulares directas*. De ellas resultan las siguientes:

$$x = \text{arc. (sen } y) \qquad x = \text{arc. } (\cos y) \qquad x = \text{arc. (tang } y) \text{ etc.}$$

es decir, x=arco cuyo seno es y, x=arco cuyo coseno es y, etc., que se les llama *funciones circulares inversas*. Por lo que hemos explicado antes, se ve que las funciones inversas son completamente indeterminadas existiendo una infinidad de arcos que corresponden á la misma línea trigonométrica. Cuando se usan estas *funciones inversas*, para el seno, la cosecante, la tangente y la cotangente implícitamente se supone que los arcos están comprendidos entre —90° y +90°; y cuando se usan para el coseno y la secante, se supone que el arco está comprendido entre 0° y 180°. Con esta restriccion las expresiones

$$x = \text{arc. (sen } y) \qquad x = \text{arc. } (\cos y) \text{ etc.}$$

resultan determinadas y pueden emplearse como funciones circulares.

764.—PROBLEMAS.—I. *Determinar las líneas trigonométricas del arco de* 120°.

El seno de 120° será igual al de su suplemento, que en nuestro caso es de 60° y del mismo signo. Como el seno de $60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\text{sen. } 120° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

El coseno de 120° será negativo é igual al seno de 30°, que es el exceso sobre 90°. Esto es:

$$\cos. 120° = -\tfrac{1}{2}$$

$$\text{tang. } 120° = \frac{\text{sen } 120}{\cos 120} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \div -\tfrac{1}{2} = -\sqrt{3}$$

$$\cot. 120° = \frac{1}{\text{tang } 120} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{sec. } 120° = \frac{1}{\cos 120°} = 1 \div -\tfrac{1}{2} = -2$$

$$\text{cosec. } 120° = \frac{1}{\text{sen. } 120°} = 1 \div \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

II.—*Determinar las líneas trigonométricas del arco de 225°.*

Estando el arco comprendido entre 180° y 270°, sabemos que en el 3^er. cuadrante son positivas la tangente y la cotangente, y negativas todas las demas. Si del arco de 225° restamos 180° quedan 45° cuyas líneas trigonométricas tendrán el mismo valor que las del arco de 225°. Por tanto:

$$\text{sen. } 225° = -\text{sen. } 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{cos. } 225° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{tang. } 225° = \text{cot. } 225° = +1$$

$$\text{sec. } 225° = \text{cosec. } 225° = -\sqrt{2}$$

III.—*Determinar las líneas trigonométricas del arco de* 2580°.

Si dividimos 2580° por 360° nos queda de resta 60°, luego las líneas trigonométricas de 2580° serán las de 60° y por estar este arco en el 1^er. cuadrante, todas las líneas trigonométricas serán positivas. Esto es,

$$\text{sen. } 2580° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{cos. } ,, = \tfrac{1}{2}$$

$$\text{tang. } ,, = \sqrt{3}$$

$$\text{cot. } ,, = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{sec. } ,, = 2$$

$$\text{cosec. } ,, = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

IV.—*Determinar las líneas trigonométricas del arco negativo* —2460°.

Dividiendo 2460° por 360° se tiene la resta 300°; luego las líneas trigonométricas de 2460° tendrán la misma magnitud que las del arco de 300°. Para determinar su signo, notaremos que en el 4° cuadrante negativo, el seno y el coseno son positivos, así como todas las demas líneas trigonométricas. Como la diferencia de 300° á 360° es 60° las lí-

neas que buscamos son las que corresponden á 60° por su valor absoluto, afectándolas del signo correspondiente á —300°. Así, pues,

$$\text{sen. } -2460° = +\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{cos. } ,, = +\tfrac{1}{2}$$

$$\text{tang. } ,, = +\sqrt{3}$$

$$\text{cot. } ,, = +\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{sec. } ,, = 2$$

$$\text{cosec. } ,, = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

V.—¿A qué arcos corresponden los mismos senos y las mismas cosecantes?

A los arcos suplementarios y á todos los que resultan de agregar á uno y á otro una y varias veces 360°.

VI.—¿A qué arcos corresponden las mismas tangentes y cotangentes?

A los que resultan de agregar al arco que tiene la tangente ó la cotangente dada, una ó varias veces 180°.

VII.—¿A qué arcos corresponden los mismos cosenos y las mismas secantes?

A todos los que resulten de agregar una ó varias veces 360° al arco que tiene el coseno ó la secante dada.

VIII.—¿Cuáles son los valores de los arcos, cuyas líneas trigonométricas son: 1° seno $= -\frac{1}{2}$; 2° tang. $= -1$, y 3° sec. $= +2$?

1° Siendo el seno $-\frac{1}{2}$ negativo, corresponderá á un arco negativo ó á uno que esté en el 4° ó 3^er. cuadrante. Como $\frac{1}{2}$ = sen. 30, tomando el arco negativo podrá corresponder á los arcos —30, y —150 que es su suplemento y á todos los que resulten de agregarles una ó varias veces —360°. Tomando los arcos positivos, $-\frac{1}{2}$ es el seno de 180° + 30° = 210 y de 360° — 30° = 330°, y ademas de todos los que resulten de agregarles una ó varias veces 360°.

2° La tang. = —1 corresponderá á un arco negativo del 1° y 3^er. cuadrante, ó á uno positivo comprendido en el 2° y 4° cuadrante. Como 1 = tan. 45°. Los arcos negativos á que puede corresponder. serán: $-x = -45 - n.\ 180°$ y los positivos $x = (180° - 45) + n.180° = 135° + n.\ 180°$.

3° Como la secante es positiva en el 1° y 4° cuadrante y 2 =sec. 60° la secante igual á 2 corresponderá á los arcos de 60° y 360°—60 =300° y á todos los que resulten de agregarles n. veces 360°.

IX.—¿A qué arcos corresponden: 1° cotangente $= -\sqrt{3}$, y 2° cos. $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$?

1° Considerando los arcos positivos, teniendo presente que la cotangente es negativa en el 2° y 4° cuadrantes, que cot. 30° $= \sqrt{3}$ y que el período de la cotangente es el arco de 180°, resulta que los arcos á que pertenece cot. $= -\sqrt{3}$ serán: x = —30° + n. 180°. Los arcos negativos que tienen la misma cotangente, serán —x = —30—n. 180°.

2° Los arcos á que pertenece cos. $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$ serán ± 45° y ± 315° = 360°—45 y todos los que resulten de agregarles ± n. 360°.

Fórmulas generales de las líneas trigonométricas.

765.—Formulas relativas al seno y coseno de la suma de dos arcos.—*Conocidos los senos y cosenos de dos arcos* a *y* b, *se trata de determinar la expresion del seno y coseno de la suma y diferencia de estos arcos.*


(Fig. 360)

Sea AB=a (fig. 360) y BC=b; tendremos AC=a+b

BD=sen.a, DO=cos.a, CE=sen.b, EO=cos.b

CH=sen. (a+b), HO=cos. (a+b)

Por el punto E, pié del seno del arco CB, tirémos EF perpendicular á AO y EG paralela á este radio, y nos resultarán los triángulos EFO y EGC semejantes á BDO, el primero por ser EF paralela á BD y el segundo por ser los lados de EGC perpendiculares á los de BDO. De la inspeccion de la figura resulta:

$$CH = \text{sen.}\,(a+b) = EF + CG \ldots\ldots\ldots(A)$$
$$HO = \cos.\,(a+b) = OF - EG \ldots\ldots\ldots(B)$$

Vamos á determinar los valores de las cuatro rectas, EF, CG, OF y EG, en funcion de los senos y cosenos de *a* y de *b*, á cuyo fin compararemos los triángulos EFO y EGC con su semejante BDO.

Así, pues,

EF : EO :: BD : BO ó EF : cos.b :: sen.a : r, luego $EF = \frac{\text{sen.a cos.b}}{r}$

CG : CE :: DO : BO   CG : sen.b :: cos.a : r $CG = \frac{\text{sen.b cos.a}}{r}$

OF : EO :: DO : BO   OF : cos.b :: cos.a : r $OF = \frac{\text{cos.a cos.b}}{r}$

EG : CE :: BD : BO   EG : sen.b :: sen.a : r $EG = \frac{\text{sen.a sen.b}}{r}$

Sustituyendo los valores de estas cuatro líneas en las ecuaciones (A) y (B), resulta:

$$\text{sen.}(a+b) = \frac{\text{sen.a cos.b} + \text{sen.b cos.a}}{r}$$

$$\cos.(a+b) = \frac{\text{cos.a cos.b} - \text{sen.a sen.b}}{r}$$

y haciendo r=1, como anteriormente, á fin de simplificar nuestras fórmulas:

$$\text{sen.}(a+b) = \text{sen.a cos.b} + \text{sen.b cos.a} \ldots(12)$$
$$\cos.(a+b) = \text{cos.a cos.b} - \text{sen.a sen.b} \ldots(13)$$

Como las fórmulas que anteceden se han sacado geométricamente de una figura en la que se ha supuesto a+b<90° y en la que los arcos son positivos, vamos á demostrar analíticamente que son aplicables á todos los casos cualesquiera que sean los valores de dichos arcos. Para llegar á esta conclusion general demostraremos: 1° que las expresadas fórmulas subsisten para todos los valores de *a* y de *b* comprendidos entre 0° y 90°; 2° que subsisten igualmente cuando á cualquiera de los arcos se le agrega 90°; 3° que son aplicables para todos los valores positivos de los arcos; y 4° que lo son igualmente para los valores negativos.

1°.—*Las fórmulas* (12) *y* (13) *subsisten para todos los valores de* a *y de* b *comprendidos entre* 0° *y* 90°.

Habiéndose establecido estas fórmulas para el caso en que a+b<90°, vamos á suponer que se tenga:

$$a+b>90°$$

Sean a' y b' los complementos respectivos de *a* y de *b*, tendremos:

$$a=90^\circ-a'$$
$$b=90^\circ-b'$$

Sumando estas ecuaciones: $a+b=180^\circ-(a'+b')$. Así, pues, $(a+b)$ es suplemento de $(a'+b')$.

Despejando $$a'+b'=180^\circ-(a+b)$$

y como $(a+b)>90^\circ$ se infiere $a'+b'<90^\circ$, por lo cual las fórmulas (12) y (13) serán aplicables para los arcos a' y b'. Esto es,

$$\text{sen.}(a'+b')=\text{sen.}a' \text{ cos.}b'+\text{sen.}b' \text{ cos.}a'$$

y como el seno de un arco $(a'+b')$ es igual y del mismo signo que el de su suplemento $(a+b)$, y el seno de un arco es igual al coseno de su complemento y recíprocamente, sustituyendo en la última expresion, resulta:

$$\text{sen.}(a+b)=\text{cos.}a \text{ sen.}b+\text{cos.}b \text{ sen.}a$$

ordenando $$\text{sen.}(a+b)=\text{sen.}a \text{ cos.}b+\text{sen.}b \text{ cos.}a$$

luego la fórmula (12) subsiste cuando $(a+b)>90^\circ$ lo mismo que cuando era menor que 90°.

Siendo aplicable la fórmula (13) demostrada geométricamente para los arcos a' y b' tendremos:

$$\text{cos.}(a'+b')=\text{cos.}a' \text{ cos.}b'-\text{sen.}a' \text{ sen.}b'$$

Como el coseno de un arco $(a'+b')$ es igual al coseno de su suplemento $(a+b)$ tomado con signo contrario, y el seno de un arco es igual al coseno de su complemento y recíprocamente, sustituyendo, resulta:

$$-\text{cos.}(a+b)=\text{sen.}a \text{ sen.}b-\text{cos.}a \text{ cos.}b$$

cambiando signos $$\text{cos.}(a+b)=\text{cos.}a \text{ cos.}b-\text{sen.}a \text{ sen.}b$$

luego la fórmula (13) subsiste para el caso en que $(a+b)>90^\circ$.

2°—*Las fórmulas* (12) *y* (13) *subsisten igualmente cuando á cualquiera de los arcos* a *ó* b *se le agrega* 90°.

Por la hipótesis, las fórmulas (12) y (13) siendo aplicables á los arcos *a* y *b*, se tiene:

$$\text{sen.}(a+b)=\text{sen.}a \text{ cos.}b+\text{sen.}b \text{ cos.}a$$
$$\text{cos.}(a+b)=\text{cos.}a \text{ cos.}b-\text{sen.}a \text{ sen.}b$$

Si á uno de estos arcos, *a* por ejemplo, le agregamos 90°, tendremos:

$$a'=a+90^\circ$$

de donde $$a=a'-90^\circ$$

Sustituyendo en las fórmulas anteriores, se tiene:

$$\text{sen.}(a'+b-90^\circ)=\text{sen.}(a'-90^\circ) \text{ cos.}b+\text{sen.}b \text{ cos.}(a'-90^\circ) \ldots\ldots (A)$$
$$\text{cos.}(a'+b-90^\circ)=\text{cos.}(a'-90^\circ) \text{ cos.}b-\text{sen.}(a'-90^\circ) \text{ sen } b \ldots\ldots (B)$$

Fundándonos en que $\text{sen.}(-a)=-\text{sen.}a$ y en que $\text{cos.}(-a)=\text{cos.}a$, y en que $\text{sen }(90^\circ-a)=\text{cos.}a$ y en que $\text{cos.}(90^\circ-a)=\text{sen.}a$, tendremos:

$$\text{sen.}(a'+b-90^\circ)=-\text{sen.}(90^\circ-(a'+b))=-\text{cos.}(a'+b)$$
$$\text{sen.}(a'-90^\circ)=-\text{sen.}(90^\circ-a')=-\text{cos.}a'$$
$$\text{cos.}(a'-90^\circ)=\text{cos.}(90^\circ-a')=\text{sen.}a'$$
$$\text{cos.}(a'+b-90^\circ)=\text{cos.}(90^\circ-(a'+b))=\text{sen.}(a+b)$$

y sustituyendo se trasformará

la expresion (A) en $$-\text{cos.}(a'+b)=-\text{cos.}a' \text{ cos.}b+\text{sen.}b \text{ sen.}a'$$
cambiando signos: $$\text{cos.}(a'+b)=\text{cos.}a' \text{ cos.}b-\text{sen.}a' \text{ sen.}b$$
y la (B) en $$\text{sen.}(a'+b)=\text{sen.}a' \text{ cos.}b+\text{cos.}a' \text{ sen.}b$$

luego las fórmulas (12) y (13) subsisten igualmente cuando á uno de los arcos *a* se le agrega 90°, y se trasforma en *a'*.

3°—*Las fórmulas* (12) *y* (13) *son aplicables para todos los valores positivos de los arcos* a *y* b.

Supongamos, en efecto, que los arcos positivos *a* y *b* contengan respectivamente el primero *m* cuadrantes y el segundo *n* cuadrantes, de modo que

$$a=m.90^\circ+a'$$
$$b=n.90^\circ+b'$$

Como a' y b' son ambos menores que 90°, para ellos serán aplicables las fórmulas (12) y (13), y se tendrá:

$$\text{sen.}(a'+b')=\text{sen.}a' \text{ cos.}b'+\text{sen.}b' \text{ cos.}a'$$
$$\text{cos.}(a'+b')=\text{cos.}a' \text{ cos.}b'-\text{sen.}a' \text{ sen.}b'$$

Ahora bien: como segun el principio 3°, estas fórmulas subsisten si sucesivamente se agrega á a' ó b' una, dos, tres.... etc., veces, 90°, resulta que subsistirán para el caso en que a' se convierta en $a'+m\,90°=a$ y b' se cambie en $b'+n\,90°=b$, en consecuencia las fórmulas (12) y (13) son aplicables á dos arcos positivos, cualquiera que sea su magnitud.

4°—*Las fórmulas* (12) *y* (13) *son tambien aplicables para cuando a y b son negativos.*

Supongamos que cualquiera de estos arcos, ó ambos sean negativos, y designemos por m y n números bastante grandes para que $m.360°-a=a'$ y $n.360°-b=b'$ dén los arcos a' y b' positivos. Para estos arcos serán aplicables las fórmulas, (12) y (13) y se tendrá:

$$\text{sen.}(a'+b')=\text{sen.}a'\ \cos.b'+\text{sen.}b'\ \cos.a' \ldots\ldots (12)$$

sustituyendo por a' y b' sus valores:

$$a'=m.360°-a \text{ y } b'=n.360°-b$$

$$\text{sen.}[(m+n)360°-(a+b)]=\text{sen.}(m.360°-a)\cos.(n.360°-b)$$
$$+\text{sen.}(n.360°-b)\cos.(m.360°-a)$$

Recordando que $\quad \text{sen.}\,m.360°-a=-\text{sen.}a$

y que $\quad \cos.m.360°-a=+\cos.a$

tendremos:

$$-\text{sen.}(a+b)=-\text{sen.}a\ \cos.b-\text{sen.}b\ \cos.a$$

y cambiando signos resulta:

$$\text{sen.}(a+b)=\text{sen.}a\ \cos.b+\text{sen.}b\ \cos.a$$

que es la fórmula (12) aplicada á los arcos negativos a y b.

Ahora $\quad \cos.(a'+b')=\cos.a'\ \cos.b'-\text{sen.}a'\ \text{sen.}b' \ldots (13)$

sustituyendo:

$$\cos.[(m+n)360°-(a+b)]=\cos.(m.360°-a)\cos.(n.360°-b)$$
$$-\text{sen.}(m.360°-a)\text{sen.}(n.360°-b)$$

ó $\quad \cos.(a+b)=\cos.a\ \cos.b-\text{sen.}a\ \text{sen.}\ b$

que es la fórmula (13) aplicada á los arcos negativos.

En consecuencia, la generalidad de las fórmulas (12) y (13) queda completamente establecida.

De paso haremos notar, que como se habrá observado al tratar del 2° principio, la fórmula (13) puede deducirse de la (12) y recíprocamente reemplazando a por $90°+a$, ó b por $90°+b$.

766.—Seno y coseno de la diferencia de dos arcos.—Si en las fórmulas (12) y (13) reemplazamos +b por —b, y recordamos que $\text{sen.}(-a)=-\text{sen.}a$ y que $\cos.(-a)=\cos.a$, tendremos:

$$\text{sen.}(a-b)=\text{sen.}a\ \cos.b-\text{sen.}b\ \cos.a \ldots\ldots\ldots (14)$$
$$\cos.(a-b)=\cos.a\ \cos.b+\text{sen.}a\ \text{sen.}b \ldots\ldots\ldots (15)$$

767.—Seno y coseno de la suma y diferencia de varios arcos.—Si en la fórmula (12) reemplazamos el arco b por $b+c$, tendremos:

$$\text{sen.}(a+b+c)=\text{sen.}a\ \cos.(b+c)+\text{sen.}(b+c)\cos.a$$

poniendo por $\cos.(b+c)$ y $\text{sen.}(b+c)$ sus valores conforme á las fórmulas (12) y (13) se tiene:

$$\text{sen.}(a+b+c)=\text{sen.}a(\cos.b\ \cos.c-\text{sen.}b\ \text{sen.}c)+(\text{sen.}b\ \cos.c+\text{sen.}c\ \cos.b)\cos.a$$

$$\text{sen.}(a+b+c)=\text{sen.}a\ \cos.b.\ \cos.c+\text{sen.}b\ \cos.a\ \cos.c+\text{sen.}c\ \cos.a\ \cos.b$$
$$-\text{sen.}a\ \text{sen.}b\ \text{sen.}c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Si en esta fórmula reemplazáramos el arco c por $c+d$, fácilmente obtendriamos la expresion del $\text{sen.}(a+b+c+d)$, y se concibe el procedimiento que habria que emplear para obtener el seno de la suma de un número cualquiera de arcos.

Ahora, si en la fórmula (13) reemplazamos b por $b+c$, tendremos:

$$\cos.(a+b+c)+\cos.a\ \cos.(b+c)-\text{sen.}a\ \text{sen.}(b+c)$$

poniendo por $\cos.[b+c]$ y por $\text{sen.}[b+c]$ sus valores, se tiene:

$$\cos.[a+b+c]=\cos.a\ [\cos.b\ \cos.c-\text{sen.}b\ \text{sen.}c]-\text{sen.}a\ [\text{sen.}b\ \cos.c$$
$$+\text{sen.}c\ \cos.b]$$

$$\cos.[a+b+c]=\cos.a\ \cos.b\ \cos.c-\cos.a\ \text{sen.}b\ \text{sen.}c-\cos.b\ \text{sen.}a\ \text{sen.}c$$
$$-\cos.c\ \text{sen.}a\ \text{sen.}b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [17]$$

Si en las fórmulas [16] y [17] cambiamos signos á los arcos b y c, resulta:

$$\text{sen.}[a-b-c]=\text{sen.}a\ \cos.b\ \cos.c-\text{sen.}b\ \cos.a\ \cos.c$$
$$-\text{sen.}c\ \cos.a\ \cos.b-\text{sen.}a\ \text{sen.}b\ \text{sen.}c\ \ldots\ldots\ [18]$$

$$\cos.[a-b-c]=\cos.a\ \cos.b\ \cos.c-\cos.a\ \text{sen.}b\ \text{sen.}c$$
$$+\cos.b\ \text{sen.}a\ \text{sen.}c+\cos.c\ \text{sen.}a\ \text{sen.}b\ \ldots\ldots\ [19]$$

De este modo pueden obtenerse las expresiones del seno y coseno de la diferencia entre un arco *a* y un número cualquiera *b, c, d*....

768.—TANGENTE Y COTANGENTE DE LA SUMA Y LA DIFERENCIA.— Hemos visto [729] que

$\text{tang.}a=\dfrac{\text{sen.}a}{\cos.a}$, luego

$$\text{tang.}[a+b]=\frac{\text{sen.}[a+b]}{\cos.[a+b]}$$

poniendo por sen.[a+b] y por cos.[a+b] sus valores [12] y [13]

$$\text{tang.}[a+b]=\frac{\text{sen.}a\ \cos.b+\text{sen.}b\ \cos.a}{\cos.a\ \cos.b-\text{sen.}a\ \text{sen.}b}$$

dividiendo todos los términos por *cos.a cos.b*, se tiene:

$$\text{tang.}[a+b]=\frac{\dfrac{\text{sen.}a\ \cos.b}{\cos.a\ \cos.b}+\dfrac{\text{sen.}b\ \cos.a}{\cos.a\ \cos.b}}{\dfrac{\cos.a\ \cos.b}{\cos.a\ \cos.b}-\dfrac{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}{\cos.a\ \cos.b}}$$

reduciendo, y teniendo presente que $\dfrac{\text{sen.}a}{\cos.a}=\text{tang.}a$, resulta:

$$\text{tang.}[a+b]=\frac{\text{tang.}a+\text{tang.}b}{1-\text{tang.}a\ \text{tang.}b}\ \ldots\ldots\ (20)$$

Si en esta expresion cambiamos +b por —b, y recordamos que tang.[—b]=—tang.b, se tiene:

$$\text{tang.}[a-b]=\frac{\text{tang.}a-\text{tang.}b}{1+\text{tang.}a\ \text{tang.}b}\ \ldots\ [21]$$

Si en la fórmula [20] reemplazamos el arco *b* por *b+c*, tendremos:

$$\text{tang.}[a+b+c]=\frac{\text{tang.}a+\text{tang.}[b+c]}{1-\text{tang.}a\ \text{tang.}[b+c]}$$

poniendo por tang.[b+c] su valor

$$\text{tang.}[a+b+c]=\frac{\text{tang.}a+\dfrac{\text{tang.}b+\text{tang.}c}{1-\text{tang.}b\ \text{tang.}c}}{1-\text{tang.}a\dfrac{\text{tang.}b+\text{tang.}c}{1-\text{tang.}b\ \text{tang.}c}}$$

incorporando el entero al quebrado, tanto en el numerador como en el denominador

$$\text{tang.}[a+b+c]=\frac{\dfrac{\text{tang.}a-\text{tang.}a\ \text{tang.}b\ \text{tang.}c+\text{tang.}b+\text{tang.}c}{1-\text{tang.}b\ \text{tang.}c}}{\dfrac{1-\text{tang.}b\ \text{tang.}c-\text{tang.}a\ \text{tang.}b-\text{tang.}a\ \text{tang.}c}{1-\text{tang.}b\ \text{tang.}c}}$$

multiplicando el numerador y el denominador por (1—*tang.b tang.c*) y ordenando los términos resulta:

$$\text{tang.}\ (a+b+c)=\frac{\text{tang.}a+\text{tang.}b+\text{tang.}c-\text{tang.}a\ \text{tang.}b\ \text{tang.}c}{1-\text{tang.}a\ \text{tang.}b-\text{tang.}a\ \text{tang.}c-\text{tang.}b\ \text{tang.}c}\ (22)$$

Si cambiamos los signos á los arcos *b* y *c*, sus tangentes serán negativas y tendremos:

$$\text{tang.}\ (a-b-c)=\frac{\text{tang.}a-\text{tang.}b-\text{tang.}c-\text{tang.}a\ \text{tang.}b\ \text{tang.}c}{1+\text{tang.}a\ \text{tang.}b+\text{tang.}a\ \text{tang.}c-\text{tang.}b\ \text{tang.}c}\ (23)$$

Se comprende que empleando el mismo procedimiento obtendriamos las expresiones de tang.(a+b+c+d+....) y tang.(a—b—c—d—....)

Como $\cot.a=\dfrac{\cos.a}{\text{sen.}a}$, tendremos:

$$\cot.(a+b)=\frac{\cos.\ (a+b)}{\text{sen.}\ (a+b)}=\frac{\cos.a\ \cos.b-\text{sen.}a\ \text{sen.}b}{\text{sen.}a\ \cos.b+\text{sen.}b\ \cos.a}$$

dividiendo todos los términos por sen.a sen.b

$$\cot.\ (a+b)=\frac{\dfrac{\cos.a\ \cos.b}{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}-\dfrac{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}}{\dfrac{\text{sen.}a\ \cos.b}{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}+\dfrac{\text{sen.}b\ \cos.a}{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}}$$

reduciendo, y en virtud de que $\frac{\cos.a}{\operatorname{sen}.a}=\cot.a$, resulta:

$$\cot.\ (a+b)=\frac{\cot.a\cot.b-1}{\cot.b+\cot.a}\ldots\ldots\ldots(24)$$

Si se reemplaza $+b$ por $-b$, y se tiene presente que $\cot.(-a)=-\cot.a$, se tiene:

$$\cot.\ (a-b)=\frac{-\cot.a\cot.b-1}{-\cot.b+\cot.a}$$

cambiando signos al numerador y al denominador, resulta:

$$\cot.\ (a-b)=\frac{\cot.a\ \cot.b+1}{\cot.b-\cot.a}\ldots\ldots\ldots(25)$$

Empleando el mismo procedimiento que con la tangente, se pueden fácilmente determinar las expresiones de $\cot.(a+b+c)$, $\cot.(a-b-c)$, $\cot.\ (a\pm b\pm c\pm d\ldots.)$

769.—Fórmulas de los arcos múltiplos.—Si en la expresion

$$\operatorname{sen}.\ (a+b)=\operatorname{sen}.a\ \cos.b+\operatorname{sen}.b\ \cos.a$$

hacemos $b=a$, resultará:

$$\operatorname{sen}.\ 2\ a=2\ \operatorname{sen}.a\ \cos.a\ \ldots\ldots\ldots(26)$$

Si en la expresion:

$$\cos.\ (a+b)=\cos.a\ \cos.b-\operatorname{sen}.a\ \operatorname{sen}.b$$

hacemos $b=a$, resultará:

$$\cos.\ 2\ a=\cos^2a-\operatorname{sen}^2a\ldots\ldots\ldots(27)$$

Para obtener sen.3 a haremos en la expresion (12) de sen. $(a+b)$, $b=2a$, y tendremos:

$$\operatorname{sen}.\ 3\ a=\operatorname{sen}.a\ \cos.\ 2\ a+\operatorname{sen}.\ 2\ a\ \cos.a$$

sustituyendo por sen.2 a y por cos.2 a sus valores (26) y (27):

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}.\ 3\ a&=\operatorname{sen}.a\ (\cos^2a-\operatorname{sen}^2a)+2\ \operatorname{sen}.a.\cos.a.\cos.a\\&=\operatorname{sen}.a\ \cos^2a-\operatorname{sen}^3a+2\ \operatorname{sen}.a\ \cos^2a=3\ \operatorname{sen}.a\ \cos^2a-\operatorname{sen}^3a\\&=3\ \operatorname{sen}.a\ (1-\operatorname{sen}^2a)-\operatorname{sen}^3a\end{aligned}$$

$$\operatorname{sen}.\ 3\ a=3\ \operatorname{sen}.a-4\ \operatorname{sen}^3a\ldots\ldots\ldots(28)$$

Para obtener cos.3 a, en la expresion (13) de cos. $(a+b)$ haremos $b=2\ a$, y tendremos:

$$\cos.3\ a=\cos.a\ \cos.2\ a-\operatorname{sen}.a\ \operatorname{sen}.2\ a$$

Sustituyendo por sen.2 a y por cos.2 a sus valores, se tiene:

$$\begin{aligned}\cos.3\ a&=\cos.a\ (\cos^2a-\operatorname{sen}^2a)-\operatorname{sen}.a\ 2\ \operatorname{sen}.a\ \cos.a\\&=\cos^3a-\cos.a\ \operatorname{sen}^2a-2\ \operatorname{sen}^2a\ \cos.a\\&=\cos^3a-3\ \cos.a\ \operatorname{sen}^2a=\cos^3a-3\ \cos.a\ (1-\cos^2a)\end{aligned}$$

$$\cos.3\ a=4\ \cos^3a-3\ \cos.a\ldots\ldots\ldots(29)$$

Ampliando este procedimiento pueden obtenerse las fórmulas de los senos y cosenos de los arcos 4 a, 5 a, etc.

Si en la expresion (20)

$$\operatorname{tang}.\ (a+b)=\frac{\operatorname{tang}.a+\operatorname{tang}.b}{1-\operatorname{tang}.a\operatorname{tang}.b}$$

hacemos $b=a$, se tiene

$$\operatorname{tang}.\ 2\ a=\frac{2\ \operatorname{tang}.a}{1-\operatorname{tang}^2a}\ldots\ldots\ldots(30)$$

Si en la misma expresion (20) hacemos $b=2\ a$, tendremos:

$$\operatorname{tang}.\ 3\ a=\frac{\operatorname{tang}.\ a+\operatorname{tang}.\ 2\ a}{1-\operatorname{tang}.a\ \operatorname{tang}.2\ a}=\frac{\operatorname{tang}.a+\dfrac{2\ \operatorname{tang}.a}{1-\operatorname{tang}^2a}}{1-\operatorname{tang}.a\dfrac{2\ \operatorname{tang}.a}{1-\operatorname{tang}^2a}}$$

reduciendo los enteros á la forma de los quebrados que los acompañan, y suprimiendo despues el denominador $1-\operatorname{tang}^2a$, que es comun á los dos términos del quebrado, resulta:

$$\operatorname{tang}.\ 3\ a=\frac{3\ \operatorname{tang}.a-\operatorname{tang}^3a}{1-3\ \operatorname{tang}^2a}\ldots\ldots\ldots(31)$$

Si en la fórmula (24)

$$\cot.\ (a+b)=\frac{\cot.a\ \cot.b-1}{\cot.b+\cot.a}$$

hacemos $b=a$, se tiene:

$$\cot.\ 2\ a=\frac{\cot^2a-1}{2\ \cot.a}\ldots\ldots\ldots(32)$$

Dividiendo todos los términos de esta expresion por *cot.a*, se le puede dar otra forma en que suele usarse:

$$\cot.\ 2\,a=\tfrac{1}{2}\,(\cot.a-\tan g.a)$$

Si en la expresion (31) sustituimos por las tangentes sus valores en funcion de la cotangente,

$$\tan g.a=\frac{1}{\cot.a}$$

tendrémos:

$$\frac{1}{\cot.\,3\,a}=\frac{\dfrac{3}{\cot.a}-\dfrac{1}{\cot^3a}}{1-\dfrac{3}{\cot^2a}}=\frac{\dfrac{3\cot^2a}{\cot^3a}-\dfrac{1}{\cot^3a}}{\dfrac{\cot^3a}{\cot^3a}-\dfrac{3\cot.a}{\cot^3a}}$$

ó

$$\frac{1}{\cot.\,3\,a}=\frac{3\cot^2a-1}{\cot^3a-3\cot.a}$$

luego

$$\cot.\ 3\,a=\frac{\cot^3a-3\cot.a}{3\cot^2a-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(33)$$

770.—Formulas de los arcos de la mitad.—Para determinar el seno de un arco en funcion del seno y coseno de la mitad, si en la expresion (26)

$$\text{sen.}\ 2\,a=2\ \text{sen.}a\cos.a$$

reemplazamos el arco a por $\frac{1}{2}\,a$, tendrémos:

$$\text{sen.}a=2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,a\cos.\ \tfrac{1}{2}\,a\ldots\ldots\ldots(34)$$

Para determinar el coseno en funcion del seno y coseno de la mitad de un arco, si en la fórmula (27)

$$\cos.\ 2\,a=\cos^2a-\text{sen}^2a$$

reemplazamos el arco a por $\frac{1}{2}\,a$, tendrémos:

$$\cos.a=\cos^2\tfrac{1}{2}\,a-\text{sen}^2\tfrac{1}{2}a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(35)$$

Por otra parte (729) $1=\text{sen}^2\frac{1}{2}\,a+\cos^2\frac{1}{2}\,a$

Con el objeto de eliminar $\cos^2\frac{1}{2}\,a$, que tiene el mismo signo en estas ecuaciones, restarémos de la última ecuacion la (35) y se tiene:

$$1-\cos.a=2\ \text{sen}^2\tfrac{1}{2}\,a$$

de la que resulta:

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{1-\cos.a}{2}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(36)$$

Para eliminar $\text{sen}^2\frac{1}{2}\,a$, que tiene signos diferentes en las mismas ecuaciones, las sumarémos, y se tiene:

$$1+\cos.a=2\cos^2\tfrac{1}{2}\,a$$

de la que resulta: $\cos.\ \frac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{1+\cos.a}{2}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(37)$

Estando expresados el seno y coseno de la mitad por un radical de 2° grado, implícitamente precedido del signo $\pm$, cada una de estas líneas tiene dos valores iguales y de signo contrario, habiéndonos resultado ambas en funcion del coseno de a. La razon de esto es, que todo coseno corresponde á dos arcos [738] que podemos representar por el arco $n.360°+a$ y $n.360°-a$, en cuyas expresiones n es un número entero cualquiera que puede ser nulo. De consiguiente, si se busca sen $\frac{1}{2}$ a ó cos $\frac{1}{2}$ a en funcion de cos.a, el cálculo debe dar al mismo tiempo los senos así como los cosenos de las mitades de todos los arcos comprendidos en las expresiones $n.360°+a$ y $n.360°-a$, es decir, que se deben tener todos los valores comprendidos en

$$\text{sen.}\left(\frac{n.\ 360°\pm a}{2}\right)\ \text{ó en}\ \cos.\left(\frac{n.\ 360°\pm a}{2}\right)$$

En la práctica, cuando se conoce el valor numérico del arco a ó por lo menos el cuadrante en que termina, valiéndonos de los valores correlativos del seno y coseno, siempre es fácil determinar el signo que debe tomarse. Por ejemplo, si $a<90°$, que es el caso mas comun, $\frac{a}{2}<45$, y como el seno y coseno de un arco menor que 90° son positivos, tomarémos para sen. $\frac{1}{2}$ a y cos. $\frac{1}{2}$ a el signo + del radical. Esto es, nuestras fórmulas, $\text{sen}\ \frac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{1-\cos.a}{2}}$ y $\cos\frac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{1+\cos.a}{2}}$ son las adecuadas para el caso en que el arco a sea menor que 90°.

Considerando el triángulo rectángulo formado por el radio, el seno y el coseno, si el ángulo del centro es menor que 45°, el ángulo formado por el radio y el seno será mayor que 45°, y como al ángulo mayor está opuesto el mayor lado, resulta que para arcos menores que 45° el coseno es mayor que el seno.

En las fórmulas obtenidas, el seno y coseno de la mitad están en funcion de cos.a. Si se quieren determinar en funcion del seno procederemos como sigue. Se sabe que

$$1=\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\,a+\cos^2\tfrac{1}{2}\,a$$
$$\text{sen.}a=2\ \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\,a\ \cos\ \tfrac{1}{2}\,a$$

Si se suman estas dos ecuaciones, se tiene:

$$1+\text{sen.}a=\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\,a+2\ \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\,a\cos\tfrac{1}{2}\,a+\cos^2\tfrac{1}{2}\,a=(\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\,a+\cos.\tfrac{1}{2}\,a)^2\,..\,[A]$$

Si se restan las mismas ecuaciones, se tiene:

$$1-\text{sen.}a=\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\,a-2\ \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\,a\cos\tfrac{1}{2}\,a+\cos^2\tfrac{1}{2}\,a=(\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\,a-\cos.\tfrac{1}{2}\,a)^2\,..\,[B]$$

Extrayendo raíz á las ecuaciones [A] y [B] resulta:

$$\sqrt{1+\text{sen.}a}=\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\,a+\cos.\tfrac{1}{2}a$$
$$\sqrt{1-\text{sen.}a}=\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,a-\cos.\ \tfrac{1}{2}\,a$$

Conociendo la suma y la diferencia de sen. ½ a y cos ½ a, la mayor de estas cantidades será igual á la mitad de la suma más la mitad de la diferencia, y la menor á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia (226 V) Así, pues:

$$\text{Cuando sen}\ \tfrac{1}{2}\,a>\cos.\tfrac{1}{2}\,a\,..\ \begin{cases}\text{sen.}\tfrac{1}{2}\,a=\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen.}a}+\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen.}a}\\ \cos.\tfrac{1}{2}\,a=\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen.}a}-\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen.}a}\end{cases}$$

$$\text{Cuando sen}\ \tfrac{1}{2}\,a<\cos.\tfrac{1}{2}\,a\,..\ \begin{cases}\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,a=\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen.}a}-\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen.}a}\\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,a=\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen.}a}+\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen.}a}\end{cases}$$

Estas expresiones pueden reasumirse en las dos siguientes:

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,a=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen.}a}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen.}a}\ \ldots\ldots(38)$$
$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\,a=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen.}a}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen.}a}\ \ldots\ldots(39)$$

Cuyos signos se determinarán conociendo el valor del arco *a* y sabiendo si el seno de ½ a es mayor ó menor que cos. ½ a, segun acabamos de explicarlo.

771.—Tangente de la mitad.—Fundándonos en la expresion [4] (729) $\text{tang.}a=\frac{\text{sen.}a}{\cos.a}$, tenemos:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a=\frac{\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\,a}{\cos\ \tfrac{1}{2}\,a}$$

Reemplazando por sen. ½ a y por cos. ½ a sus valores [36] y [37] y reduciendo resulta:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{1-\cos.a}{1+\cos.a}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(40)$$

á esta expresion se le suele dar otras formas. Multiplicando los dos términos dentro del radical por (1 + cos.a), se tiene:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{(1-\cos a)\ (1+\cos.a)}{(1+\cos.a)^2}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2a}}{1+\cos.a}=\frac{\sqrt{\text{sen}^2a}}{1+\cos.a}$$

luego:
$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a=\frac{\text{sen.}a}{1+\cos.a}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(41)$$

Si los términos del quebrado de la expresion (40) se multiplican por (1—cos.a), resulta:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a=\frac{1-\cos.a}{\text{sen.}a}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(42)$$

Si se quiere determinar el valor de tang. ½ a en funcion de *tang.a*, procederémos como sigue:

La expresion (30) dá: $\text{tang.}\ 2a=\frac{2\ \text{tang.}a}{1-\text{tang}^2a}$

Reemplazando el arco a por ½ a, resulta:

$$\text{tang.}a=\frac{2\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a}{1-\text{tang}^2\tfrac{1}{2}\,a}$$

se trata, pues, de despejar á tang. ½ a de esta ecuacion. Quitando el denominador, se tiene:

$$\text{tang.}a-\text{tang.}a\ \text{tang}^2\tfrac{1}{2}\,a=2\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a$$

trasladando y dividiendo todos los términos por tang.a, resulta:

$$1=\text{tang}^2\ \tfrac{1}{2}\,a+\frac{2}{\text{tang.}a}\,\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a$$

Despejando á tang. ½ a en esta ecuacion mixta de segundo grado resulta:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a=\frac{-1}{\text{tang.}a}\pm\sqrt{\frac{1}{\text{tang}^2a}+1}$$

incorporando el entero al quebrado dentro del radical y sacando fuera de éste el denominador, se tiene definitivamente:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\text{ a}=-\frac{1}{\text{tang.a}}\pm\frac{1}{\text{tang.a}}\sqrt{1+\text{tang}^2\text{a}}\ldots\ldots\ldots(43)$$

De esta expresion, resultan dos valores para tang. ½ a segun sea el signo que se tome del radical, lo cual procede de que como hemos visto (745) toda tangente corresponde igualmente al arco a y á $180^\circ + a$ siendo como es 180° la amplitud del período de la tangente; pero cuando se conoce el valor del arco a ó por lo menos el cuadrante en que termina, desde luego puede determinarse el signo que debe adoptarse para tang. ½ a. Por ejemplo, si a $< 90^\circ$, tang. ½ a, lo mismo que tang. a serán positivas y la fórmula correspondiente debe ser en este caso:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\text{ a}=-\frac{1}{\text{tang.a}}+\frac{1}{\text{tang.a}}\sqrt{1+\text{tang}^2\text{a}}$$

772.—Cotangente de la mitad.—Siendo el valor de $\text{cot.a}=\frac{\text{cos.a}}{\text{sen.a}}$,

se tiene $\qquad \text{cot. } \tfrac{1}{2}\text{ a}=\frac{\text{cos } \tfrac{1}{2}\text{ a}}{\text{sen } \tfrac{1}{2}\text{ a}}$

reemplazando por cos. ½ a y sen ½ a sus valores (37) y (36) y reduciendo, resulta:

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\text{ a}=\sqrt{\frac{1+\text{cos. a}}{1-\text{cos. a}}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(44)$$

si se multiplican los dos términos del quebrado por [1 + cos. a], resulta:

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\text{ a}=\frac{1+\text{cos.a}}{\text{sen.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(45)$$

y si se multiplican por [1—cos.a], se tendrá:

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\text{ a}=\frac{\text{sen.a}}{1-\text{cos.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(46)$$

Si se quiere el valor de cot. ½ a en funcion de cot. a, procederémos como sigue:

Fórmula (32) $\qquad \text{cot. 2 a}=\frac{\text{cot}^2\text{a}-1}{2\text{ cot.a}}$

reemplazando el arco a por ½ a, se tiene:

$$\text{cot. a}=\frac{\text{cot.}^2\ \tfrac{1}{2}\text{ a}-1}{2\text{ cot. }\tfrac{1}{2}\text{ a}}$$

quitando el denominador: $\quad 2\text{ cot.a cot. }\tfrac{1}{2}\text{ a}=\text{cot}^2\ \tfrac{1}{2}\text{ a}-1$

trasladando: $\quad 1=\text{cot}^2\ \tfrac{1}{2}\text{ a}-2\text{ cot.a cot. }\tfrac{1}{2}\text{ a}$

despejando á cot. ½ a de esta ecuacion mixta de segundo grado, resulta:

$$\text{cot. }\tfrac{1}{2}\text{ a}=\text{cot.a}\pm\sqrt{\text{cot}^2\text{a}+1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(47)$$

Despues de haber tratado de las fórmulas relativas á la suma y diferencia de los arcos, de las de los arcos múltiplos y de los arcos de la mitad, vamos á establecer otras expresiones que fácilmente se deducen de estas fórmulas.

773.—Expresiones del cuadrado de algunas lineas.— Hemos visto que

$$\text{cos.2 a}=\text{cos}^2\text{a}-\text{sen}^2\text{a}\ldots\text{fórmula (18)}$$

reemplazando por cos^2a su valor: $1-\text{sen}^2\text{a}$, se tiene:

$$\text{cos.2 a}=1-2\text{ sen}^2\text{a}$$

despejando á $\qquad \text{sen}^2\text{a}=\frac{1-\text{cos. 2 a}}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(48)$

si se sustituye el valor de $\text{sen}^2\text{a}=1-\text{cos}^2\text{a}$ en la misma fórmula (18), se tiene:

$$\text{cos. 2 a}=\text{cos}^2\text{a}-1+\text{cos}^2\text{a}=2\text{ cos}^2\text{a}-1$$

despejando á $\qquad \text{cos}^2\text{a}=\frac{1+\text{cos. 2 a}}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(49)$

Dividiendo la (48) por la (49) y en virtud de que $\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}}=\text{tang.a}$, resulta:

$$\text{tang}^2\text{a}=\frac{1-\text{cos. 2 a}}{1+\text{cos. 2 a}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(50)$$

Dividiendo la (49) por la (48), y en razon de que $\cot.a = \frac{\cos.a}{\operatorname{sen}.a}$, se tiene:

$$\cot^2 a = \frac{1+\cos.\ 2\,a}{1-\cos.\ 2\,a} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

Hemos visto (729) que

$$\operatorname{sen}^2 a = 1-\cos^2 a$$
$$\operatorname{sen}^2 b = 1-\cos^2 b$$

restando estas ecuaciones, miembro á miembro, resulta:

$$\operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

774.—RELACIONES DEL SENO Y COSENO DE LA SUMA AL SENO Y COSENO DE LA DIFERENCIA.—En el número 765 hemos demostrado las siguientes expresiones:

fórmula (12) $\operatorname{sen}.(a+b) = \operatorname{sen}.a\,\cos.b + \operatorname{sen}.b\,\cos.a$
(14) $\operatorname{sen}.(a-b) = \operatorname{sen}.a\,\cos.b - \operatorname{sen}.b\,\cos.a$
(13) $\cos.(a+b) = \cos.a\,\cos.b - \operatorname{sen}.a\,\operatorname{sen}.b$
(15) $\cos.(a-b) = \cos.a\,\cos.b + \operatorname{sen}.a\,\operatorname{sen}.b$

Dividiendo la ecuacion (12) por la (14), se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen}.(a+b)}{\operatorname{sen}.(a-b)} = \frac{\operatorname{sen}.a\,\cos.b + \operatorname{sen}.b\,\cos.a}{\operatorname{sen}.a\,\cos.b - \operatorname{sen}.b\,\cos.a}$$

dividiendo los términos del quebrado del 2° miembro por *cos.a cos.b*, resulta:

$$\frac{\operatorname{sen}.(a+b)}{\operatorname{sen}.(a-b)} = \frac{\operatorname{tang}.a + \operatorname{tang}.b}{\operatorname{tang}.a - \operatorname{tang}.b} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

Si se dividen miembro á miembro la ecuacion (13) por la (15), se tiene:

$$\frac{\cos.(a+b)}{\cos.(a-b)} = \frac{\cos.a\,\cos.b - \operatorname{sen}.a\,\operatorname{sen}.b}{\cos.a\,\cos.b + \operatorname{sen}.a\,\operatorname{sen}.b}$$

dividiendo los términos del quebrado del 2° miembro por *cos.a sen.b*, resulta:

$$\frac{\cos.(a+b)}{\cos.(a-b)} = \frac{\cot.b - \operatorname{tang}.a}{\cot.b + \operatorname{tang}.a} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

775.—PRODUCTOS DE LOS SENOS Y COSENOS.—Considerando las fórmulas (12) y (14), tenemos:

$$\operatorname{sen}.[a+b] = \operatorname{sen}.a\,\cos.b + \operatorname{sen}.b\,\cos.a$$
$$\operatorname{sen}.[a-b] = \operatorname{sen}.a\,\cos.b - \operatorname{sen}.b\,\cos.a$$

Combinando estas fórmulas por adicion y sustraccion, se tiene.

$$\operatorname{sen}.[a+b] + \operatorname{sen}.[a-b] = 2\,\operatorname{sen}.a\,\cos.b$$
$$\operatorname{sen}.[a+b] - \operatorname{sen}.[a-b] = 2\,\operatorname{sen}.b\,\cos.a$$

De las que resulta:

$$\operatorname{sen}.a\,\cos.b = \tfrac{1}{2}\,\operatorname{sen}.[a+b] + \tfrac{1}{2}\,\operatorname{sen}.[a-b] \;\ldots\ldots (55)$$
$$\operatorname{sen}.b\,\cos.a = \tfrac{1}{2}\,\operatorname{sen}.[a+b] - \tfrac{1}{2}\,\operatorname{sen}.[a-b] \;\ldots\ldots (56)$$

Las fórmulas (13) y (15):

$$\cos.[a+b] = \cos.a\,\cos.b - \operatorname{sen}.a\,\operatorname{sen}.b$$
$$\cos.[a-b] = \cos.a\,\cos.b + \operatorname{sen}.a\,\operatorname{sen}.b$$

combinándolas por adicion y sustraccion, dan:

$$\cos.[a+b] + \cos.[a-b] = 2\,\cos.a\,\cos.b$$
$$\cos.[a-b] - \cos.[a+b] = 2\,\operatorname{sen}.a\,\operatorname{sen}.b$$

De las que resulta:

$$\cos.a\,\cos.b = \tfrac{1}{2}\,\cos.[a+b] + \tfrac{1}{2}\,\cos.[a-b] \;\ldots\ldots (57)$$
$$\operatorname{sen}.a\,\operatorname{sen}.b = \tfrac{1}{2}\,\cos.[a-b] - \tfrac{1}{2}\,\cos.[a+b] \;\ldots\ldots (58)$$

776.—SUMA Y DIFERENCIA DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.—En el párrafo anterior hemos visto que combinando por adicion y sustraccion las fórmulas relativas al seno y coseno de la suma de dos arcos con las de su diferencia, se tiene:

$$\operatorname{sen}.[a+b] + \operatorname{sen}.[a-b] = 2\,\operatorname{sen}.a\,\cos.b$$
$$\operatorname{sen}.[a+b] - \operatorname{sen}.[a-b] = 2\,\operatorname{sen}.b\,\cos.a$$
$$\cos.[a+b] + \cos.[a-b] = 2\,\cos.a\,\cos.b$$
$$\cos.[a-b] - \cos.[a+b] = 2\,\operatorname{sen}.a\,\operatorname{sen}.b$$

Ahora bien, si hacemos $a+b=p$, y $a-b=q$, resultará: (266 V.)

$$a = \tfrac{1}{2}\,[p+q] \quad b = \tfrac{1}{2}\,[p-q]$$

y sustituyendo estos valores en las cuatro ecuaciones anteriores, resulta:

$$\text{sen.}p+\text{sen.}q=2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,[p+q]\cos.\ \tfrac{1}{2}\,[p-q]\ \ldots\ldots (59)$$
$$\text{sen.}p-\text{sen.}q=2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,[p-q]\cos.\ \tfrac{1}{2}\,[p+q]\ \ldots\ldots (60)$$
$$\cos.q+\cos.p=2\cos.\ \tfrac{1}{2}\,[p+q]\cos.\ \tfrac{1}{2}\,[p-q]\ \ldots\ldots (61)$$
$$\cos.q-\cos.p=2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,[p+q]\,\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,[p-q]\ \ldots\ldots (62)$$

Debemos hacer notar, que siendo el arco $p>q$ se tiene $\cos.p<\cos.q$, porque en el 1er. cuadrante al aumentar el arco disminuye el coseno. Estas cuatro últimas fórmulas suelen ser de uso frecuente, especialmente para hacer adecuadas al empleo de los logaritmos algunas expresiones trigonométricas, supuesto que una funcion de suma y diferencia se trasforma en otra de producto.

$$\text{tang.}a+\text{tang.}b=\frac{\text{sen.}a}{\cos.a}+\frac{\text{sen.}b}{\cos.b}=\frac{\text{sen.}a\cos.b+\text{sen.}b\cos.a}{\cos.a\ \cos.b}$$

$$\text{luego (12)}\quad \text{tang.}a+\text{tang.}b=\frac{\text{sen.}[a+b]}{\cos.a\cos.b}\ \ldots\ldots (63)$$

$$\text{tang.}a-\text{tang.}b=\frac{\text{sen.}a}{\cos.a}-\frac{\text{sen.}b}{\cos.b}=\frac{\text{sen.}a\cos.b-\text{sen.}b\cos.a}{\cos.a\cos.b}$$

$$\text{luego (14)}\quad \text{tang.}a-\text{tang.}b=\frac{\text{sen.}[a-b]}{\cos.a\cos.b}\ \ldots\ldots (64)$$

$$\cot.a+\cot.b=\frac{\cos.a}{\text{sen.}a}+\frac{\cos.b}{\text{sen.}b}=\frac{\text{sen.}b\cos.a+\text{sen.}a\cos.b}{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}$$

$$\text{luego (12)}\quad \cot.a+\cot.b=\frac{\text{sen.}[b+a]}{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}\ \ldots\ldots (65)$$

$$\cot.a-\cot.b=\frac{\cos.a}{\text{sen.}a}-\frac{\cos.b}{\text{sen.}b}=\frac{\text{sen.}b\cos.a-\text{sen.}a\cos.b}{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}$$

$$\text{luego (14)}\quad \cot.a-\cot.b=\frac{\text{sen.}[b-a]}{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}\ \ldots\ldots (66)$$

777.—Relaciones entre la suma y diferencia de las lineas trigonométricas.—Las siguientes expresiones se obtienen dividiendo sucesivamente las ecuaciones:

$$\text{59 por 60 y simplificando da:}\ \frac{\text{sen.}p+\text{sen.}q}{\text{sen.}p-\text{sen.}q}=\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\,[p+q]}{\text{tang.}\frac{1}{2}\,[p-q]}\ \ldots\ldots (67)$$

59 por 61 $$\frac{\text{sen.}p+\text{sen.}q}{\cos.q+\cos.p}=\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,(p+q)\ \ldots\ldots (68)$$

59 por 62 $$\frac{\text{sen.}p+\text{sen.}q}{\cos.q-\cos.p}=\cot.\tfrac{1}{2}\,(p-q)\ \ldots\ldots (69)$$

60 por 61 $$\frac{\text{sen.}p-\text{sen.}q}{\cos.q+\cos.p}=\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,(p-q)\ \ldots\ldots (70)$$

60 por 62 $$\frac{\text{sen.}p-\text{sen.}q}{\cos.q-\cos.p}=\cot.\tfrac{1}{2}\,(p+q)\ \ldots\ldots (71)$$

61 por 62 $$\frac{\cos.q+\cos.p}{\cos.q-\cos.p}=\cot.\tfrac{1}{2}(p+q)\cot.\tfrac{1}{2}(p-q).\ (72)$$

63 por 64 $$\frac{\text{tang.}a+\text{tang.}b}{\text{tang.}a-\text{tang.}b}=\frac{\text{sen.}(a+b)}{\text{sen.}(a-b)}\ \ldots\ldots (73)$$

65 por 66 $$\frac{\cot.a+\cot.b}{\cot.a-\cot.b}=\frac{\text{sen.}(b+a)}{\text{sen.}(b-a)}\ \ldots\ldots (74)$$

778.—Las fórmulas fundamentales y las que hemos demostrado en los párrafos anteriores, las reunirémos en la siguiente tabla con el doble objeto de que los alumnos las graven en su memoria, y para que, consultándola, puedan fácilmente resolver cualquiera duda. En todas se ha supuesto el radio igual á 1.

Tabla de las principales fórmulas de Trigonometría rectilínea.

$$1=\text{sen}^2a+\cos^2a\ \ldots\ldots (1)$$
$$\sec^2a=1+\text{tang}^2a\ \ldots\ldots (2)$$
$$\text{cosec}^2a=1+\cot^2a\ \ldots\ldots (3)$$
$$\text{tang.}a=\frac{\text{sen.}a}{\cos.a}\ \ldots\ldots (4)$$
$$\sec.a=\frac{1}{\cos.a}\ \ldots\ldots (5)$$
$$\text{cosec.}a=\frac{1}{\text{sen.}a}\ \ldots\ldots (6)$$
$$\cot.a=\frac{\cos.a}{\text{sen.}a}\ \ldots\ldots (7)$$

$$\text{cot.a} = \frac{1}{\text{tang.a}} \quad (8)$$

$$\text{tang.a} = \frac{1}{\text{cot.a}} \quad (9)$$

$$\text{sen. ver.a} = 1 - \text{cos.a} \quad (10)$$

$$\text{cos. ver.a} = 1 - \text{sen.a} \quad (11)$$

$$\text{sen.}(a+b) = \text{sen.a cos.b} + \text{sen.b cos.a} \quad (12)$$

$$\text{cos.}(a+b) = \text{cos.a cos.b} - \text{sen.a sen.b} \quad (13)$$

$$\text{sen.}(a-b) = \text{sen.a cos.b} - \text{sen.b cos.a} \quad (14)$$

$$\text{cos.}(a-b) = \text{cos.a cos.b} + \text{sen.a sen.b} \quad (15)$$

$$\text{sen.}(a+b+c) = \text{sen.a cos.b cos.c} + \text{sen.b cos.a cos.c} + \text{sen.c cos.a cos.b} - \text{sen.a sen.b sen.c} \quad (16)$$

$$\text{cos.}(a+b+c) = \text{cos.a cos.b cos.c} - \text{cos.a sen.b sen.c} - \text{cos.b sen.a sen.c} - \text{cos.c sen.a sen.b} \quad (17)$$

$$\text{sen.}(a-b-c) = \text{sen.a cos.b cos.c} - \text{sen.b cos.a cos.c} - \text{sen.c cos.a cos.b} - \text{sen.a sen.b sen.c} \quad (18)$$

$$\text{cos.}(a-b-c) = \text{cos.a cos.b cos.c} - \text{cos.a sen.b sen.c} + \text{cos.b sen.a sen.c} + \text{cos.c sen.a sen.b} \quad (19)$$

$$\text{tang.}(a+b) = \frac{\text{tang.a} + \text{tang.b}}{1 - \text{tang.a tang.b}} \quad (20)$$

$$\text{tang.}(a-b) = \frac{\text{tang.a} - \text{tang.b}}{1 + \text{tang.a tang.b}} \quad (21)$$

$$\text{tang.}(a+b+c) = \frac{\text{tang.a} + \text{tang.b} + \text{tang.c} - \text{tang.a tang.b tang.c}}{1 - \text{tang.a tang.b} - \text{tang.a tang.c} - \text{tang.b tang.c}} \quad (22)$$

$$\text{tang.}(a-b-c) = \frac{\text{tang.a} - \text{tang.b} - \text{tang.c} - \text{tang.a tang.b tang.c}}{1 + \text{tang.a tang.b} + \text{tang.a tang.c} - \text{tang.b tang.c}} \quad (23)$$

$$\text{cot.}(a+b) = \frac{\text{cot.a cot.b} - 1}{\text{cot.b} + \text{cot.a}} \quad (24)$$

$$\text{cot.}(a-b) = \frac{\text{cot.a cot.b} + 1}{\text{cot.b} - \text{cot.a}} \quad (25)$$

$$\text{sen.2 a} = 2\ \text{sen.a cos.a} \quad (26)$$

$$\text{cos.2 a} = \text{cos}^2\text{a} - \text{sen}^2\text{a} \quad (27)$$

$$\text{sen.3 a} = 3\ \text{sen.a} - 4\ \text{sen}^3\text{a} \quad (28)$$

$$\text{cos.3 a} = 4\ \text{cos}^3\text{a} - 3\ \text{cos.a} \quad (29)$$

$$\text{tang.2 a} = \frac{2\ \text{tang.a}}{1 - \text{tang}^2\text{a}} \quad (30)$$

$$\text{tang. 3 a} = \frac{3\ \text{tang.a} - \text{tang}^3\text{a}}{1 - 3\ \text{tang}^2\text{a}} \quad (31)$$

$$\text{cot.2 a} = \frac{\text{cot}^2\text{a} - 1}{2\ \text{cot.a}} \quad (32)$$

$$\text{cot.3 a} = \frac{\text{cot}^3\text{a} - 3\ \text{cot.a}}{3\ \text{cot}^2\text{a} - 1} \quad (33)$$

$$\text{sen.a} = 2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{a cos.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{a} \quad (34)$$

$$\text{cos.a} = \text{cos}^2 \tfrac{1}{2}\ \text{a} - \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}\ \text{a} \quad (35)$$

$$\text{sen.} \tfrac{1}{2}\ \text{a} = \sqrt{\frac{1 - \text{cos.a}}{2}} \quad (36)$$

$$\text{cos.} \tfrac{1}{2}\ \text{a} = \sqrt{\frac{1 + \text{cos.a}}{2}} \quad (37)$$

$$\text{sen.} \tfrac{1}{2}\ \text{a} = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{1 + \text{sen.a}} \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{1 - \text{sen.a}} \quad (38)$$

$$\text{cos.} \tfrac{1}{2}\ \text{a} = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{1 + \text{sen.a}} \mp \tfrac{1}{2} \sqrt{1 - \text{sen.a}} \quad (39)$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}\ \text{a} = \sqrt{\frac{1 - \text{cos.a}}{1 + \text{cos.a}}} \quad (40)$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}\ \text{a} = \frac{\text{sen.a}}{1 + \text{cos.a}} \quad (41)$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}\ \text{a} = \frac{1 - \text{cos.a}}{\text{sen.a}} \quad (42)$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}\ \text{a} = -\frac{1}{\text{tang.a}} \pm \frac{1}{\text{tang.a}} \sqrt{1 + \text{tang}^2\text{a}} \quad (43)$$

$$\text{cot.} \tfrac{1}{2}\ \text{a} = \sqrt{\frac{1 + \text{cos.a}}{1 - \text{cos.a}}} \quad (44)$$

$$\text{cot.} \tfrac{1}{2}\ \text{a} = \frac{1 + \text{cos.a}}{\text{sen.a}} \quad (45)$$

$$\text{cot.} \tfrac{1}{2}\ \text{a} = \frac{\text{sen.a}}{1 - \text{cos.a}} \quad (46)$$

$$\cot.\tfrac{1}{2}\,a=\cot.a \pm \sqrt{\cot^2 a+1} \tag{47}$$

$$\text{sen}^2 a=\frac{1-\cos.2\,a}{2} \tag{48}$$

$$\cos^2 a=\frac{1+\cos.2\,a}{2} \tag{49}$$

$$\text{tang}^2 a=\frac{1-\cos.2\,a}{1+\cos.2\,a} \tag{50}$$

$$\cot^2 a=\frac{1+\cos.2\,a}{1-\cos.2\,a} \tag{51}$$

$$\text{sen}^2 a-\text{sen}^2 b=\cos^2 b-\cos^2 a \tag{52}$$

$$\frac{\text{sen}.(a+b)}{\text{sen}.(a-b)}=\frac{\text{tang}.a+\text{tang}.b}{\text{tang}.a-\text{tang}.b} \tag{53}$$

$$\frac{\cos.(a+b)}{\cos.(a-b)}=\frac{\cot.b-\text{tang}.a}{\cot.b+\text{tang}.a} \tag{54}$$

$$\text{sen}.a\cos.b=\tfrac{1}{2}\,\text{sen}.\,(a+b)+\tfrac{1}{2}\,\text{sen}.\,(a-b) \tag{55}$$

$$\text{sen}.b\cos.a=\tfrac{1}{2}\,\text{sen}.\,(a+b)-\tfrac{1}{2}\,\text{sen}.\,(a-b) \tag{56}$$

$$\cos.a\cos.b=\tfrac{1}{2}\cos.\,(a+b)+\tfrac{1}{2}\cos.\,(a-b) \tag{57}$$

$$\text{sen}.a\,\text{sen}.b=\tfrac{1}{2}\cos.\,(a-b)-\tfrac{1}{2}\cos.\,(a+b) \tag{58}$$

$$\text{sen}.p+\text{sen}.q=2\,\text{sen}.\,\tfrac{1}{2}(p+q)\cos.\tfrac{1}{2}(p-q) \tag{59}$$

$$\text{sen}.p-\text{sen}.q=2\,\text{sen}.\,\tfrac{1}{2}(p-q)\cos.\tfrac{1}{2}(p+q) \tag{60}$$

$$\cos.q+\cos.p=2\cos.\,\tfrac{1}{2}(p+q)\cos.\tfrac{1}{2}(p-q) \tag{61}$$

$$\cos.q-\cos.p=2\,\text{sen}.\,\tfrac{1}{2}(p+q)\,\text{sen}.\tfrac{1}{2}(p-q) \tag{62}$$

$$\text{tang}.a+\text{tang}.b=\frac{\text{sen}.(a+b)}{\cos.a\cos.b} \tag{63}$$

$$\text{tang}.a-\text{tang}.b=\frac{\text{sen}.(a-b)}{\cos.a\cos.b} \tag{64}$$

$$\cot.a+\cot.b=\frac{\text{sen}.(b+a)}{\text{sen}.a\,\text{sen}.b} \tag{65}$$

$$\cot.a-\cot.b=\frac{\text{sen}.(b-a)}{\text{sen}.a\,\text{sen}.b} \tag{66}$$

$$\frac{\text{sen}.p+\text{sen}.q}{\text{sen}.p-\text{sen}.q}=\frac{\text{tang}.\frac{1}{2}(p+q)}{\text{tang}.\frac{1}{2}(p-q)} \tag{67}$$

$$\frac{\text{sen}.p+\text{sen}.q}{\cos.q+\cos.p}=\text{tang}.\,\tfrac{1}{2}(p+q) \tag{68}$$

$$\frac{\text{sen}.p+\text{sen}.q}{\cos.q-\cos.p}=\cot.\tfrac{1}{2}(p-q) \tag{69}$$

$$\frac{\text{sen}.p-\text{sen}.q}{\cos.q+\cos.p}=\text{tang}.\tfrac{1}{2}(p-q) \tag{70}$$

$$\frac{\text{sen}.p-\text{sen}.q}{\cos.q-\cos.p}=\cot.\tfrac{1}{2}(p+q) \tag{71}$$

$$\frac{\cos.q+\cos.p}{\cos.q-\cos.p}=\cot.\tfrac{1}{2}(p+q)\cot.\tfrac{1}{2}(p-q) \tag{72}$$

$$\frac{\text{tang}.a+\text{tang}.b}{\text{tang}.a-\text{tang}.b}=\frac{\text{sen}.(a+b)}{\text{sen}.(a-b)} \tag{73}$$

$$\frac{\cot.a+\cot.b}{\cot.a-\cot.b}=\frac{\text{sen}.(b+a)}{\text{sen}.(b-a)} \tag{74}$$

Demostracion geométrica de algunas fórmulas generales.

779.—Como habrá podido notarse, valiéndonos de las relaciones geométricas en una figura adecuada, hemos establecido las fórmulas llamadas fundamentales y las del seno y coseno de la suma de dos arcos, y en seguida por puros procedimientos algebráicos, hemos deducido todas las demas; resultando que, siendo las primeras ciertas para cualquiera clase de arcos, las últimas, conforme al carácter de los métodos analíticos, tienen la mayor generalidad, interpretando, como lo hemos hecho, el significado de los símbolos algebráicos en los valores correlativos de los arcos y sus líneas trigonométricas. Los métodos de la geometría especial, envuelven casi siempre, en oposicion de los procedimientos analíticos, cierto espíritu de individualidad, lo cual hace que los teoremas demostrados por una figura, no se les puede considerar como ciertos, sino para los casos representados en ella; sin embargo, como los procedimientos geométricos hacen mas perceptibles las verdades, vamos á demostrar geométricamente, algunas de las fórmulas deducidas por el cálculo, lo cual servirá para hacer comprender á los alumnos, la dependencia forzosa que siempre existe entre unos y otros métodos.

780.—Dados el seno y coseno de un arco determinar el seno y coseno del arco duplo.

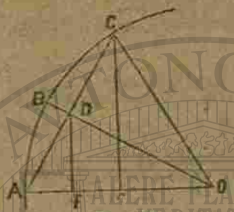


Fig. (361)

Sea en la fig. 361 $OA=1$, $AB=BC=a$, $AC=2a$, $AD=\text{sen.}a$, $OD=\cos.a$, $CE=\text{sen.}2a$ y $EO=\cos.2a$.

Siendo DF paralela al lado CE del triángulo CAE, y siendo $AD=DC$, se tendrá $EC=2DF$, y $AF=FE$. (510) Por tanto,

$$\text{sen.}2a=CE=2DF \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\cos.2a=EO=OF-AF \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

La cuestion queda reducida á determinar las rectas DF, OF y AF en funcion del seno y coseno de AB. Para esto, considerarémos el triángulo rectángulo ADO que ha quedado dividido en triángulos parciales semejantes á él por la perpendicular DF á la hipotenusa, (530) y se tiene:

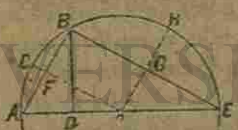
$DF : AD :: DO : AO$ despejando y sustituyendo $DF=\text{sen.}a\cos.a$
$OF : OD :: OD : AO$,, $OF=\cos^2 a$
$AF : AD :: AD : AO$,, $AF=\text{sen}^2 a$

Sustituyendo en las ecuaciones (1) y (2) resulta:

$$\text{sen. }2a=2\,\text{sen.}a\cos.a$$
$$\cos.\ 2a=\cos^2 a-\text{sen}^2 a$$

que son las expresiones (26) y (27) demostradas antes analíticamente.

781.—Encontrar el seno y coseno de la mitad de un arco en funcion del coseno.



(Fig. 362)

En la fig. 362, harémos $OA=1$, $AB=a$, por lo que $DO=\cos.a$ es la línea en funcion de la que debemos expresar el seno y coseno de $\frac{a}{2}$.

Desde B tiramos las cuerdas BA y BE y los radios OC y OH perpendiculares á sus mitades; tendremos que

$$BA=2AF=2\,\text{sen. }\tfrac{1}{2}a$$
$$BE=2BG=2FO=2\cos.\tfrac{1}{2}a$$

Por otra parte
$$AD=AO-DO=1-\cos.a$$
$$DE=OE+DO=1+\cos.a$$

Se sabe (539) que una cuerda es media proporcional entre todo el diámetro y su proyeccion, por lo que

$AB^2=AE\times AD$ sustituyendo $4\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}a=2(1-\cos.a)$

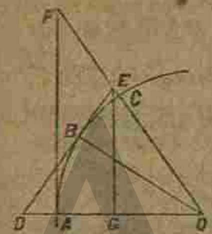
$$\text{ó sen. }\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1-\cos.a}{2}}$$

$BE^2=AE\times DE$,, $4\cos^2\tfrac{1}{2}a=2(1+\cos.a)$

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1+\cos.a}{2}}$$

que son las expresiones (36) y (37).

782.—Dadas las tangentes de dos arcos *a* y *b* determinar la tangente de su suma.



(Fig. 363)

En la figura 363 tenemos $OA=1$, $AB=a$, $BC=b$, $BD=\text{tang.}a$, $BE=\text{tang.}b$, y $AF=\text{tang.}(a+b)$.

Tirando EG paralela á AF, tendremos, comparando los triángulos semejantes FAO y EGO

$$FA : AO :: EG : GO$$

luego $FA=\text{tang.}(a+b)=\dfrac{EG}{GO}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

Tendremos pues que determinar EG y GO en funcion de BD y BE. Los triángulos DBO y DGE son semejantes por ser rectángulos y tener comun el ángulo en D. Comparando sus lados homólogos se tiene:

$EG : DE :: BO : DO$ luego $EG=\dfrac{\text{tang.}a+\text{tang.}b}{DO}\ldots\ldots(2)$

Para determinar el valor de GO, considerarémos el triángulo EDO y conforme al teorema del núm. 534, tendrémos:

$$DE^2=EO^2+DO^2-2\,DO\times GO$$

Despejando á GO se tiene:

$$GO=\frac{EO^2+DO^2-DE^2}{2DO}=\frac{EO^2+DO^2-(DB+BE)^2}{2DO}$$

ó
$$GO=\frac{EO^2+DO^2-DB^2-2\,DB\times BE-BE^2}{2DO}$$

y observando que $EO^2 - BE^2 = BO^2 = 1$; que $DO^2 - BD^2 = BO^2 = 1$; que B D=tang.a y que B E=tang.b, se tiene:

$$OG = \frac{2 - 2\ \text{tang.}a\ \text{tang.}b}{2\,DO}$$

suprimiendo el factor 2, $OG = \dfrac{1 - \text{tang.}a\ \text{tang.}b}{DO}$ .... (3)

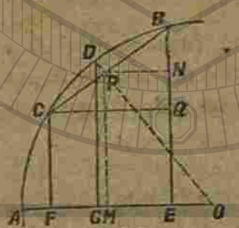
sustituyendo los valores de las ecuaciones (2) y (3) en la (1), resulta finalmente:

$$\text{tang.}(a+b) = \frac{\text{tang.}a + \text{tang.}b}{1 - \text{tang.}a\ \text{tang.}b}$$

que es la expresion (20) deducida analíticamente.

783.—*Demostraremos geométricamente las fórmulas siguientes:*

$$\text{sen.}p + \text{sen.}q = 2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(p+q)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}(p-q)$$
$$\text{sen.}p - \text{sen.}q = 2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(p-q)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}(p+q)$$



(Fig. 364)

En la fig. 364 tomemos A B=p y A C=q, cuyos senos serán respectivamente B E y C F. Tiremos la cuerda C B y el radio O D perpendicular á su mitad. Por el punto P tiremos P M perpendicular y P N paralela al radio A O, que como siempre lo supondremos igual á la unidad. Tracemos, por último, C Q paralela á O A. De la inspeccion de la figura resulta:

arco $BC = p-q$ $\quad BD = \tfrac{1}{2}(p-q) \quad AD = AB - BD = p - \tfrac{1}{2}(p-q)$

$AD = \tfrac{1}{2}(p+q)$

$BE = \text{sen.}p, \quad CF = \text{sen.}q \quad DG = \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(p+q), \quad BP = \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(p-q)$

$OG = \cos.\ \tfrac{1}{2}(p+q), \quad OP = \cos.\ \tfrac{1}{2}(p-q)$

$$BN = \frac{BQ}{2} = \frac{\text{sen.}p - \text{sen.}q}{2}$$

$$PM = BE - BN = \text{sen.}p - \frac{\text{sen.}p - \text{sen.}q}{2} = \frac{\text{sen.}p + \text{sen.}q}{2}$$

Esto supuesto, vamos á determinar los valores de P M y B N, com-

parando con el triángulo D G O sucesivamente los triángulos P M O y B N P que son semejantes á él.

$$PM : PO :: DG : DO \text{ luego } PM = \frac{\text{sen.}p + \text{sen.}q}{2} = \text{sen.}\tfrac{1}{2}(p+q)\cos.\tfrac{1}{2}(p-q)$$

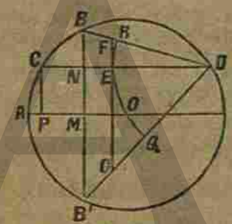
$$BN : BP :: OG : DO \text{ luego } BN = \frac{\text{sen.}p - \text{sen.}q}{2} = \text{sen.}\tfrac{1}{2}(p-q)\cos.\tfrac{1}{2}(p+q)$$

pasando el 2 al 2º miembro en las últimas ecuaciones resulta:

$$\text{sen.}p + \text{sen.}q = 2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(p+q)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}(p-q)$$
$$\text{sen.}p - \text{sen.}q = 2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(p-q)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}(p+q)$$

que es lo que se tenia que demostrar.

784.—Demostrar geométricamente que *la suma de los senos de dos arcos es á su diferencia, como la tangente de la mitad de la suma de los mismos arcos es á la tangente de la semi-diferencia.*



(Fig. 365)

En la fig. 365 sea A B=p, A C=q. Si tomamos A B'=A B y trazamos el seno C P y la cuerda B B', tendremos:

$BM = B'M = \text{sen.}p, \quad CP = NM = \text{sen.}q, \quad NB' = \text{sen.}p + \text{sen.}q$

$BN = \text{sen.}p - \text{sen.}q,$ el arco $CB' = p+q$ y $BC = p-q$.

Tiremos por el punto C la recta C D paralela á A O y haciendo centro en D tracemos un arco de círculo con el radio D E=A O=1. El ángulo C D B' tiene por medida el arco E Q, y por estar su vértice sobre la circunferencia tiene igualmente por medida ½ C A B', luego $EQ = \tfrac{1}{2}(p+q)$

Por igual razon $ER = \tfrac{1}{2}(p-q)$. Si en el punto E levantamos la tangente F E G, tendremos:

$EG = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(p+q)$, y $EF = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(p-q)$

Por ser paralelas las rectas B B' y F G quedarán cortadas en partes proporcionales por las líneas D B, D N y D B' que parten del punto D (526) y tendremos:

N B' : B N :: E G : E F

y sustituyendo:

$$\text{sen.p}+\text{sen.q} : \text{sen.p}-\text{sen.q} :: \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(p+q) : \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(p-q)$$

que es lo que se queria demostrar, y cuyo principio está expresado en la fórmula (67).

785.—PROBLEMAS.—I.—*Conociendo* tang. $\frac{a}{2}$ *determinar todas las demas líneas trigonométricas.*

Hemos visto, fórmula (30) que

$$\text{tang.}\ 2\,a=\frac{2\ \text{tang.}\ a}{1-\text{tang}^2 a}$$

Reemplazando *a* por $\frac{1}{2}$ a, se tiene:

$$\text{tang.a}=\frac{2\ \text{tang.}\ \frac{1}{2}\,a}{1-\text{tang}^2\frac{1}{2}\,a}$$

una vez conocida la tangente de *a*, se podrán determinar todas las demas líneas trigonométricas, como lo hemos hecho en el número 731—III.

II.—*Por medio de la fórmula:*

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a=-\frac{1}{\text{tang.a}}\pm\frac{1}{\text{tang.a}}\sqrt{1+\text{tang}^2 a}$$

determinar la tangente de 30°, y la de 45°.

Para que $\frac{1}{2}$ a sea de 30° deberá ser a=60°, y como tangente de 60° es igual á $\sqrt{3}$ sustituyendo en la fórmula y tomando el signo + por tratarse de un arco menor que 90°, se tiene:

$$\text{tang.}\ 30°=-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1+3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

que como hemos visto es el valor de la tangente de 30°.

Para que $\frac{1}{2}$ a sea de 45° necesitaremos hacer a=90° cuya tangente es ∞; pero como en este supuesto el término $\frac{1}{\text{tang.a}}$ se convierte en cero, y por la forma que hemos dado al valor de la tang. $\frac{1}{2}$ a entra como

factor comun de todos los términos $\frac{1}{\text{tang.a}}$, resulta que no podemos hacer la suposicion de que tang.a=∞, sino despues de haber trasformado la expresion

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a=-\frac{1}{\text{tang.a}}\pm\frac{1}{\text{tang.a}}\sqrt{1+\text{tang}^2 a}$$

para lo cual introduciremos dentro del radical á tang.a elevándola al cuadrado; y ejecutando la division, tendremos:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a=-\frac{1}{\text{tang.a}}\pm\sqrt{\frac{1}{\text{tang}^2 a}+1}$$

haciendo ahora a=90° y tang.a=∞, resulta tomando el signo + por tratarse de un arco menor que 90°:

$$\text{tang.}\ 45°=+1$$

que en efecto es el valor de la tangente de 45°.

III.—*Comprobar la fórmula* $\text{tang.}\ 3\,a=\frac{3\ \text{tang.a}-\text{tang.}^3 a}{1-3\ \text{tang.}^2 a}$ *para cuando el arco* a=30°, 45°, 60° y 90°.

Cuando a=30°, tang.a=$\frac{1}{\sqrt{3}}$ Sustituyendo en la fórmula se tiene:

$$\text{tang.}\ 90°=\frac{3\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}{1-3\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}-\frac{1}{3\sqrt{3}}}{1-1}=\infty$$

Cuando a=45°, tang.a=1. Sustituyendo en la fórmula, se tiene:

$$\text{tang.}\ 135°=\frac{3-1}{1-3}=\frac{2}{-2}=-1$$

Cuando a=60°, tang.a=$\sqrt{3}$. Sustituyendo en la fórmula, se tiene:

$$\text{tang.}\ 180°=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}^3}{1-3\times 3}=\frac{3\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{1-9}=0$$

Cuando $a=90°$, $\text{tang.}a=\infty$, y para evitar el inconveniente que tendría sustituir este valor en la fórmula

$$\text{tang. } 3\,a=\frac{3\ \text{tang.}a-\text{tang.}^3a}{1-3\ \text{tang.}^2a}$$

lo que haría infinitos todos sus términos, la trasformaremos préviamente; dividiendo el numerador y denominador por tang^3a, lo cual da

$$\text{tang.}3a=\frac{\dfrac{3}{\text{tang}^2a}-1}{\dfrac{1}{\text{tang}^3a}-\dfrac{3}{\text{tang.}a}}$$

y sustituyendo se tiene:

$$\text{tang. } 270°=\frac{\dfrac{3}{\infty}-1}{\dfrac{1}{\infty}-\dfrac{3}{\infty}}=\frac{-1}{-0}=+\infty$$

IV.—*Demostrar que el producto de las tangentes de los tres ángulos de un triángulo es igual á la suma de las mismas tangentes, y comprobar este teorema cuando el triángulo es equiángulo.*

Si representamos por A, B y C los ángulos de un triángulo, se sabe que

$$A+B+C=180° \qquad \text{luego } A=180°-(B+C)$$

y como la tangente de un ángulo es igual á la de su suplemento tomada con signo contrario, tendremos:

$$\text{tang. }(B+C)=-\text{tang.}A$$

y como (fórmula 20) $\quad \text{tang. }(B+C)=\dfrac{\text{tang.}B+\text{tang.}C}{1-\text{tang.}B\ \text{tang.}C}$

resulta que $\quad \dfrac{\text{tang.}B+\text{tang.}C}{1-\text{tang.}B\ \text{tang.}C}=-\text{tang.}A$

quitando el denominador:

$$\text{tang.}B+\text{tang.}C=-\text{tang.}A+\text{tang.}A\ \text{tang.}B\ \text{tang.}C$$

trasladando:

$$\text{tang.}A+\text{tang.}B+\text{tang.}C=\text{tang.}A\ \ \text{tang.}B\ \ \text{tang.}C$$

que es lo que se queria demostrar.

En el caso de ser triángulo equiángulo, cada uno de sus ángulos valdrá 60° y su tangente será igual á $\sqrt{3}$. Sustituyendo este valor en la última ecuacion se tiene:

$$\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}$$

ó $$3\sqrt{3}=\sqrt{3^3}=3\sqrt{3}$$

cuya identidad de resultados comprueba la verdad del teorema.

Cálculo de las tablas trigonométricas.

786.—En las fórmulas que anteceden han quedado cifradas las principales relaciones que existen entre las diversas líneas trigonométricas y algunas funciones sencillas de éstas, como las del arco duplo, las del arco de la mitad, etc., que pueden considerarse como otras tantas líneas trigonométricas nuevas; pero por numerosas y variadas que sean estas relaciones, no pueden aplicarse inmediatamente á nuestro objeto definitivo, que es determinar el valor numérico de los elementos desconocidos de un triángulo, sino sirviéndonos, como magnitudes auxiliares entre los lados y los ángulos de un triángulo, de los valores numéricos de las líneas trigonométricas. Estas, como se habrá notado y se comprenderá mejor mas adelante, llenan las condiciones esenciales de toda magnitud auxiliar; pues por medio de ellas simplificarémos nuestros cálculos, y existiendo una relacion constante entre la magnitud de un arco y la de sus líneas trigonométricas, siempre se puede deducir del valor del arco el de la línea trigonométrica, y recíprocamente; pero para que con su empleo podamos obtener la sencillez y facilidad que buscamos en nuestros cálculos, es indispensable calcular préviamente y construir tablas en las que consten los valores de las líneas trigonométricas ó sus logaritmos al lado de los arcos á que cada una pertenece.

En este capítulo vamos á dar una idea de la manera con que se han formado estas tablas, cuyo trabajo, á semejanza del de los logaritmos, se hace una vez para siempre, y contribuye poderosamente á expeditar las operaciones necesarias para resolver los triángulos.

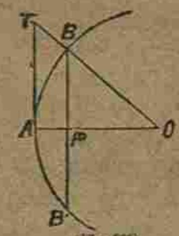
Las magnitudes auxiliares tienen por objeto facilitar las investigaciones, y son de dos clases: unas que se conservan hasta el último resultado, y otras que no constando como datos en el problema, desaparecen en el valor de la incógnita. Por ejemplo: al tratar de los volúmenes de los cuerpos hemos empleado como auxiliar el radio de la esfera para reemplazar á la relacion de los volúmenes la de una expresion de esa línea que se conserva en la expresion final del volúmen de la esfera. Lo contrario pasa con los logaritmos que son auxiliares intermedios que no constan en los datos del problema, y que sirviendo solo para simplificar los cálculos, desaparecen por completo en el último resultado. Las líneas trigonométricas corresponden á esta última clase de magnitudes auxiliares.

Ahora bien, si por una parte se inscriben todos los arcos de un cuadrante de 10 en 10", y al lado de cada arco se anotan las partes del radio del círculo de que se compone su seno, su coseno, etc., se tendrá una idea de una tabla de las líneas trigonométricas naturales. Generalmente al lado del arco se pone el logaritmo del número de las partes del radio que tiene la línea trigonométrica, y entonces tendremos tablas de los logaritmos de las líneas trigonométricas.

Como hemos visto que por grande que sea un arco, siempre hay otro $<90°$ que tiene las mismas líneas trigonométricas con igual ó diferente signo, es claro que bastará calcular los valores de las que corresponden á un cuadrante. Ademas hemos visto, (731—I) que conocido el seno de un arco por medio de las fórmulas fundamentales (729) pueden determinarse todas las demas líneas trigonométricas; y por último (758), como el seno de un arco es igual al coseno de su complemento, resulta que bastará explicar el modo de obtener el valor de los senos, de los arcos 0° á 45° para comprender como pueden en seguida formarse tablas de todas las líneas de 0° á 90° aplicables á ángulos de cualquiera magnitud.

Esto supuesto vamos á dar una idea del procedimiento que puede emplearse para construir una tabla de los senos y cosenos de todos los arcos de 0° á 45°, demostrando préviamente algunos principios fundamentales.

787.—*A medida que decrece un ángulo menor que 90°, la relacion que hay entre el arco rectificado que le sirve de medida y su seno disminuye, aproximándose más y más á la unidad, que es su valor límite.*



(Fig. 366)

En la fig. 366 sea el radio O A=1, la longitud del arco A B rectificado, la representaremos por a, B P=sen.a, O P=cos.a y A T=tang.a.

Si prolongamos B P hasta B' tendremos que

$$\text{arco } BAB' > BB'$$

y tomando la mitad

$$a > \text{sen.}a \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Por otra parte, la superficie del sector A O B es menor que la superficie del triángulo A T O, esto es:

$$\tfrac{1}{2} AO \times a < \tfrac{1}{2} AO \times AT$$

luego

$$a < \text{tang.}a$$

ó

$$a < \frac{\text{sen.}a}{\text{cos.}a} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

dividiendo las desigualdades (1) y (2) por sen.a, se tiene:

$$\frac{a}{\text{sen.}a} > 1 \text{ y } \frac{a}{\text{sen.}a} < \frac{1}{\text{cos.}a}$$

lo cual hace ver, que la relacion del arco á su seno, está comprendida entre 1 y $\frac{1}{\text{cos.}a}$, cantidad que es mayor que la unidad, porque cos.a es menor que el radio, excepto cuando a=o; pero como á medida que el ángulo a disminuye, el coseno crece y se aproxima á ser igual al radio, $\frac{1}{\text{cos.}a}$ decrece y se acerca más y más á la unidad, de la que puede diferir tan poco como se quiera, y como $\frac{a}{\text{sen.}a}$ es menor que $\frac{1}{\text{cos.}a}$ se infiere que diferirá *áun ménos y que puede considerarse que tiene la unidad por límite.*

788.—*La relacion* $\frac{a}{\text{tang.}a}$ *tiene igualmente, cuando el arco decrece, la unidad por límite.*

Las desigualdades anteriores dan:

$$a < \text{tang.}a \text{ y } a > \text{sen.}a$$

poniendo por el seno su valor sacado de la expresion $\text{tang.a}=\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}}$, se tiene:

$$a > \text{tang.a cos.a}$$

dividiendo por tang.a la primera y la última desigualdad, resulta:

$$\frac{a}{\text{tang.a}} < 1 \text{ y } \frac{a}{\text{tang.a}} > \text{cos.a}$$

cuyas desigualdades hacen ver que *la relacion* $\frac{a}{\text{tang.a}}$, *siempre mayor que* cos.a, *está comprendida entre* 1 *y* cos.a, *y tiene por consiguiente la unidad por límite.*

789.—*La diferencia entre la longitud* a *del arco y la de su seno, es siempre menor que un cuarto del cubo de* a.

De la desigualdad $a<\text{tang.a}$ resulta:

$$\tfrac{1}{2}a < \frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}a}{\text{cos.}\,\frac{1}{2}a}$$

quitando el denominador: $\frac{1}{2}a\ \text{cos.}\frac{1}{2}a < \text{sen.}\frac{1}{2}a$

segun la fórmula (26) $\quad 2\ \text{sen.}\frac{1}{2}a\ \text{cos.}\frac{1}{2}a = \text{sen.a}$

multiplicando esta ecuacion por la desigualdad anterior y suprimiendo el factor comun sen.$\frac{1}{2}$ a, se tiene:

$$a\ \text{cos}^2\tfrac{1}{2}a < \text{sen a} \qquad a\,(1-\text{sen}^2\tfrac{1}{2}a) < \text{sen.a}$$

ó $\qquad a - a\ \text{sen}^2\frac{1}{2}a < \text{sen.a}$

trasladando $\qquad a - \text{sen.a} < a\ \text{sen}^2\frac{1}{2}a \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

por otra parte como $\qquad \text{sen.}\frac{1}{2}a < \frac{a}{2}$

elevando al cuadrado $\qquad \text{sen}^2\frac{1}{2}a < \frac{a^2}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$

multiplicando ordenadamente las desigualdades (3) y (4) resulta:

$$\text{sen}^2\tfrac{1}{2}a\,(a-\text{sen.a}) < \frac{a^3}{4}\text{sen}^2\tfrac{1}{2}a$$

suprimiendo el factor sen$^2\frac{1}{2}$a, tendrémos:

$$a - \text{sen.a} < \frac{a^3}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

que es lo que se debia demostrar.

790.—Estos principios van á servir para hacernos ver el grado de aproximacion que podemos obtener al tomar la longitud de un arco pequeño como magnitud de su seno. Consideraremos el arco de 10″ que es la base de las tablas trigonométricas de Callet. La desigualdad (1) da

$$\text{sen.a} < a \ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

y la (5) da $\qquad \text{sen.a} > a - \frac{a^3}{4} \ldots\ldots\ldots(B)$

Calcularemos la longitud del arco rectificado de 10″. Cuando el radio del círculo es la unidad, la circunferencia $=2\pi r$ será 2π y el arco de 180° será igual á $\pi = 3'141\ 592\ 653\ 589\ 793\ldots\ldots$ Por otra parte

$$180° = 180 \times 60' \times 60'' = 648000''$$

Por consiguiente $648000'' : 10'' :: 3'141\ 592\ 653\ldots : a$ longitud arco 10″

de donde $\qquad a = 0'000\ 048\ 481\ 368\ 110$

sustituyendo este valor en las desigualdades (A) y (B), resulta:

$$\text{sen.}10'' < 0'000\ 048\ 481\ 368\ 110$$
$$\text{sen.}10 > 0'000\ 048\ 481\ 368\ 110 - \frac{a^3}{4}$$

si por a tomamos el valor aproximado 0'000 05, tendremos que

$$\frac{a^3}{4} = 0'000\ 000\ 000\ 000\ 032$$

Sustituyendo y ejecutando la resta indicada en la última desigualdad, se tiene:

$$\text{sen.}10'' > 0'000\ 048\ 481\ 368\ 078$$

y que $\qquad \text{sen.}10'' < 0'000\ 048\ 481\ 368\ 110$

Se ve, pues, que el seno de 10″ no comienza á diferir del arco de 10″ sino en la 13ª decimal, no llegando la diferencia ni áun al valor de una unidad de este órden. En consecuencia, conformándonos con la aproximacion de 12 cifras decimales, vemos que

$$\text{sen.}10'' = 0{,}000\ 048\ 481\ 368$$

y si determinamos el logaritmo de este número, encontramos que

$$\log.\ \text{sen.}10'' = 5{,}685\ 5749$$

que es el mismo que consta en la tabla de los logaritmos de las líneas trigonométricas.

Si en la expresion $\cos.a = \sqrt{1 - \text{sen}^2 a}$ sustituimos por a el arco de $10''$ tendremos:

$$\cos.10'' = \sqrt{1 - 0{,}000\ 048\ 481^2} = 0{,}999\ 999\ 998\ 824\ 8$$

y una vez conocidos los valores numéricos del seno y coseno de $10''$, pueden determinarse los de todos los demas arcos hasta 45° por medio de las fórmulas.

$$\begin{aligned}
&\text{sen.}2\,a = 2\ \text{sen.}a\ \cos.a\\
&\cos.2\,a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a\\
&\text{sen.}(a+b) = \text{sen.}a\ \cos.b + \text{sen.}b\ \cos.a\\
&\cos.(a+b) = \cos.a\ \cos.b - \text{sen.}a\ \text{sen.}b
\end{aligned}$$

Conocidos los valores del seno y coseno de todos los arcos de 10 en $10''$ hasta 45°, se obtendrían las tangentes y cotangentes por medio de las fórmulas:

$$\text{tang.}a = \frac{\text{sen.}a}{\cos.a} \quad \text{y} \quad \cot.a = \frac{\cos.a}{\text{sen.}a}$$

Los valores de las líneas trigonométricas de 45 á 90°, se determinan fácilmente por ser el valor de cualquiera de ellas, igual al de la indirecta de su complemento.

En la práctica, algo se simplifican los procedimientos que acabamos de explicar; pero no entraremos en los pormenores correspondientes, porque nuestro objeto es dar una idea del modo con que pueden calcularse las tablas trigonométricas y no poner á los alumnos en estado de repetir un trabajo que está ya hecho con la aproximacion que se necesita en la práctica.

Como al efectuar cálculos tan largos y penosos, por una parte es fácil que se deslice una equivocacion, y por otra los errores de aproximacion pueden irse acumulando; conviene calcular directamente el valor

de un gran número de líneas trigonométricas, para tener números que sirvan para rectificar los cálculos hechos. A este fin, se emplean diversos métodos, pero nos limitaremos á citar dos. Pueden calcularse directamente las cuerdas de los arcos correspondientes á polígonos regulares de cualquier número de lados y la mitad del valor de una cuerda será el del seno del arco respectivo; y tambien pueden calcularse las líneas trigonométricas de un gran número de arcos por expresiones análogas á aquellas de que nos hemos servido para fijar el valor de las de 30°, 45° y 60°. Así se calculan los valores de las líneas trigonométricas de 9 en 9 ó de 3 en 3°, y se comprueban ó rectifican los ya obtenidos. En cuanto al grado de aproximacion, diremos, que partiendo como se ha dicho del valor del seno de $10''$ con 13 cifras decimales en el límite de los cálculos, para el arco de 45°, el seno y el coseno difieren del valor exacto menos de $\frac{1}{2}$ de una unidad decimal, del octavo órden. Si se necesitase mayor aproximacion, seria preciso repetir los cálculos, tomando por base de ellos, el arco de $5''$ ó el de $1''$.

Harémos notar, que no todas las líneas trigonométricas dan la misma aproximacion para cualquier valor de los arcos. En efecto, para arcos pequeños, las variaciones del seno son mucho mas rápidas que las del coseno, y por tanto, en la práctica, cuando los ángulos tienen valores que se acercan á 0°, conviene emplear fórmulas en que entren los senos para tener los resultados con mayor aproximacion, lo cual es causa de la necesidad de trasformar las expresiones obtenidas en funcion del coseno. Lo contrario sucede cuando los ángulos tienen valores cercanos á 90°.

Por último, diremos que unas veces se construyen las tablas de las líneas trigonométricas refiriendo su longitud al radio tomado por unidad, y entónces se tienen las expresiones llamadas *naturales* de dichas líneas, y otras se construyen las tablas tomando los logaritmos de los valores naturales.

En las tablas de logaritmos de Callet, para evitar el uso de características negativas, se ha tomado el complemento aritmético de ellas, por lo cual al introducir este sistema en los cálculos, segun lo deciamos en la segunda observacion al cálculo de los logaritmos (337), debe tenerse presente que se ha omitido la resta de 10 en cada logaritmo que contiene un complemento aritmético, por lo cual es necesario algunas veces expresar esta operacion sobrentendida, otras es preciso suprimir las decenas de la característica, y otras, por último, es forzoso agregarle las decenas necesarias para que el resultado exprese el complemento aritmético de la característica; procediéndose con los logaritmos de las líneas trigonométricas lo mismo que lo hemos hecho con los de los números (Prob. IV, VIII, IX, XIII y XVII, § 338).

Puede tambien suponerse el radio dividido en 10,000.000,000 de partes, y en esta hipótesis los logaritmos de las tablas de Callet son los de los números de estas partes del radio que contiene cada una de las líneas trigonométricas; pero por haber sacado todas nuestras fórmulas haciendo el radio igual á la unidad, preferimos adoptar la base de considerar los logaritmos de las líneas trigonométricas como pertenecientes á los números que expresan su magnitud en partes del radio siendo éste 1, habiéndose tomado para los logaritmos del seno y coseno los complementos aritméticos de sus características.

Disposicion y uso de las tablas de las líneas trigonométricas.

791.—Disposicion de las tablas de Callet.—Vamos á describir las tablas de las líneas trigonométricas de Callet. Las correspondientes á la division sexagesimal se encuentran de la página (289) á la (659) divididas en dos partes: en la primera se encuentran los logaritmos del seno y tangente de los cinco primeros grados, y los del coseno y cotangente de 85 á 90° de segundo en segundo; y en la segunda parte, de la página 390 en adelante, constan los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de 0 á 90° de 10 en 10″.

Las tablas en una y otra parte tienen doble entrada, una correspondiente al número de grados inscrito en la cabeza de la página, y otra que pertenece á los grados anotados al pié de la página.

En la primera parte de las tablas se observará que se ha señalado el número de los grados arriba y á la izquierda de cada página, ó abajo y á la derecha; los minutos lo están en una línea horizontal, y los segundos de 0 á 60 están en una columna vertical. Una de las llanas corresponde al seno de los arcos de 0 á 5° y al coseno de 85 á 90°, y la otra á la tangente y cotangente de los mismos grados. Cuando se consideran los grados y minutos puestos en la cabeza de las páginas, es preciso tomar los segundos de la columna de la izquierda, cuya numeracion va de arriba para abajo. Cuando se toman las indicaciones del pié de la página se tomarán los segundos marcados en la columna de la derecha.

Por último, desde la página (350) á la (389) sobre las indicaciones de los minutos hay unos números (401, 398, 396, etc.), los cuales expre-

san las diferencias que generalmente hay entre dos logaritmos inmediatos de los que están en la columna arriba de cada diferencia.

En la segunda parte de las tablas, considerando la entrada superior, los grados están arriba de cada página desde 0° hasta 44°, los minutos están anotados en la primera columna vertical, y los segundos de 10 en 10 en la siguiente. En seguida están los logaritmos del seno, coseno, tangente y cotangente debajo de su respectiva anotacion *sinus*, *co-sin*, *tang.* y *cotang.*, habiéndose omitido para abreviar la indicacion de *log.* Ademas, en las columnas de diferencias constan las que se obtienen restando los logaritmos entre los que se encuentran inscritas. Es de notarse que las diferencias de los logaritmos de las tangentes son comunes á las cotangentes, de lo cual es fácil darse la razon. En efecto:

$$\text{tang. }(a+h)=\frac{1}{\text{cot. }(a+h)}$$

$$\text{tang.}a=\frac{1}{\text{cot.}a}$$

Dividiendo una ecuacion por otra, resulta:

$$\frac{\text{tang.}a\ (a+h)}{\text{tang.}a}=\frac{\text{cot.}a}{\text{cot. }(a+h)}$$

y tomando los logaritmos

$$\text{log.tang. }(a+h)-\text{log.tang.}a=\text{log.cot.}a-\text{log.cot. }(a+h)$$

luego cualquiera que sea el valor del arco a y el de la diferencia h, un segundo ó 10″, la diferencia entre los logaritmos de las tangentes será la misma que entre los de las cotangentes de los arcos a y $(a+h)$.

Cuando se consideran ángulos de 45 á 90° están marcados los grados al pié de cada página, los minutos lo están en la primera columna de la derecha, y los segundos de 10 en 10″ yendo la numeracion de abajo para arriba.

Conforme á esta disposicion, consultando las graduaciones superior é inferior, así como los títulos de las líneas trigonométricas, se vé que las tablas de Callet contienen los logaritmos del seno, coseno, tangente y cotangente de todos los arcos de 10 en 10″ de 0 á 90°.

792.—Uso de las tablas trigonométricas.—Los problemas que hay que resolver son dos, semejantes á los que hemos explicado al tratar de los logaritmos de los números: dado un arco, determinar el logaritmo de una de sus líneas trigonométricas; y dado el logaritmo de una línea trigonométrica, determinar el arco; pudiendo suceder en uno y otro caso, que el número conocido esté ó no en las tablas de Callet, que son las que hemos escogido para dar nuestras explicaciones.

793.—I.—PROBLEMA.—*Conocido un arco menor que 90°, determinar el logaritmo del seno, coseno, tangente ó cotangente de este arco.*

1er. *Caso.—Si el arco dado consta de grados, minutos y solo decenas de segundos,* se encontrará en las tablas. El valor del arco puede no llegar á 45° y puede pasar de 45°. En el primer caso se buscará el número de grados entre los que están inscritos en las cabezas de las páginas; los minutos se hallarán en la 1a columna de la izquierda, en la que los valores van creciendo de arriba para abajo; y por último, sin perder el número de minutos, se buscarán en la columna siguiente las decenas de segundos. Una vez hecho esto en la línea horizontal que pasa por el número de segundos del arco, y *debajo* de la anotacion correspondiente á la línea trigonométrica que se considera, se encontrará el logaritmo buscado. Por ejemplo: se quiere el logaritmo del coseno de 6°—15'—30" En la página (427) se encuentra en la parte alta 6°, y en la primera columna de la izquierda 15'; luego hallamos en la siguiente y entre 15' y 16' los 30". Ahora, recorriendo el renglon que corresponde á los 30" debajo de la anotacion *co-sin*, encontramos el logaritmo 9·997 4041 que es el buscado. Esto es

log.cos. 6°—15'—30"=9·997 4041

Si el arco dado pasa de 45° se buscarán en el pié de las páginas los grados. Una vez hallados estos, los minutos se tomarán en la columna de la derecha, en la que la numeracion crece de abajo para arriba, y las decenas de segundos en la inmediata columna. En seguida se recorrerá la línea en que están estos segundos de derecha á izquierda, y se tomará el logaritmo que esté *arriba* de la anotacion de la línea trigonómetrica de que se trata. Sea, por ejemplo, buscar el logaritmo del seno de 68°—3'—40". En la página (521) y en su pié se encuentran 68°: los minutos y segundos los tomamos en las columnas de la derecha, cuya numeracion crece al subir. Encontrado el renglon que corresponde á 68°—3'—40" lo recorremos para la izquierda, y en la columna anotada *abajo* con la palabra *sinus*, hallaremos el número 9·967 3527, que es el logaritmo buscado. Esto es,

log.sen. 68°—3'—40"=9·967 3527.

2° *Caso.—Cuando el arco dado, ademas de decenas de segundos, contiene unidades y fracciones de segundo,* no se encontrará en las tablas, y se procederá para determinar el logaritmo de sus líneas trigonométricas, segun que se trate del seno y la tangente, ó del coseno y la cotangente, de la manera que vamos á explicar.

Si se trata de un seno ó una tangente, cuyas líneas se ha visto que crecen al aumentar el arco, se comenzará por rebajar al arco dado el exceso que tenga de unidades y fracciones de segundo sobre el arco que se encuentra en las tablas, y se buscará el logaritmo que corresponde á este arco, *próximo menor* que el dado, al cual habrá que agregarle una parte correspondiente al exceso despreciado por el pronto. Para determinar lo que debe agregarse al logaritmo hallado en las tablas, notaremos que cuando el incremento de un arco es pequeño, entre ciertos límites de aproximacion los incrementos de los logaritmos de las líneas trigonométricas son proporcionales á los de los arcos. En efecto, en las tablas de Callet se notará, que con excepcion de los logaritmos que se encuentran al principio de ellas, esto es, de los arcos que se aproximan á 0 y á 90°, y de los cuales trataremos luego, la diferencia de los logaritmos es constante para un gran número de arcos. Esto es, para un incremento de 20", 30", etc., en el arco, la diferencia entre los logaritmos es doble, triple, etc., de la que hay cuando el arco aumenta 10". Por tanto, podemos en cualquier caso establecer una proporcion que diga: 10 *segundos, es al exceso, en segundos y fracciones de segundo, del arco dado sobre el encontrado en las tablas; como la diferencia entre los logaritmos correspondientes á 10", es á la diferencia que buscamos;* si llamamos e el exceso del arco dado sobre el encontrado en las tablas, por d la diferencia de las tablas correspondiente á 10", y por x lo que se le debe agregar al logaritmo hallado en las tablas correspondiente á un arco algo menor que el verdadero, podremos establecer la siguiente proporcion:

$$10'' : e :: d : x = \frac{e\,d}{10}$$

Se ve, pues, que *para determinar lo que se ha de agregar al logaritmo encontrado en las tablas, hay que multiplicar el exceso del arco sobre el que consta en las tablas por la diferencia de los logaritmos, y dividir el producto por* 10. El resultado expresa unidades decimales del 7° órden.

El exceso e debe expresarse en segundos y fracciones decimales de segundo. Cuando el arco esté indicado en segundos, terceros, etc., habrá que comenzar por trasformar los terceros, etc., en fracciones decimales de segundo.

Por ejemplo: se quiere el log. del seno de 59°—23'—34" '3

log. sen. 59°—23'—30"	=9·934 83 56	d=125
Corresponde por 4" '3	54	12'5×4" '3=53'75
log.sen.59°—23'—34" '3	=9·934 84 10	

Como 2° ejemplo: determinar el log. de la tang. de 39°—52'—45" '4

log. tang. 39°—52'—40"	=9·921 9314	d=428
Corresponde por 5" '4	231	42'8×5" '4=231'12
log.tang.39°—52'—45" '4	=9·921 9545	

Si se trata de un coseno ó de una cotangente, cuyas líneas como se ha visto decrecen al aumentar el arco, *se buscará en las tablas el logaritmo que corresponde al arco próximo mayor que el dado. En seguida se restará del arco de las tablas el dado, y el exceso se multiplicará por la diferencia correspondiente á* 10", *cuyo producto dividido por* 10 *se agregará al logaritmo tomado de las tablas.* El fundamento de esta regla es el mismo que el de la anterior.

Por ejemplo: se busca el log. del coseno de 25°—38'—48" '5

log.cos.25°—38'—50"	=9·954 9542	d=101
corresponde por 1" '5	15	50'–48" '5=1" '5;10'1×1" '5=15'15
log.cos.25°-38'-48" '5	=9·954 9557	

Como 2° ejemplo: determinar el log. de la cot. de 73°—47'—33" '2

log. cot. 73°-47'-40"	=9·463 3434	d=785
corresponde por 6" '8	534	40"–33'2=6" '8;78'5×6" '8=533" '80
log.cot.73°-47'-33" '2	=9·463 3968	

Cuando se trata de un coseno ó de una cotangente, podria tomarse el logaritmo que en las tablas corresponde al arco *próximo menor*, pero entónces habria necesidad de *restar* de este logaritmo la diferencia

logarítmica que se calcule debe corresponder al exceso del arco dado sobre el de las tablas.

3er. *Caso.—Cuando el arco dado es muy pequeño ó se aproxima mucho á* 90°, el método anterior no da una aproximacion suficiente, y vamos á explicar cómo es necesario proceder.

Estando dado el arco en segundos y fracciones de segundos, representemos por a la parte entera, y por h la parte decimal. Cuando se trata de arcos pequeños, hemos visto (790) que sin error sensible puede admitirse que sus senos son proporcionales á las longitudes de los arcos rectificados, y que los arcos son proporcionales á los números de segundos de que consten; en virtud de lo cual se tiene:

$$\frac{\text{sen.}(a+h)}{\text{sen.}a}=\frac{a+h}{a} \quad \text{y} \quad \frac{\text{tang.}(a+h)}{\text{tang.}a}=\frac{a+h}{a}$$

ó despejando y tomando los logaritmos:

$$\log.\ \text{sen.}\ (a+h)=\log.\ \text{sen.}a+\log.\ (a+h)-\log.a\ldots.(A)$$

$$\log.\text{tang.}(a+h)=\log.\text{tang.}a+\log.\ (a+h)-\log.a\ldots.(B)$$

El logaritmo de *sen.a* ó de *tang.a* se tomará en la primera parte de la tabla de las líneas trigonométricas, y los logaritmos de (a+h) y de a se tomarán en la tabla de los números, y por las fórmulas (A) y (B) se tendrán los logaritmos de seno y tang. (a+h).

Sea, por ejemplo, determinar el logaritmo de seno 0°—2'—28" '54

Este arco, reducido á segundos, es igual 148" '54. Por lo cual, para sustituir en nuestras fórmulas, se tiene: a=148 y h=0'54, y se tendrá haciendo el cálculo correspondiente:

log. sen. 0°—2'—28"	=6.855 8365
log. número 148'54	=2'171 8434
	9'027 6799
Menos log. 148	—2'170 2617
log. sen. 0°—2'—28" '54	=6'857 4182

Como cot.a$=\dfrac{1}{\text{tang.a}}$ se tiene que:

$$\log.\ \cot.a = \log.\ 1 - \log.\ \tan g.a = 0 - \log.\ \tan g.a$$

resulta que si se busca el logaritmo de la cotangente de un arco muy pequeño será necesario determinar el logaritmo de la tangente por la fórmula (B), en seguida cambiarle signo, y tomar su complemento aritmético.

Si se trata del logaritmo del coseno de un arco muy pequeño, como de la expresion $\tan g.a = \frac{\text{sen.}a}{\cos.a}$ resulta: $\cos.a = \frac{\text{sen.}a}{\tan g.a}$, tendremos:

$$\cos.\ (a+h) = \frac{\text{sen.}\ (a+h)}{\tan g.(a+h)}$$

luego $\log.\ \cos.(a+h) = \log.\ \text{sen.}\ (a+h) - \log.\ \tan g.\ (a+h)$

parece que bastaria determinar los logaritmos del seno y de la tangente de $(a+h)$ por los procedimientos indicados para obtener el de cos. $(a+h)$ con la suficiente exactitud; pero no es así, pues si en la última ecuacion se sustituyen los valores (A) y (B), resulta:

$$\log.\ \cos.(a+h) = \log.\ \text{sen.}a - \log.\ \tan g.a$$

lo que da $\log.\ \cos.(a+h) = \log.\ \cos.a$

Este resultado es el que muestran las tablas. En efecto, supongamos que se pida el logaritmo del coseno de 0°—2'—28" '54. El valor buscado, estará comprendido entre los logaritmos de los cosenos de los arcos de 0°—2'—20" y 0°—2'—30" los cuales, como puede verse en la 2ª parte de las tablas, pág. (390) tienen el mismo valor 9·999 9999. Por esta razon, debe evitarse el empleo de los cosenos cuando en los cálculos entran ángulos pequeños.

4º *Caso.—Cuando el arco solamente tiene fracciones decimales de segundo* la fórmula anterior no es aplicable, pero entónces se considerarán las fracciones como segundos de los cuales se busca el logaritmo en la primera parte de la tabla, de 0 á 5°, y se disminuye la característica del logaritmo encontrado, tantas unidades como cifras decimales tiene la fraccion.

Por ejemplo: log. sen. 0" '35 = log. sen. 35"—log. 100

log. sen. 0" '35 = 4·229 6429.

794.—II. PROBLEMA.—*Estando dado el logaritmo de un seno, de un coseno, de una tangente ó de una cotangente, encontrar el arco á que corresponde.*

1er. CASO.—*Cuando el logaritmo dado se encuentra en la tabla.* Se busca éste en alguna de las dos columnas contiguas que tienen por encabezado arriba ó abajo la línea trigonométrica á que pertenece el logaritmo. Si este encabezado está arriba, se recorrerá para la izquierda el renglon en que se encontró el logaritmo hasta llegar á las decenas de segundos, que son las del arco buscado. Se pasará á la primera columna, y si en el mismo renglon hay un número, éste será el de los minutos buscados, y en caso contrario, se recorrerá para arriba esta columna, y el primer número que se halle será el de los minutos. Por último, en la cabeza de la página y fuera del cuadro estarán los grados. Si por el contrario, el encabezado de la línea trigonométrica estuviese abajo de la página, es necesario recorrer el renglon donde se encontró el logaritmo para la derecha, y en la penúltima columna vertical se hallarán los segundos; en el mismo renglon ó un poco más abajo, en la última columna, estarán los minutos, y en el pié de la página, fuera del cuadro, los grados.

Supongamos, por ejemplo, que se pide el arco cuyo seno tiene por logaritmo 9.717 36 27. Encontrarémos este número en la pág. (578) en la columna que lleva el título de seno arriba, por lo cual el arco á que pertenece es 31°—26'—30".

Sea como 2º ejemplo, determinar el arco cuya cotangente tiene por logaritmo 9·721 44 69. Este número se encuentra en la pág. (556) en la columna que lleva el título de cotangente en la parte de abajo, por lo cual el arco buscado es: 62º—13'—50".

2º CASO.—*Cuando el logaritmo dado no se encuentra exactamente en las tablas,* que es lo mas comun, se buscará en las dos columnas que llevan por título arriba ó abajo la línea trigonométrica á que pertenece el logaritmo que mas se le aproxime; teniendo cuidado de tomar el *próximo menor* cuando se trata *del seno* y la *tangente*, y el *próximo mayor* para el *coseno* y la *cotangente*. Se verá el arco expresado en grados, minutos y decenas de segundos á que el logaritmo encontrado pertenece, y se anotará para despues agregarle lo que corresponda por la diferencia que haya entre ese logaritmo y el dado. Restando los dos logaritmos, resulta una diferencia que llamaremos l, y como en arcos pequeños y dentro de ciertos límites de aproximacion, hemos visto que los incrementos de los arcos son proporcionales á los que tienen los logaritmos de las líneas trigonométricas, llamando d la diferencia entre dos logaritmos próximos correspondiente á 10'', y por e lo que se ha de aumentar al arco que pertenece al logaritmo hallado en la tabla, podremos establecer la siguiente proporcion:

$$d : l :: 10'' : e = \frac{10\,l}{d}$$

fundada en este razonamiento: *la diferencia de los logaritmos correspondiente á 10'', es á la diferencia entre el logaritmo de las tablas y el dado; como 10'', es á los segundos y fracciones de segundo que debemos agregar al arco de las tablas.*

Así, pues, prescindiendo de los arcos muy pequeños ó cercanos á 90°, en los cuales no se verifica esta proporcion, *para determinar el número de segundos y la fraccion de segundos que debe agregarse al arco á que pertenece el logaritmo hallado en la tabla, deberá multiplicarse por 10 la diferencia que hay entre el logaritmo dado y el de las tablas, y dividirse el producto por la diferencia correspondiente á 10''.* Algunos ejemplos aclararán esta regla.

Sea por determinar el arco, cuyo seno tiene por log. 9·986 72 88. Por tratarse de una línea directa cuyo valor crece cuando el arco aumenta, tomarémos el log. próximo menor, que se encuentra en la pág. (474) en la columna seno, y cuyo valor es, 9·986 7250, y el cual pertenece al arco 75°—54'—20''. Dispondremos el cálculo como sigue:

log. sen. x =9·986 72 88

en las tablas 9·986 72 50 corresponde á 75°—54'—20'' d=53

10×l= 380 $7''{\cdot}17 = \frac{380}{53}$

El arco á que corresponde el log. dado es 75°—54'—27'' ·17

2° *Ejemplo:* Encontrar el arco cuya tang. tiene por log. 0'401 9878

log. tang. x =0·401 98 78

en las tablas, 0·401 95 33 corresponde á 68°—22'—50'' d = 615

10×l 3 450 $5''{\cdot}61 = \frac{3450}{615}$

El arco buscado será............ ....68°—22'—55''·61

3^er. *Ejemplo:* Determinar el arco cuyo coseno tiene por log. ...... 9·979 28 32.

Por tratarse de una línea indirecta, buscaremos el logaritmo próximo mayor.

log. cos. x = 9·979 28 32

en las tablas 9·979 28 65 corresponde á 17°—33'—20'' d = 67

10×l 330 $4{\cdot}93 = \frac{330}{67}$

El arco buscado será........ ....17°—33'—24·93

4° *Ejemplo:* Determinar el arco cuya cotangente tiene por log..... 9·242 53 21. Por tratarse de una línea indirecta, cuyo valor decrece al aumentar el arco, buscaremos el log. próximo mayor.

log. cot. x =9·242 53 21

en las tablas 9·242 61 03 corresponde á 80°—5'—0'' d = 12 42

10×l 78 20 $6''{\cdot}29 = \frac{78\ 20}{12\ 42}$

El arco buscado será............. x=80°—5'—6''·29

Podria haberse tomado el log. próximo menor con el cos. y la cot.; pero entonces tendria que restarse el arco correspondiente á la diferencia de los logaritmos.

3^er. Caso.—*Cuando el logaritmo dado pertenece á un seno ó á una tangente, y la diferencia de los logaritmos entre los que se encuentra es muy considerable,* debe procederse como sigue. Se buscará en la primera parte de la tabla, donde los arcos varían de segundo en segundo, el logaritmo que mas se aproxime al logaritmo dado, y se reducirán á segundos los grados y minutos del arco correspondiente. Llamemos a el número de segundos así obtenidos y $a+h$ el número exacto de segundos y fracciones de segundos del arco buscado. Al tratar del 3^er. caso del problema inverso al que nos ocupa, (793) demostramos las fórmulas:

log. sen. (a+h)=log. sen.a+log. (a+h)—log.a........(A)
log. tang. (a+h)=log. tang.a+log. (a+h)—log.a. .....(B)

si en cada una de ellas despejamos á log. (a+h), tendrémos:

$$\log.\ (a+h)=\log.\ \text{sen.}\ (a+h)+\log.a-\log.\ \text{sen.}a \ldots\ldots (C)$$
$$\log.\ (a+h)=\log.\ \text{tang.}\ (a+h)+\log.a-\log.\ \text{tang.}a \ldots\ldots (D)$$

y el valor de (a+h) se determinará por una de estas ecuaciones segun se trate del seno ó de la tangente.

Supongamos que se busca el arco cuyo seno tiene por log. 6·862 53 45 El logaritmo próximo menor en la tabla es 6·861 66 61 que corresponde al arco 0°—2'—30"=150"=a. El logaritmo de *a*, así como el número (a+h) los encontraremos en las tablas de los números, y los demas en las líneas trigonométricas. Sustituyendo en la fórmula (C) calcularemos (a+h) como sigue:

$$\begin{array}{ll} \log.\ \text{sen.}\ (a+h) & =6{\cdot}862\ 53\ 45 \\ \log.a=150'' & =2{\cdot}176\ 09\ 13 \\ \hline & 9{\cdot}038\ 62\ 58 \\ \text{Menos log. sen. } 0^\circ-2'-30'' & 6{\cdot}861\ 66\ 61 \\ \hline & 2{\cdot}176\ 95\ 97 = \log.\ 150''{\cdot}30\ 02 \end{array}$$

De una manera análoga procederiamos para una tangente y aun para una cotangente, supuesto que su logaritmo es igual y de signo contrario al de la tangente; pero cuando se trata de determinar un arco muy pequeño por medio de su coseno es imposible hacerlo con precision. Si se quiere, por ejemplo, conocer el arco cuyo coseno tiene por log. 9·999 99 97, las tablas en su segunda parte muestran que el mismo logaritmo pertenece á todos los arcos comprendidos desde 0°—3'—50" hasta 0°—4'—20", lo que quiere decir que el arco pedido, no puede obtenerse sino con una incertidumbre de 40".

4º Caso.—*Cuando el logaritmo de la línea trigonométrica tiene una característica menor que 4 corresponderá á un arco menor que un segundo*, y se procederá como sigue. Se le agregarán á la característica las unidades necesarias para que sea igual ó mayor que 4, y se verá á qué número de segundos corresponde en la primera parte de las tablas de 0 á 5°, y en seguida se dividirá el número de segundos por la unidad seguida de tantos ceros como unidades se agregaron á la característica. Por ejemplo, buscamos el arco cuyo seno tiene por log. 2·862 5345. Agregando 3 unidades á la característica queda 5·862 5345 que corresponde al arco 15"·03, cuyo número habrá que dividirlo por 1000, resultando que

$$2{\cdot}862\ 5345=\log.\ \text{sen.}\ 0''{\cdot}01503.$$

795.—Valores naturales de las líneas trigonométricas.— Ya hemos indicado, que cuando la magnitud de una línea trigonométrica, se refiere á la del radio tomado como unidad se obtienen los valores naturales de las líneas trigonométricas, y las tablas de Callet pueden servir para determinarlos, así como para tener el logaritmo de una línea trigonométrica cuando se conoce su valor natural.

1º *Si se trata de determinar el valor natural de la línea trigonométrica de un ángulo dado*, se buscará su logaritmo en las tablas de las líneas trigonométricas; y en seguida, en las tablas de los números se verá á qué número corresponde ese logaritmo.

Por ejemplo, supongamos que se trata de determinar el valor natural del coseno de 60°. En la página (569) encontramos, que el log. correspondiente al coseno de 60°, es de 9·698 97 00. En seguida determinaremos el número á que corresponde. Este será decimal, y siendo 9 la característica, no habrá ningun cero despues de la coma. En la tabla de los números, buscaremos á cuál corresponde la mantiza del logaritmo encontrado; y en la pág. (72) hallamos que pertenece á 50 000. En consecuencia, el coseno natural de 60°, es $0{\cdot}5=\frac{1}{2}$. Hemos tomado el arco de 60°, con el objeto de que los alumnos vean que el resultado de las tablas es exactamente igual al obtenido en el núm. 731 prob. X.

Aplicando la regla anterior para determinar la tangente de 30°, se encuentra: log. tang. 30°=9·761 4394 página (570), y este log. en las tablas de los números, pág. (85) corresponde 0'577 35.

Luego tang. 30°=0'57 735 del radio.

En el número 731, prob. VIII, encontramos que tang. $30^\circ=\frac{1}{3}\sqrt{3}$ y para comprobar nuestro resultado, bastará calcular por logaritmos la expresion $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{2}\ \log.\ 3 & =0{\cdot}238\ 56\ 062 \\ \text{Menos log. } 3 & =0{\cdot}477\ 12\ 125 \\ \hline & \bar{1}{\cdot}761\ 439\ 37 \end{array}$$

cuyo log. siendo igual al de tang.30°, es claro que los dos valores serán idénticos.

2º *Si conocido el valor natural de una línea trigonométrica, se quiere determinar su logaritmo*, bastará buscar en las tablas de los números el logaritmo correspondiente al valor natural conocido.

Por ejemplo: se busca el log. de la tangente de 23°—32', cuyo valor natural es 0·435504. Como el log. de este número es 9·638 99 22 este será aproximadamente el logaritmo de la tangente de 23°—32'. Decimos aproximadamente, porque en el valor natural solo hemos estimado seis cifras decimales.

796.—Observaciones sobre los logaritmos de las líneas trigonométricas.—Con el fin de evitar el uso de las características negativas en las tablas de Callet, se ha adoptado el método de los complementos aritméticos de estas características; pero á causa de esto, debe tenerse muy presente, al ejecutar operaciones con este sistema de logaritmos, todo lo que dijimos al tratar de los logaritmos de los números (337. II) y lo que hemos explicado en los problemas en que entran esta clase de características; (338, IV, VIII, XIII y XIV), pero es importante fijarse en qué logaritmos corresponden á fracciones decimales y cuáles pertenecen á números enteros, para así saber desde luego en qué casos deberá restarse 10 de la característica, suprimir ó restituir las decenas de estas, ó tomar los logaritmos tales como resulten.

Como los valores de los senos y cosenos varían desde 1 hasta 0, sus logaritmos siempre corresponden á fracciones decimales; y en las características, de sus logaritmos, está sobrentendida la resta de 10. Las tangentes son menores que el radio, desde 0 hasta 45°, y sus logaritmos corresponden á fracciones decimales; pero desde 45° en adelante, como la tangente es mayor que 1, los logaritmos pertenecen á números enteros, y las características que constan en las tablas, son las verdaderas. Las cotangentes por el contrario, son mayores que el radio de cero á 45°, y menores que 1 de 45 á 90°; por lo que los logaritmos de las cotangentes de 0 á 45° corresponden á números enteros, y de 45 á 90° pertenecen á decimales.

797.—Aproximacion que puede obtenerse con las tablas.—Si se examinan las diferencias logarítmicas de las líneas trigonométricas en las tablas de Callet, se notará que son muy considerables para el seno en los arcos pequeños; que varían frecuentemente; que á medida que el arco va creciendo, estas diferencias disminuyen y son constantes para mayor número de arcos hasta llegar á ser nulas al aproximarse á 90°.

La razon de esto, es, que el seno va creciendo de 0 á 90°, y hemos demostrado ya, (337—III) que *la diferencia logarítmica entre dos números consecutivos, disminuye á medida que el valor absoluto de los números aumenta.*

Para el coseno se observan variaciones en sentido inverso, muy pequeñas en los arcos cercanos á cero y grandes en los próximos 90°. Respecto á la tangente y cotangente, sus diferencias logarítmicas siempre son numéricamente mayores que las del seno y tienen variaciones análogas á las de esta línea.

Ahora bien, como mientras mayor es la diferencia logarítmica, tanto más será la aproximacion que podemos obtener empleando los logaritmos de las líneas á que pertenecen: el exámen de esas variaciones es de la mayor importancia para la práctica.

Si nos fijamos por ejemplo en el arco de 2°, veremos en la pág. (402) de las tablas, que la diferencia logarítmica del seno de 2° y de 2°—0'—10" es 6025. En consecuencia, si 6025 diferencia entre los logaritmos de los senos corresponde á una de 10" en el arco, cuando la diferencia entre los logaritmos sea una unidad de 7° órden, la diferencia entre los arcos la determinaremos por la siguiente proporcion:

$$6025 : 1 :: 10'' : x = 0''\ '0017$$

Así, pues, usando los logaritmos de Callet en arcos próximos á 2° por medio del seno podremos obtener la aproximacion de 0" '0017.

Para el coseno, la diferencia es de 8. Por tanto,

$$8 : 1 :: 10'' : x = 1''\ '25$$

y la aproximacion sirviéndonos del coseno, será de 1" '25, esto es, 735 veces menor que con el seno.

Siendo la diferencia logarítmica para la tangente y cotangente 6033 un cálculo idéntico conduce á que estas líneas dan una aproximacion un poco mayor que el seno.

Calculando la aproximacion que produce la variacion de una unidad de 7° órden en la mantiza del logaritmo del seno en arcos de diversas magnitudes, estableciendo y resolviendo en cada caso una proporcion como acabamos de hacerlo, se obtiene la siguiente tabla:

5°	20°	40°	45°	50°	70°	85°	89°-40'
0" '004	0" '017	0" '040	0" '047	0" '057	0" '125	0" '526	5" '000

Así, pues, los ángulos próximos á 90° quedarán muy mal determinados por sus senos; y de la misma manera los ángulos pequeños se obtienen con muy poca exactitud por medio del coseno. Las tangentes y cotangentes dan errores menores que el seno como puede verse comparando la siguiente tabla con la anterior:

5°	20°	40°	45°	50°	70°	85°	89°—40'
0" '004	0" '015	0" '023	0" '024	0" '023	0" '015	0" '004	0" '0003

Por esta razon, en la práctica siempre que sea posible se deberán determinar los ángulos por sus tangentes ó cotangentes, de preferencia al seno ó coseno; cuando esto no sea posible, y los ángulos sean pequeños, debe procurarse usar el seno, y cuando se aproximen á 90° servirse del coseno.

798.—Por último, haremos notar, que no hemos tratado de la secante, de la cosecante, seno verso y coseno verso, porque son líneas cuyo uso es poco frecuente en la práctica. Por lo demas, como

$$\text{sec.a}=\frac{1}{\text{cos.a}} \text{ y } \text{cosec.a}=\frac{1}{\text{sen.a}}$$

conocidos los logaritmos del seno y coseno, es muy fácil determinar los de la cosecante y secante, pues bastará cambiarles signo á los de las primeras líneas y tomar sus complementos aritméticos para tener los de las últimas.

Las expresiones del seno y coseno verso tienen el inconveniente de no ser adecuadas al uso de los logaritmos.

799.—Problemas.—I.—Determinar los logaritmos de las siguientes líneas:

log. del seno de 3°—12'—28"
log. tang. 1°—18'—58"
log. cos. 87°—53'—19"
log. sen. 42°—25'—30"
log. sen. 54°—19'—37" '35
log. cos. 85°—17'—40"
log. cos. 32°—22'—52" '25
log. tang. 59°—30'—30"
log. tang. 37°—45'—48"—36'"
log. cot. 49°—19'—20"
log. cot. 86°—10'—35" '7

II.—Determinar los arcos de las líneas trigonométricas cuyos logaritmos son los siguientes:

9·424 6147 log. sen.
9·978 3800 „ sen.
9·547 2425 „ cos.
9·958 7602 „ cos.
0·804 3941 „ tang.
9·371 7568 „ tang.
0·456 2978 „ cot.
9·229 5384 „ cot.

III.—Determinar el valor natural de las siguientes líneas:

del seno 32°—15'—20"
del cos. 75°—16'—10"
tang. 63°—18'—12" '3
cot. 22°—25'—30" '48

IV.—Determinar los logaritmos de las siguientes líneas trigonométricas cuyos valores naturales son:

sen. 41°—30'=0'66262
cos. 25°—20'=0'90383
tang. 28°—44'=0'54824
cot. 9°—20'=6'08444

V.—Determinar el número de grados, minutos, etc., de un arco, sabiendo que la secante es igual á 3, y el radio del círculo igual á 2.

Como los tamaños de las líneas trigonométricas se determinan en partes del radio tomando éste por unidad, para resolver el problema comenzamos por determinar el valor de la secante, en el supuesto de que el radio fuera la unidad. En virtud de que las magnitudes de las líneas trigonométricas son proporcionales á los radios, puede formarse esta proporcion: si cuando el radio es 2, la secante es 3; cuando el radio sea 1, la secante será $\frac{3}{2}$.

Entónces el problema se reduce á determinar el valor de un arco conociendo la secante.

Llamando a el arco se tiene: $\sec.a=\frac{3}{2}$. Poniendo por sec. su valor $\frac{1}{\cos.a}$ y despejando, resulta:

$$\cos.a=\frac{2}{3}$$

de donde $\log.\cos.a=\log.2-\log.3$

$$\log.2=0'301\ 03000$$
$$\log.3=0'477\ 12125$$
$$\log.\cos.a=9'823\ 9087=\log.\cos.\ 48^\circ-11'-23'' \text{ arco cuya sec.}=\frac{3}{2}$$

VI.—Determinar el arco cuyo seno verso$=\frac{5}{6}$ siendo el radio $\frac{12}{13}$.

Siendo el sen. ver.=radio menos el coseno, tendremos que

$$\text{el coseno}=\frac{12}{13}-\frac{5}{6}=\frac{72-65}{78}=\frac{7}{78}$$

Determinaremos cuál sería el coseno cuando el radio =1 por la proporcion:

$$\frac{12}{13}:\frac{7}{78}::1:\cos.a=\frac{91}{936}=\frac{7}{72}$$

luego $\log.\cos.a=\log.7-\log.72$

$$\log.\ 7=0'845\ 09804$$
$$\log.\ 72=1'857\ 33250$$
$$8'987\ 76554=\log.\cos.\ 84^\circ-25'-15''$$

que será el arco que tiene $\frac{5}{6}$ por seno verso cuando el radio es $\frac{12}{13}$.

VII.—Determinar los valores límites y correlativos en estos límites

de las líneas trigonométricas, deduciéndolos de las fórmulas fundamentales. (729)

En la fórmula $\operatorname{sen}^2a+\cos^2a=1$,

siendo los sumandos esencialmente positivos y no pudiendo ser uno de ellos mayor que la suma, se infiere: 1° que el seno crece cuando el coseno disminuye y recíprocamente, y 2° que el valor máximo de sen^2a ó de $\cos^2a$ será 1, siendo para esto indispensable que la otra línea sea cero.

En este caso $\operatorname{sen}.a=\pm\sqrt{1}=\pm1$.

Se ve, pues, que el seno puede ser igual á cero y que sus valores límites son +1 y —1 cuando $\cos.a=0$.

Recíprocamente el coseno puede ser cero y sus valores máximos son +1 y —1 cuando el seno es cero.

Los valores límites y correlativos en estos límites del seno y del coseno, conforme á la fórmula $\operatorname{sen}^2a+\cos^2a=1$, son:

para	0°	sen.a=0	y cos.a=+1
,,	90°	sen.a=+1	cos.a=0
,,	180°	sen.a=0	cos.a=—1
,,	270°	sen.a=—1	cos.a=0

En la fórmula $\operatorname{tang}.a=\frac{\operatorname{sen}.a}{\cos.a}$

los valores correlativos
$$\begin{cases}\operatorname{sen}.a=+1,\ \cos.a=0 & \text{dan tang. } 90^\circ=+\infty\\ \operatorname{sen}.a=0,\ \cos.a=+1 & \text{,, tang. } 0^\circ=0\\ \operatorname{sen}.a=0,\ \cos.a=-1 & \text{,, tang.} 180^\circ=0\\ \operatorname{sen}.a=-1,\ \cos.a=0 & \text{,, tang.} 270^\circ=-\infty\end{cases}$$

La *tangente* varía de 0 á $+\infty$ y á $-\infty$ en razon directa del seno.

En la fórmula $\cot.a=\frac{1}{\operatorname{tang}.a}$

el valor
$$\begin{cases}\operatorname{tang}.a=+\infty & \text{da cot. } 90^\circ=0\\ \operatorname{tang}.a=0 & \text{,, cot. } 0^\circ=\infty\\ \operatorname{tang}.a=0 & \text{,, cot.} 180^\circ=-\infty\\ \operatorname{tang}.a=-\infty & \text{,, cot.} 270^\circ=0\end{cases}$$

La *cotangente* varia de 0 á $+\infty$ y á $-\infty$ en razon inversa de la tangente.

En la fórmula $\quad \text{sec.a} = \dfrac{1}{\text{cos.a}}$

$$\text{el valor} \begin{cases} \text{cos.a}=+1 \text{ da sec. } 0^\circ=+1 \\ \text{cos.a}=0 \quad ,, \text{ sec. } 90^\circ=+\infty \\ \text{cos.a}=0 \quad ,, \text{ sec.} 270^\circ=-\infty \\ \text{cos.a}=-1 \quad ,, \text{ sec.} 180^\circ=-1 \end{cases}$$

La *secante* varia de $+1$ á $+\infty$ y de -1 á $-\infty$ en razon inversa del coseno.

En la fórmula $\quad \text{cosec.a} = \dfrac{1}{\text{sen.a}}$

$$\begin{aligned} &\text{sen.a}=+1 \text{ da cosec. } 90^\circ=+1 \\ &\text{sen.a}=0 \quad ,, \text{ cosec. } 0^\circ=+\infty \\ &\text{sen.a}=0 \quad ,, \text{ cosec. } 180^\circ=-\infty \\ &\text{sen.a}=-1 \quad ,, \text{ cosec. } 270^\circ=-1 \end{aligned}$$

La *cosecante* varia de $+1$ á $+\infty$ y de -1 á $-\infty$ en razon inversa del seno.

En la fórmula $\quad \text{sen. ver.a}=1-\text{cos.a}$

$$\text{el valor} \begin{cases} \text{cos.a}=+1 \text{ da sen. ver. } 0^\circ=0 \\ \text{cos.a}=0 \quad ,, \text{ sen. ver. } 90^\circ=1 \\ \text{cos.a}=0 \quad ,, \text{ sen. ver.} 270^\circ=1 \\ \text{cos.a}=-1 \quad ,, \text{ sen. ver.} 180^\circ=2 \end{cases}$$

El *seno verso* siempre es positivo y varia de 0 á 2.

En la fórmula $\quad \text{cos. ver.a}=1-\text{sen.a}$

$$\text{el valor} \begin{cases} \text{sen.a}=+1 \text{ da cos. ver. } 90^\circ=0 \\ \text{sen.a}=0 \quad ,, \text{ cos. ver. } 0^\circ=1 \\ \text{sen.a}=0 \quad ,, \text{ cos. ver.} 180^\circ=1 \\ \text{sen.a}=-1 \quad ,, \text{ cos. ver.} 270^\circ=2 \end{cases}$$

El *coseno verso* siempre es positivo y varia de 0 á 2.

Procedimientos para hacer adaptables al uso de los logaritmos algunas expresiones.

300.—Para que el cálculo de los logaritmos pueda aplicarse inmediatamente á la determinacion del valor numérico de una expresion, se necesita que en esta no existan ligadas las cantidades por adicion y sustraccion; y en caso de haber términos precedidos de los signos $\pm$ se dice que la fórmula no es calculable por logaritmos. En este caso, para hacer la expresion adaptable al empleo de los logaritmos, se necesita hacer en ella algunas trasformaciones de las que vamos á ocuparnos brevemente.

Cuando se tiene la diferencia de los cuadrados, fundándonos en que ésta es igual á la suma de las cantidades multiplicada por su diferencia (251—III), fácilmente puede hacerse la trasformacion exijidà. Por ejemplo:

Si $\quad x=a^2-b^2$

tendremos $\quad x=(a+b)(a-b)$

Igualmente si $\quad \text{sen.a}=\sqrt{1-\text{cos}^2\text{a}}$

tendremos $\quad \text{sen.a}=\sqrt{(1+\text{cos.a})(1-\text{cos.a})}$

expresiones adaptables al uso de los logaritmos.

Si se tiene una expresion con la suma ó diferencia de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes, las fórmulas (59) á (66) desde luego trasforman estas sumas y diferencias en expresiones adaptables al uso de los logaritmos. Esas fórmulas pueden reasumirse como sigue:

$$\text{sen.p}\pm\text{sen.q}=2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(p\pm q) \text{ cos. } \tfrac{1}{2}(p\mp q)$$

$$\text{cos.q}+\text{cos.p}=2 \text{ cos. } \tfrac{1}{2}(p+q) \text{ cos. } \tfrac{1}{2}(p-q)$$

$$\text{cos.q}-\text{cos.p}=2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(p+q) \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(p-q)$$

$$\text{tang.a}\pm\text{tang.b}=\frac{\text{sen.}(a\pm b)}{\text{cos.a cos.b}}$$

$$\cot. a \pm \cot. b = \frac{\text{sen.}(b \pm a)}{\text{sen.} a \ \text{sen.} b}$$

801.—Consideremos ahora el caso más general cifrado en una expresion binomia:

$$x = a \pm b$$

en la que se busca el logaritmo de x, conociendo los logaritmos de los números positivos a y b.

Sacando a como factor comun: $x = a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)$

Esto supuesto, introduzcamos un arco auxiliar φ cuya magnitud se fijará por la condicion de que se tenga:

$$\text{tang.}\ \varphi = \frac{b}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

este arco φ, comprendido entre cero y 90° se calculará por logaritmos, por la fórmula:

$$\log.\ \text{tang.}\ \varphi = \log.\ b - \log.\ a$$

El valor de x se trasforma en

$$x = a(1 \pm \text{tang.}\ \varphi) = a\left(1 \pm \frac{\text{sen.}\ \varphi}{\cos.\ \varphi}\right) = a\frac{\cos.\ \varphi \pm \text{sen.}\ \varphi}{\cos.\ \varphi} \ldots\ldots\ldots (2)$$

pero se tiene:

$$\cos.\ \varphi \pm \text{sen.}\ \varphi = \cos.\ \varphi \pm \cos.(90° - \varphi)$$

conforme á las fórmulas (61) y (62) se tiene:

$$\cos.\varphi + \cos.(90° - \varphi) = 2\cos.\ \tfrac{1}{2}(90° - \varphi + \varphi)\cos.\ \tfrac{1}{2}(90° - \varphi - \varphi)$$
$$= 2\cos.\ 45°\ \cos.\ (45° - \varphi)$$
$$\cos.\ \varphi - \cos.(90° - \varphi) = 2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(90° - \varphi + \varphi)\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(90° - \varphi - \varphi)$$
$$= 2\ \text{sen.}\ 45°\ \text{sen.}\ (45° - \varphi)$$
$$= 2\cos.\ 45°\ \cos.\ (45° + \varphi)$$

luego $\qquad \cos.\ \varphi \pm \text{sen.}\ \varphi = 2\cos.\ 45°\ \cos.\ (45° \mp \varphi)$

sustituyendo este valor en la ecuacion (2), se tiene:

$$x = \frac{a.\ 2\cos.\ 45°\ \cos.\ (45° \mp \varphi)}{\cos.\ \varphi}$$

Sustituyendo por cos. 45° su valor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (731—IX)

$$x = \frac{a.\sqrt{2}\ \cos.\ (45° \mp \varphi)}{\cos.\ \varphi} \ldots\ldots\ldots (3)$$

cuya expresion puede calcularse por logaritmos, como sigue:

$$\log.\ x = \log. a + \tfrac{1}{2}\log.\ 2 + \log.\ \cos.(45° \mp \varphi) - \log.\ \cos.\ \varphi$$

El mismo método puede aplicarse á una expresion polinomia cualquiera $a \pm b \pm c \pm d \ldots$; pues, en efecto, se podrá con el empleo de un arco auxiliar reducir una unidad el número de los términos del polinomio, con un segundo arco auxiliar se disminuirá este número otra unidad, y continuando así se lograría trasformarla en un monomio.

802.—Indicaremos otro método que puede emplearse para hacer adaptable al uso de los logaritmos una expresion binomia.

Supongamos que esta es de la forma:

$$x = a + b$$

sacando a como factor $\qquad x = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$

tomaremos un arco auxiliar de modo que

$$\text{tang}^2\varphi = \frac{b}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

expresion propia para el uso de los logaritmos.

Sustituyendo $\qquad x = a(1 + \text{tang}^2\varphi) = a(\sec^2\varphi)$

ó definitivamente $x = \frac{a}{\cos^2 \varphi}$ .... (5)

expresion igualmente adaptable para el empleo de los logaritmos.

Si se tiene $x = a - b$

tomaríamos un arco auxiliar φ de modo que se tenga:

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{b}{a} \text{ .... (6)}$$

ó bien

$$b = a \operatorname{sen}^2 \varphi$$

sustituyendo se tiene: $x = a - a \operatorname{sen}^2 \varphi = a(1 - \operatorname{sen}^2 \varphi)$

ó por último $x = a \cos^2 \varphi$ .... (7)

fórmula propia para el uso de los logaritmos.

Resolucion de los triángulos rectángulos.

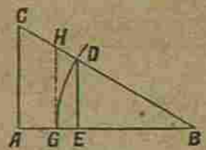
803.—Vamos á tratar ahora de la resolucion de los triángulos, comenzando por los rectángulos. Como ya lo hemos dicho, la resolucion de un triángulo tiene por objeto determinar los elementos desconocidos, cuando para ello hay los datos necesarios, y por regla general son datos suficientes tres elementos, cuando uno de ellos es un lado.

A fin de facilitar el uso de nuestras fórmulas, y evitar estar repitiendo la representacion algebraica de los elementos de los triángulos, convendremos en indicar los ángulos por las letras mayúsculas A, B y C, y los lados respectivamente opuestos á cada ángulo por las minúsculas *a, b* y *c*. Ademas, en el caso de ser rectángulo el triángulo, constantemente representaremos el ángulo recto por A, y la hipotenusa por *a*.

Esto supuesto, comenzaremos por establecer y demostrar los principios que sirven de fundamento á la resolucion de los triángulos rectángulos.

804.—PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.—Sea el triángulo rectángulo A B C (fig. 367), y haciendo centro en uno de los vértices B de los án-

gulos agudos con un radio B G igual al de las tablas, tracemos el arco G D. En seguida bajemos la recta D F perpendicular á A B, que será el seno del ángulo B, y levantando la perpendicular G H, esta será la tangente del mismo ángulo. Por ser A C, G H y D F perpendiculares á A B, serán semejantes los triángulos B A C, B G H y B F D. Así, pues, se tiene:



(Fig. 367)

La hipotenusa B C=a, A C=b, A B=c, B G=B D=r, D F=sen. B. B F=cos. B y G H=tang. B.

Comparando los lados homólogos de los triángulos semejantes, resultan las siguientes proporciones:

BC : BD :: AC : DF sustituyendo a : r :: b : sen. B de la que $b = \frac{a \operatorname{sen.} B}{r}$

BC : BD :: AB : BF „ a : r :: c : cos. B „ $c = \frac{a \cos. B}{r}$

AB : AC :: BG : GH „ c : b :: r : tang. B „ $b = \frac{c \operatorname{tang.} B}{r}$

Estas tres proporciones son la expresion de los tres principios siguientes:

1º—*La hipotenusa es al radio, como un lado es al seno del ángulo opuesto.*

2º—*La hipotenusa es al radio, como un lado es al coseno del ángulo adyacente.*

3º—*Un lado es á otro lado, como el radio es á la tangente del ángulo opuesto al segundo lado comparado.*

Estos tres teoremas, ó las fórmulas que de ellos se derivan, sirven de fundamento á la resolucion de los triángulos rectángulos, unidos á los teoremas demostrados en geometría, y que son: la suma de los tres ángulos de un triángulo vale 180°, y el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.

Así, pues, haciendo el radio igual á la unidad en las tres últimas ecuaciones, y expresando analíticamente los teoremas de geometría, tendremos las siguientes fórmulas para la resolucion de los triángulos rectángulos:

$$b = a \text{ sen. } B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$
$$c = a \text{ cos. } B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$
$$b = c \text{ tang. } B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

De que $A+B+C=180°$ cuando $A=90°$, se deduce:

$$B = 90° - C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (D)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (E)$$

Debemos hacer notar, que si en vez del vértice B tomamos como centro el otro ángulo, resultarian fórmulas análogas á las (A), (B) y (C), que serian: $c=a$ sen.C, $b=a$ cos.C y $c=b$ tang.C, las cuales pueden deducirse de las primeras cambiando b en c y B en C; por lo cual estas fórmulas deben entenderse como expresion de que *un lado cualquiera es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto ó por el coseno del adyacente, y que un cateto es igual al producto del otro lado por la tangente del ángulo opuesto.*

Al emplear los logaritmos para el cálculo de estas fórmulas, debe recordarse que al hacer el radio igual con la unidad, los logaritmos del seno, coseno, y á veces la tangente, tienen sobrentendida la resta de 10 unidades en su característica, cuya resta es preciso efectuar para determinar el valor del lado que se busca. La supresion de 10 unidades en la característica equivale á lo que hacen varios autores, que considerando las ecuaciones que se deducen de nuestras proporciones, y suponiendo el radio dividido en 10,000.000,000 de partes, restan de la suma de los logaritmos de los numeradores el logaritmo de *r*, que es 10, conduciendo ambos procedimientos al mismo resultado.

805.—Casos para la resolucion de los triángulos rectángulos.—Hemos indicado que el problema que hay que resolver en trigonometría, es determinar tres de los elementos de un triángulo, conocidos los otros tres. Ahora bien, como cuando el triángulo es rectángulo siempre se conoce el ángulo A recto, á este elemento hay que agregar otros dos para buscar los otros tres desconocidos; de modo que el número de casos que pueden presentarse en la resolucion de los triángulos rectángulos, será el de combinaciones diferentes que pueden hacerse con las cinco cantidades B, C, a, b y c, tomándolas de dos en dos.

La fórmula (5) del número 356 se convierte en

$$C\frac{5}{2} = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$$

y aunque en efecto son diez las combinaciones que pueden hacerse to-

mando de dos en dos las cantidades B, C, a, b, c, un exámen detenido hace ver que basta distinguir cuatro principales:

Combinaciones.	
B, C	Caso indeterminado conociendo A.
B, a y C, a	La hipotenusa y un ángulo.
a, b y a, c	La hipotenusa y un cateto.
B, b; C, c; B, c; C, b	Un cateto y un ángulo.
b, c	Dos catetos.

Resulta, pues, que aunque pueden presentarse 10 combinaciones diferentes con los datos de un triángulo rectángulo, bastará considerar los cuatro casos siguientes:

1°—*Dada la hipotenusa y un ángulo agudo,* determinar los demas elementos.
2°—*Dada la hipotenusa y un cateto,* idem idem
3°—*Dado un cateto y un ángulo agudo,* idem idem
4°—*Dados los dos catetos,* idem idem

Para escojer con facilidad la fórmula que corresponda al caso que tenga que resolverse, los alumnos podrán aplicar las siguientes reglas:

Deberá examinarse, 1° si forma ó no parte del problema la hipotenusa, y 2° si no entran como datos ni como incógnita los ángulos.

Si la hipotenusa forma parte del problema, se hará uso de la fórmula (A) ó de la (B), sirviéndose de la (A) cuando el cateto y el ángulo que son objeto de la cuestion, tengan la posicion de opuestos, y se tomará la (B) cuando sean adyacentes.

Si en el problema no entra la hipotenusa, pero sí uno de los ángulos agudos, se hará uso de la fórmula (C).

Por último, si los ángulos no entran como datos ni como incógnita, se tomará la fórmula (E)

806.—Rectificacion de los datos y de los resultados.—A menudo es importante, antes de emprender los cálculos necesarios para resolver un triángulo, examinar si los datos de la cuestion no envuelven alguna contradiccion que haga imposible el problema, así como tambien lo es, despues de haber ejecutado las operaciones numéricas necesarias para determinar el valor de los elementos desconocidos, poder comprobar los resultados para tener la seguridad de que no se ha cometido alguna equivocacion.

Las condiciones que debe satisfacer un triángulo para ser posible, son: que un lado cualquiera sea menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia; que el mayor lado esté opuesto al mayor ángulo, y recíprocamente; que la suma de los tres ángulos sea 180°, y en los triángulos rectángulos que la hipotenusa sea mayor que cualquiera de los catetos, así como que el cuadrado de la hipotenusa sea igual á la suma de los cuadrados de los catetos. Teniendo presentes estos principios, será siempre fácil darse cuenta de si pueden ó no aceptarse los datos ó los resultados de la resolucion del triángulo. Para la rectificacion de los resultados en los triángulos rectángulos, debe tenerse:

$$B+C=90^\circ$$

y

$$a^2=b^2+c^2$$

cuya fórmula, para hacerla adaptable al uso de los logaritmos, la pondremos en la forma:

$$b^2=a^2-c^2=(a+c)\,(a-c)$$

307.—Problemas.—I.—Resolver un triángulo rectángulo (fig. 368) con los datos siguientes:

$a=194^{m}$'07
$b=\ \,39$'95

(Fig. 368)

Para determinar B usaremos la fórmula (A) $b=a$ sen. B, de la que

$$\text{sen. } B=\frac{b}{a}$$

Para determinar C usaremos la fórmula (B) $b=a$ cos. C, de la que

$$\cos. C=\frac{b}{a}$$

Para determinar c, emplearemos la fórmula (E) $a^2=b^2+c^2$ de la que

$$c=\sqrt{(a+b)\ (a-b)}$$

Calculo de B.

log. b = 1'601 5168
log. a = 2'287 9584

log. sen. B = 9'313 5584
B = 11°—52'—46" '1

Calculo de C.

log. b = 1'601 5168
log. a = 2'287 9584

log. cos. C = 9'313 5584
C = 78°—7'—13" '9

Calculo de c.

$(a+b)=234^{m}$ '02 — log. (a+b) = 2'369 2530
$(a-b)=154$ '12 — log. (a—b) = 2'187 8590

4'557 1120

Tomando la mitad; log. $\sqrt{(a+b)\ (a-b)}$ = 2'278 5560 = log. c

$c=189^{m}$'9135

Comprobacion.—Para rectificacion del cálculo debemos tener B + C = 90°; y en efecto:

B = 11°—52'—46" '1
C = 78°— 7—13 '9

B + C = 90°— 0 — 0

Para comprobar el valor de c conociendo préviamente C, lo podemos calcular por la fórmula (C): $c=b$ tang. C.

Calculo de c.

log. b = 1'601 5168
log. tang. C = 0'677 0392

log. c = 2'278 5560 = log. 189^{m} '9135

II.—Resolver un triángulo rectángulo (fig. 368) con los siguientes datos:

$a=4935^{m}$ '20
B = 35°—14'—15"

Para determinar b, haremos uso de la fórmula (A)

b = a sen. B

Para c de la (B) c = a cos. B

Para determinar C, de la (D) C = 90°—B

CALCULO DE b.

log. de 4935 '20........3'693 3048

log. sen. 35°—14'—15"...9'761 1510

log. b..............(1)3'454 4558

CALCULO DE c.

log.a =3'693 3048

log. cos.B=9'912 0984

log.c (1)3'605 4032

Al sumar estos logaritmos, rebajamos una decena de la característica por el complemento aritmético de las características de los logaritmos, del seno y coseno.

b=2847^{m}'448 c=4030^{m}'911

CALCULO DE C.

$$\begin{array}{r} 90°—00'—00" \\ —B=35°—14'—15" \\ \hline C=54°—45'—45" \end{array}$$

COMPROBACION.—Siendo $a^2=b^2+c^2$ debe tenerse:

$$c=\sqrt{(a+b)\,(a-b)}$$

(a+b)=7782'648 log. (a+b)=3'891 1275

(a—b)=2087'752 log. (a—b)=3'319 6789

log. (a+b) (a—b)=7'210 8064

Tomando la mitad; log $\sqrt{(a+b)(a-b)}$=3'605 4032=log. c

c.= 4030^{m}'911

Resolucion de los triángulos oblicuángulos.

808.—PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.—Comenzaremos por establecer y demostrar los principios en que tendremos que fundarnos para resolver los triángulos oblicuángulos.

1° *En un triángulo cualquiera, los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.*

Lo mismo que en los triángulos rectángulos, representaremos por A, B y C los ángulos de los triángulos; y por *a*, *b* y *c* los lados que respectivamente les están opuestos.

Consideremos primero el triángulo A B C, de la fig. 369, en el que el ángulo C es agudo, y desde el vértice B bajemos la perpendicular B D al lado A C, con lo cual quedará dividido en dos triángulos rec-

tángulos, en los que, conforme á la ecuacion (A) del párrafo 804, se tiene:

B D=A B sen.A=c sen.A
B D=B C sen.C=a sen.C

Si se considera el triángulo A B C en el que el ángulo C es obtuso, tendremos:

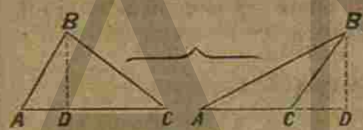
B D=A B sen. A=c sen. A
B D=B C sen. BCD=a sen. BCD

pero como B C D es suplemento de B C A, y el seno de un ángulo es igual y del mismo signo que el seno de su suplemento, (735), se tiene, tanto en el caso en que C es agudo, como cuando es obtuso que

B D=c. sen. A
B D=a. sen. C

luego c. sen. A=a. sen. C

y formando una proporcion:



(Fig. 369)

a : c :: sen.A : sen.C

Si desde el vértice A bajáramos una perpendicular sobre el lado B C, obtendríamos:

c : b :: sen.C : sen.B

luego en general a : c : b :: sen.A : sen.C : sen.B

que es lo que se trataba de demostrar.

Comunmente á esta série de razones iguales, se les da la forma de ecuacion para la resolucion de los triángulos, como sigue:

$$\frac{a}{\text{sen. A}}=\frac{b}{\text{sen. B}}=\frac{c}{\text{sen. C}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(F)$$

2° *El cuadrado de un lado de un triángulo cualquiera es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman.*

Esto es, en la fig. 369 vamos á demostrar que

$$A\,B^2=B\,C^2+A\,C^2-2.\ A\,C\times B\,C\times\cos.\ A\,C\,B$$

Consideremos primero el caso en que el ángulo C sea agudo. Conforme al teorema demostrado en geometría (534) tendremos:

$$A\,B^2 = B\,C^2 + A\,C^2 - 2\,A\,C \times D\,C$$

ó sustituyendo: $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,b \times D\,C$

pero como en el triángulo rectángulo B D C conforme á la ecuacion (B) del núm. 804, $D\,C = B\,C\ \cos.\ C = a.\ \cos.\ C$, sustituyendo, resulta:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ a.\ b.\ \cos.\ C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Si consideramos el triángulo A B C cuando el ángulo C es *obtuso*, conforme al teorema demostrado en geometría (533) tendremos:

$$A\,B^2 = B\,C^2 + A\,C^2 + 2\ A\,C \times C\,D$$

ó

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,b \times C\,D \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

en el triángulo rectángulo B C D conforme á la fórmula (B) se tiene:

$$C\,D = B\,C \times \cos.\ B\,C\,D = a.\ \cos.\ B\,C\,D$$

pero como B C D es suplemento de B C A, y el coseno de un ángulo es igual al coseno de su suplemento tomado como signo contrario, (740) se tiene que $\cos.\ B\,C\,D = -\cos.\ B\,C\,A$, luego

$$C\,D = -a.\ \cos.\ B\,C\,A$$

y sustituyendo en la ecuacion (2) resulta:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ a\ b\ \cos.\ C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

expresion idéntica á la (1) del caso en que C era agudo.

Del mismo modo que hemos obtenido c en funcion de a, b, y el ángulo opuesto C bajando desde el vértice B, la perpendicular B D al lado A C, si lo hiciéramos desde los vértices C y A, obtendriamos:

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = a^2 + c^2 - 2\ a\ c.\ \cos.\ B \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2\ b\ c.\ \cos.\ A \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\ a\ b.\ \cos.\ C \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (G)$$

y la demostrada (la última).

3ª *En todo triángulo, la suma de dos de sus lados, es á su diferencia como la tangente de la mitad de la suma de los ángulos opuestos, es á la tangente de la mitad de su diferencia.*

En virtud de la ecuacion (F) tenemos:

$$a : \text{sen.}A :: b : \text{sen.}B$$

fundándonos en que la suma de los antecedentes es á su diferencia como la de los consecuentes es á la suya, tendremos:

$$a + b : a - b :: \text{sen.}A + \text{sen.}B : \text{sen.}A - \text{sen.}B$$

Por otra parte, en virtud de la fórmula (67)

$\dfrac{\text{sen.}p + \text{sen.}q}{\text{sen.}p - \text{sen.}q} = \dfrac{\text{tang.}\frac{1}{2}(p+q)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(p-q)}$ se tiene reemplazando p por A, y q por B:

$$\text{sen.}A + \text{sen.}B : \text{sen.}A - \text{sen.}B :: \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A-B)$$

luego $\quad a + b : a - b :: \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A-B) \ldots\ldots\ldots (H)$

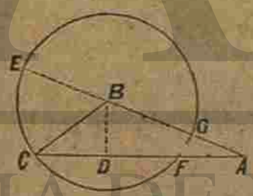
que es lo que se queria demostrar.

4º Si desde el vértice B (fig. 370 y 371) de un triángulo se baja una perpendicular B D al lado opuesto prolongándolo si fuere necesario, se tiene que, *el lado sobre el cual cae la perpendicular es á la suma de los otros dos, como su diferencia es á la diferencia de los segmentos* A D *y* D C *cuando la perpendicular cae dentro del triángulo, ó á la suma de los segmentos cuando cae fuera.*

Esto es, vamos á demostrar que

$b : c + a :: c - a : AD - DC$ cuando la perpendicular cae dentro.

$b : c + a :: c - a : AD + DC$ cuando la perpendicular cae fuera.



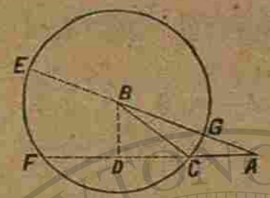
(Fig. 370)

Consideraremos primero el caso (fig. 370) en el que la perpendicular B D cae dentro del triángulo. Haciendo centro en el vértice B, desde el que se baja la perpendicular, y tomando por radio el lado menor B C, trazarémos un círculo y prolongarémos el lado A B hasta E. Por la construccion de la figura, tenemos $B\,C = a = B\,E = B\,G$, y siendo B D una perpendicular á la cuerda C F que pasa por el centro, la dividirá en dos partes iguales $C\,D = D\,F$.

Ahora, fundándonos en que dos secantes A C y A E, tiradas desde un mismo punto, son recíprocamente proporcionales á sus partes externas A F y A G, tendrémos: (540).

$$AC : AE :: AG : AF$$

ó sustituyendo: $\quad b : c + a :: c - a : A\,D - D\,C \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$



(Fig. 371)

Si consideramos el caso en que la perpendicular cae fuera del triángulo, (fig. 371) en virtud del mismo teorema, tendremos:

$$AC : AE :: AG : AF$$

y sustituyendo $b : c+a :: c-a : AD+DC$ . . (J)

que es lo que se queria demostrar.

A estos cuatro principios hay que agregar el teorema de geometría:

$$A+B+C=180° \ldots\ldots\ldots\ldots (K)$$

809.—Casos para la resolucion de los triangulos oblicuángulos.—Buscando, como lo hemos hecho al tratar de los triángulos rectángulos, el número de combinaciones que pueden formarse con los seis elementos de un triángulo A, B, C, a, b y c, tomándolos de tres en tres, por medio de la fórmula (5) del número 356, encontraríamos:

$$C^6_3=\frac{6\times5\times4}{2\times3}=20$$

pero como vamos á verlo, se reducen á cuatro casos diferentes.

Si se dan A B y C, el caso es indeterminado y no debe considerarse porque hay una infinidad de triángulos con los datos del problema.

1er. caso.—*Dados dos ángulos y un lado, determinar los demas elementos.* Este caso ofrece *nueve* combinaciones:

A, B, a	A, C, a	B, C, a
A, B, b	A, C, b	B, C, b
A, B, c	A, C, c	B, C, c

Cuando se conocen dos ángulos, el tercero está determinado por la relacion

$$A+B+C=180°$$

2° caso.—*Dados dos lados y un ángulo opuesto á uno de ellos,* ofrece *seis* combinacsones

a, b, A	a, c, A	b, c, B
a, b, B	a, c, C	b, c, C

3er. caso.—*Dados dos lados y el ángulo que forman;* que ofrece *tres* combinaciones

a, b, C — a, c, B | b, c, A

4° caso.—*Dados los tres lados,* determinar los ángulos, que ofrece *una* sola combinacion:

a, b, c.

En el 2° caso, como lo hemos explicado en geometría (443—VIII), el problema por regla general, admite dos resoluciones.

810.—Primer caso.—*Conocidos dos ángulos y un lado de un triángulo, determinar sus demas elementos.*

Para facilitar nuestras explicaciones, supondremos que conocemos:

A, B y a

pero naturalmente el procedimiento de investigacion, será el mismo áun cuando se cambien las denominaciones de estos datos.

El tercer ángulo C, se determinará despejándolo de la ecuacion (K) que dá:

$$C=180°-(A+B)$$

Conocidos los tres ángulos y el lado *a*, los lados *b* y *c* se determinarán valiéndonos de la fórmula (F)

$$\frac{a}{\text{sen.}A}=\frac{b}{\text{sen.}B}=\frac{c}{\text{sen.}C}$$

que da

$$b=\frac{a\ \text{sen.}B}{\text{sen.}A} \quad \text{y} \quad c=\frac{a\ \text{sen.}C}{\text{sen.}A}$$

En este caso, para que el problema sea posible, se necesita que

$$A+B<180°$$

811.—Segundo caso.—*Conocidos dos lados de un triángulo y el ángulo opuesto á uno de ellos, determinar los demas elementos.*

Supondremos que conocemos

a, *b* y A

La fórmula (F) da $\text{sen.}B=\dfrac{b\ \text{sen.}A}{a}$ . . . . (1)

Conocidos los ángulos A y B, de la relacion (K), sacamos:

$$C=180°-(A+B) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Por último, para determinar c, nos valdremos del primer principio cifrado en la fórmula (F), y tendremos:

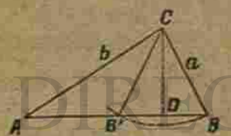
$$c=\frac{a \text{ sen. } C}{\text{sen. } A}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

DISCUSION.—Como el valor de B está dado por un seno en la ecuacion (1), y el seno de un ángulo es igual y del mismo signo que el seno de su suplemento, pueden tomarse para B, por regla general, dos valores: el que se encuentre en las tablas, siempre $<90°$, que corresponde á log. sen. B, y el de su suplemento que es un ángulo obtuso. Sustituidos estos dos valores, que llamaremos B y B', en la ecuacion (2) se obtendrán dos valores para C; los que sustituidos á su vez en la ecuacion (3), darán para c dos valores. Se ve, pues, que en el segundo caso de la resolucion de los triángulos oblicuángulos, puede haber dos triángulos que satisfagan las condiciones del problema; pero hay varias circunstancias en las que el problema solo tiene una resolucion, y otras en que no admite ninguna.

Aun cuando ya hemos explicado en geometría (443—VIII), las diferentes circunstancias de este problema, volveremos á ocuparnos de ellas para que los alumnos las tengan presentes en la resolucion de los triángulos.

1°—Si el ángulo dado A (fig. 372), en vez de ser agudo fuera *recto* ú *obtuso*, el otro ángulo B forzosamente seria agudo, (436) y el problema no admitiria mas que una sola resolucion; pero entonces, para que el triángulo sea posible, es necesario tener a$>$b para que al mayor ángulo esté opuesto el lado mayor.

2°—Si el ángulo dado A es agudo y se tiene b$<$a, el problema no admitirá mas que una sola resolucion; porque debiendo ser B$<$A (431), no podremos tomar para el ángulo buscado el suplemento del valor que para B dan las tablas, porque no puede ser obtuso. Por lo demas, el triángulo siempre es posible.



(Fig. 372)

3°—Si el ángulo dado A es agudo y se tiene b=a, no habrá mas que una resolucion; pues siendo el triángulo isósceles, debe tenerse B=A (429), y tendremos que tomar para B el valor del ángulo agudo.

4°—Si siendo el ángulo A agudo y a$<$b se tiene ademas que a=b sen. A, el problema no admitirá mas que una sola resolucion. En efecto, hemos visto que el valor de B se determina por la ecuacion (1):

$$\text{sen. } B=\frac{b \text{ sen. } A}{a}$$

Ahora bien, siendo a=b sen. A, sustituyendo:

$$\text{sen. } B=1$$

y B=90° igual á su suplemento B'. En este caso, el lado C B toma la posicion de la perpendicular C D en la figura.

5°—Si siendo A agudo y a$<$b se tiene $a<b$ *sen. A*, el problema es imposible. En efecto, si dividimos por a los dos miembros de la desigualdad

$$a<b \text{ sen. } A$$

tendremos $$1<\frac{b \text{ sen. } A}{a}$$

y el valor de sen. B dado por la ecuacion (1)

$$\text{sen. } B=\frac{b \text{ sen. } A}{a}$$

se trasformaria en $$\text{sen. } B>1$$

lo que es imposible, pues hemos visto que el seno de un ángulo no puede ser mayor que el radio =1. En la figura esta circunstancia estaria indicada cuando el lado B C fuera menor que C D, cuya perpendicular tiene por valor b sen. A, y entónces con los datos del problema no podria cerrarse ningun triángulo.

6°—Por último, cuando A$<$90°, y a$<$b pero mayor que b sen. A, el problema admitirá dos resoluciones; pues como se ve en la fig. 372 haciendo centro en C trazando un arco con el radio C B, se cortará el lado opuesto en los puntos B y B', resultando dos triángulos A C B y A C B' con los datos del problema, en los que el ángulo AB'C=180°—B.

En resúmen: en el 2° caso de la resolucion de los triángulos oblicuángulos conociendo A, a y b el problema

SERÁ IMPOSIBLE: 1° cuando A=6$>$90° y a$<$b
2° ,, A$<$90° y a$<$b sen. A

ADMITIRÁ SOLO UNA RESOLUCION: 1° cuando A=6$>$90°
2° cuando siendo A$<$90°, sea b$<$a
3° ,, ,, A$<$90° ,, b=a
4ª ,, ,, A$<$90° ,, a=b, sen. A

ADMITIRA DOS RESOLUCIONES: Cuando A$<$90°, y a$<$b pero$>$b sen. A

812.—TERCER CASO.—*Dados dos lados y el ángulo que forman, determinar los demas elementos de un triángulo.*

Primer procedimiento. Supondremos que conocemos

a, b y el ángulo C

De la ecuacion (K) resulta: $A+B=180°-C$

$$\tfrac{1}{2}(A+B)=90°-\frac{C}{2}\ldots\ldots(1)$$

Conocida la mitad de la suma de los ángulos A y B, vamos á determinar la mitad de su diferencia, para lo cual nos valdremos del 3^er. principio cifrado en la proporcion (H).

$$a+b : a-b :: \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{(a-b)\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B)}{a+b}$$

y como $\tfrac{1}{2}[A+B]$ tiene por complemento $\frac{C}{2}$, $\text{tang.}\tfrac{1}{2}[A+B]=\text{cot.}\ \tfrac{1}{2}\ C$,

Sustituyendo tendremos:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}[A-B]=\frac{(a-b)\ \text{cot.}\tfrac{1}{2}\ C}{a+b}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Una vez determinados los valores de $\tfrac{1}{2}(A+B)$ y $\tfrac{1}{2}(A-B)$ por las fórmulas (1) y (2), fácilmente se calculará el valor del ángulo mayor, que es el opuesto al mayor lado, y el del ángulo menor (266—V). Esto es, suponiendo $A>B$

$$A=\tfrac{1}{2}(A+B)+\tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$B=\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(A-B)$$

Una vez conocidos los tres ángulos, el lado c se determinará por medio de la fórmula (F)

$$c=\frac{\text{sen. } C.\ a}{\text{sen. } A}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

813.—*Segundo procedimiento para resolver el tercer caso.*

Conforme al 2° principio cifrado en la fórmula (G) tenemos:

$$c^2=a^2+b^2-2\ a\ b.\ \cos.\ C$$

Si multiplicamos (a^2+b^2) por $\cos^2\tfrac{1}{2}\ C+\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\ C=1$; y si por cos. C sustituimos su valor, (fórmula 35) $\cos.\ C=\cos^2\tfrac{1}{2}\ C-\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\ C$, la expresion anterior se trasforma en

$$c^2=(a^2+b^2)(\cos^2\tfrac{1}{2}\ C+\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\ C)-2\ a\ b\ [\cos^2\tfrac{1}{2}\ C-\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\ C]$$

ejecutando la multiplicacion y sacando $\cos^2\tfrac{1}{2}\ C$ y $\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\ C$ como factor se tiene:

$$c^2=(a-b)^2\cos^2\tfrac{1}{2}\ C+(a+b)^2\ \text{sen}^2\tfrac{1}{2}\ C\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

sacando $(a-b)^2\cos^2\tfrac{1}{2}\ C$ como factor comun, para lo cual deberá dividirse el 2° término, por esta cantidad tendremos:

$$c^2=(a-b)^2\cos^2\tfrac{1}{2}\ C\left[1+\frac{(a+b)^2\ \text{sen}^2\tfrac{1}{2}\ C}{(a-b)^2\cos^2\tfrac{1}{2}\ C}\right]$$

extrayendo raiz cuadrada

$$c=(a-b)\cos.\tfrac{1}{2}\ C\sqrt{1+\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\text{tang}^2\tfrac{1}{2}\ C}\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

con el objeto de hacer adaptable esta fórmula al uso de los logaritmos, introduciremos un arco auxiliar, haciendo el término:

$$\frac{a+b}{a-b}\text{tang.}\tfrac{1}{2}\ C=\text{tang.}\ \varphi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(L)$$

y entónces: $\sqrt{1+\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\ C}=\sqrt{1+\text{tang}^2\varphi}=\text{sec.}\ \varphi=\frac{1}{\cos.\ \varphi}$

Sustituyendo este valor en la expresion (b) resulta finalmente:

$$c=\frac{(a-b)\cos.\tfrac{1}{2}\ C}{\cos.\ \varphi}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(M)$$

Por medio de las fórmulas (L) y (M) se determinará c, y una vez conocidos a, b, C y c, valiéndonos de la fórmula (F) se obtendrán los valores de A y B por las expresiones siguientes:

$$\text{sen.}A=\frac{a.\ \text{sen.}C}{c}\quad \text{y}\quad \text{sen.}B=\frac{b.\ \text{sen.}C}{c}\ldots\ldots\ldots\ldots(c)$$

La ventaja que tiene este procedimiento sobre el primero que hemos indicado para resolver el 3^er. caso, es que pueden rectificarse los cálculos, examinando si

$$A+B+C=180°$$

La razon de esto, es, que en el 2° procedimiento se han determinado los valores de los ángulos A y B por fórmulas especiales; mientras que en el primer procedimiento hemos deducido esos valores precisamente de la expresion $A+B+C=180°$, por lo cual no podemos servirnos de ella para comprobar los cálculos. *

814.—CUARTO CASO.—*Dados los tres lados a, b y c de un triángulo, determinar sus tres ángulos.*

El 2° principio cifrado en la fórmula (G) da:

$$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c.\cos.A$$

despejando á $\cos.A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$

sustituyendo este valor en la expresion (37)

$$\cos.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1+\cos.A}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4\,b\,c}}$$

poniendo por $b^2+2\,b\,c+c^2$ su valor $(b+c)^2$ se tiene:

---

* Algunas veces conviene dar otra forma á las expresiones (L) y (M) por diferir muy poco la magnitud de a y de b, lo cual tiende á hacer nulo el denominador del valor de tang. φ. En este caso, de la fórmula (a), sacarémos como factor comun á $(a+b)^2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}C$, á cuyo fin dividirémos por esta cantidad el primer término, y se tiene:

$$c^2=(a+b)^2\text{sen}^2\tfrac{1}{2}C\left(1+\frac{(a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}C}{(a+b)^2\text{sen}^2\frac{1}{2}C}\right)$$

extrayendo raiz cuadrada

$$c=(a+b)\,\text{sen}.\tfrac{1}{2}C\sqrt{1+\frac{(a-b)^2\cot^2\frac{1}{2}C}{(a+b)^2}}$$

introduciendo un arco auxiliar φ de modo que

$$\text{tang}.\,\varphi=\frac{a-b}{a+b}\cot.\tfrac{1}{2}C\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (L')$$

tendrémos:

$$c=(a+b)\,\text{sen}.\tfrac{1}{2}C\sqrt{1+\text{tang}^2\varphi}=(a+b)\,\text{sen}.\tfrac{1}{2}C\,\text{sec}.\varphi$$

ó finalmente

$$c=\frac{(a+b)\,\text{sen}.\frac{1}{2}C}{\cos.\varphi}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (M')$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4\,b\,c}}$$

Como la diferencia de los cuadrados es igual á la suma de las cantidades por su diferencia (251—III) se tiene que $(b+c)^2-a^2=(b+c+a)(b+c-a)$, por lo cual la expresion anterior se convierte en

$$\cos.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(b+c+a)\ (b+c-a)}{4\,b\,c}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (b)$$

Harémos la suma de los tres lados

$$a+b+c=2\,p$$

Restando 2a á los dos miembros, se tiene:

$$b+c-a=2\,(p-a)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion (b), y dividiendo por 4 los dos términos del quebrado, resulta:

$$\cos.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p\,(p-a)}{b\,c}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (N)$$

Por medio de esta fórmula determinarémos el ángulo A. Cambiando A en B, a en b y recíprocamente tendríamos el ángulo B. Cambiando A en C, a en c y recíprocamente tendríamos B; pero como hemos visto (797) que los valores son mas aproximados cualquiera que sea la magnitud de los ángulos valiéndonos de la tangente, vamos á obtener otra fórmula análoga á la (N) en la que el ángulo esté expresado por una tangente. A este fin de la fórmula

$$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c.\cos.A$$

despejarémos á $\cos.A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$

sustituyendo este valor en la expresion (36)

$$\text{sen}.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1-\cos.A}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}}{2}}=\sqrt{\frac{2\,b\,c-b^2-c^2+a^2}{4\,b\,c}}$$

Como $(b-c)^2=b^2-2\,b\,c+c^2$, cambiando signos tendremos: $-(b-c)^2=2\,b\,c-b^2-c^2$;

luego $$\text{sen.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4\,b\,c}}$$

reemplazando la diferencia de los cuadrados por el producto de la suma por su diferencia

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(a+b-c)\ (a+c-b)}{4\,b\,c}}\ \ldots\ldots\ldots(c)$$

haciendo como ántes

$$a+b+c=2\,p$$

restando sucesivamente de los dos miembros 2 b y 2 c, resulta:

$$a+c-b=2\ (p-b)$$
$$a+b-c=2\ (p-c)$$

Sustituyendo estos valores en la expresion (c) y dividiendo los dos términos del quebrado por 4, resulta finalmente:

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)\ (p-c)}{b\,c}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(O)$$

Dividiendo la fórmula (O) por la (N), y teniendo presente que $\frac{\text{sen.}\,a}{\text{cos.}\,a}=\text{tang.}\,a$, tendremos definitivamente:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)\ (p-c)}{p\ (p-a)}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(P)$$

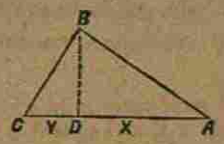
que es la fórmula que usaremos para determinar un ángulo en funcion de los tres lados, de preferencia á las (N) y (O), porque se obtiene mayor aproximacion sirviéndose de las tangentes. Cuando el ángulo es pequeño, da mas aproximacion la fórmula (O) que la (N) sucediendo lo contrario cuando el valor del ángulo se acerca á 90° (797). Cuando se quieran determinar B y C, las fórmulas serán:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-c)}{p\ (p-b)}}\quad \text{y}\quad \text{tang.}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)}{p\ (p-c)}}$$

en las que

$$p=\tfrac{1}{2}\ (a+b+c)$$

La comprobacion natural y sencilla del cálculo á que da lugar este caso, es, que la suma de los tres ángulos encontrados, sea igual á 180°.



(Fig. 373)

815.—Este 4° caso puede resolverse de otro modo. Sea el triángulo A B C, (fig. 373) y desde el vértice B, bajemos la perpendicular B D al lado opuesto sobre el que determinará dos segmentos A D y C D que llamaremos x é y. Cuando la perpendicular cae dentro del triángulo, como en la figura que consideramos, conforme al 4° principio (808) tendremos:

$$b : a+c :: a-c : x-y \text{ que da } x-y=\frac{(a+c)\ (a-c)}{b}$$

Conocido el valor numérico de x—y, como b=x+y, podrá determinarse el valor de cada uno de los segmentos (266—V). Suponiendo que x sea el mayor, tendremos:

$$x=\frac{b}{2}+\frac{(a+c)(a-c)}{2\,b}$$

$$y=\frac{b}{2}-\frac{(a+c)(a-c)}{2\,b}$$

Una vez conocidos los segmentos x é y, se resolverán los triángulos rectángulos B D A y B D C en los que, conforme á la fórmula (B), se tiene:

$$\text{cos.}\,A=\frac{x}{c};\ \text{cos.}\ C=\frac{y}{a}\ \text{y por último,}\ B=180°-(A+C)$$

En el caso de que la perpendicular B D caiga fuera del triángulo (fig. 374) conforme al mismo 4° principio (808) tendremos:

(Fig. 374)

$$b : c+a :: c-a : x+y \text{ que da } x+y=\frac{(c+a)\ (c-a)}{b}$$

Conocido el valor numérico de la suma de los segmentos, como x—y=b; suponiendo que x sea mayor que y, tendremos: (266—V)

$$x=\frac{(c+a)\ (c-a)}{2\,b}+\frac{b}{2}$$

$$y=\frac{(c+a)\ (c-a)}{2\,b}-\frac{b}{2}$$

Una vez conocidos los segmentos resolviendo los triángulos rectángulos A B D y C B D por medio de la fórmula (B) se determinarán los ángulos

$$\cos. A=\frac{x}{c} \qquad \cos. B\,C\,D=\frac{y}{a} \qquad B\,C\,A=180^\circ-B\,C\,D \text{ y } B=B\,C\,D-A$$

Se debe tener presente, que *bajando la perpendicular desde el vértice opuesto al lado mayor caerá siempre dentro del triángulo, y que el segmento mayor* x *es el adyacente al mayor lado,* por ser su proyeccion.

El primer procedimiento es preferible al segundo, porque los ángulos están dados por una tangente, y porque se tiene la comprobacion de los cálculos viendo si $A+B+C=180^\circ$.

816.—Rectificacion de los datos y de los resultados.—Lo mismo que indicamos al tratar de los triángulos rectángulos (806), es conveniente en los oblicuángulos examinar si los datos no envuelven algun absurdo, y comprobar los resultados de los cálculos. Para el primer objeto, hemos dicho que debe tenerse presente que un lado cualquiera sea menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia; que al lado mayor esté opuesto el mayor ángulo y recíprocamente; y que la suma de los tres sea de 180°. Para comprobar los cálculos hemos indicado que los del tercer caso, cuando se emplea el segundo procedimiento, y los del cuarto se rectifican fácilmente viendo si la suma de los tres ángulos encontrados da 180°. Respecto al primer caso, al segundo y al tercero, cuando se usa el primer procedimiento, lo mejor es suponer como datos las incógnitas y calcular los otros elementos del triángulo que deben resultar iguales á las cantidades conocidas. Generalmente la rectificacion se limita á buscar el valor de uno solo de los elementos empleando un método diferente.

Por ejemplo, en el primer caso conociendo A, B, y *a*, se ha encontrado el valor de C, *b* y *c*; pues bien: como rectificacion bastará buscar el valor de C en funcion de a, b y c por medio de la fórmula (P).

817.—Fórmula fundamental.—Podemos considerar la fórmula (G) en que quedó cifrado el segundo principio (808) como fundamental para la resolucion de los triángulos oblicuángulos. En efecto, hemos visto que partiendo de la fórmula

$$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\,\cos. A$$

hemos resuelto el tercer caso empleando el segundo procedimiento y el cuarto caso.

Vamos ahora á deducir de la misma fórmula los principios 1°, 3° y

4° del párrafo 808, que nos han servido para resolver todos los casos, y cuyos principios quedaron cifrados en las fórmulas:

$$\frac{a}{\text{sen.} A}=\frac{b}{\text{sen.} B} \quad \ldots\ldots \quad (F)$$

$$a+b : a-b :: \text{tang } \tfrac{1}{2}(A+B) : \text{tang.} \tfrac{1}{2}(A-B) \quad \ldots\ldots \quad (H)$$

y

$$b : c+a :: c-a : x\pm y \quad \ldots\ldots \quad (J)$$

1°—Despejando á cos. A, de la fórmula fundamental

$$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\,\cos. A$$

se tiene:

$$\cos. A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$$

Sustituyendo este valor en la expresion $\text{sen}^2 a=1-\cos^2 a$, tendremos:

$$\text{sen}^2 a=1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}\right)^2=\frac{4\,b^2\,c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4\,b^2\,c^2}$$

Si elevamos al cuadrado el trinomio $(b^2+c^2-a^2)$ multiplicándolo por sí mismo nos resulta:

$$(b^2+c^2-a^2)^2=a^4+b^4+c^4-2\,a^2\,b^2-2\,a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2$$

sustituyendo en la expresion de $\text{sen}^2 A$ y cambiando signos para ejecutar la resta de las cantidades que quedan dentro del paréntesis, se tiene:

$$\text{sen}^2 A=\frac{4\,b^2\,c^2-a^4-b^4-c^4+2\,a^2\,b^2+2\,a^2\,c^2-2\,b^2\,c^2}{4\,b^2\,c^2}$$

Haciendo la reduccion de los términos $4\,b^2\,c^2-2\,b^2\,c^2$ y dividiendo los dos miembros de la ecuacion por a^2, resulta:

$$\frac{\text{sen}^2 A}{a^2}=\frac{-a^4-b^4-c^4+2\,a^2\,b^2+2\,a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2}{4\,a^2\,b^2\,c^2} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Ahora bien, si tomamos la ecuacion

$$b^2=a^2+c^2-2\,a\,c\cos.B$$

Despejando á cos.B y sustituyendo en la ecuacion: $\text{sen}^2B=1-\cos^2B$, se tiene:

$$\text{sen}^2B=1-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2\,a\,c}\right)^2=\frac{4\,a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4\,a^2c^2}$$

elevando al cuadrado $(a^2+c^2-b^2)$ y sustituyendo, se obtiene:

$$\text{sen}^2B=\frac{4\,a^2c^2-(a^4+b^4+c^4+2\,a^2c^2-2\,a^2b^2-2\,b^2c^2)}{4\,a^2c^2}$$

ejecutando la resta indicada, reduciendo y dividiendo por b^2 los dos miembros, resulta:

$$\frac{\text{sen}^2B}{b^2}=\frac{-a^4-b^4-c^4+2\,a^2b^2+2\,a^2c^2+2\,b^2c^2}{4\,a^2b^2c^2}\ldots\ldots(2)$$

y como los segundos miembros de las ecuaciones (1) y (2) son iguales, se infiere que

$$\frac{\text{sen}^2A}{a^2}=\frac{\text{sen}^2B}{b^2}$$

ó que $\frac{\text{sen}.A}{a}=\frac{\text{sen}.B}{b}$,

que es lo que se queria demostrar.

3º—Deduciremos igualmente por medio del cálculo, de la fórmula (G) el 3er. principio cifrado en la expresion:

$$a+b : a-b :: \text{tang}.\tfrac{1}{2}(A+B) : \text{tang}.\tfrac{1}{2}(A-B)\ldots\ldots\ldots(H)$$

se tiene:

$$a^2=b^2+c^2-2\,bc.\cos.A\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$b^2=a^2+c^2-2\,ac.\cos.B\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$c^2=a^2+b^2-2\,ab.\cos.C\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Sumando las ecuaciones (2) y (3)

$$b^2+c^2=2\,a^2+b^2+c^2-2\,a\,c.\cos.B-2\,a\,b.\cos.C$$

suprimiendo en los dos miembros b^2+c^2, dividiendo los términos restantes por $2\,a$ y despejando á a, se tiene:

$$a=c.\cos.B+b.\cos.C\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (3)

$$a^2+c^2=2\,b^2+a^2+c^2-2\,b\,c.\cos.A-2\,a\,b.\cos.C$$

suprimiendo en los dos miembros a^2+c^2, dividiendo los términos restantes por $2\,b$ y despejando á b, se obtiene:

$$b=c.\cos.A+a.\cos.C\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Sumando las ecuaciones (4) y (5)

$$a+b=c\,(\cos.A+\cos.B)+\cos.C\,(a+b)$$

trasladando y despejando;

$$a+b=\frac{c.\,(\cos.A+\cos.B)}{1-\cos.C}\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Restando de la ecuacion (4) la (5)

$$a-b=c\,(\cos.B-\cos.A)-\cos.C\,(a-b)$$

$$a-b=\frac{c\,(\cos.B-\cos.A)}{1+\cos.C}\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Dividiendo la ecuacion (6) por la (7)

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\cos.A+\cos.B}{\cos.B-\cos.A}\times\frac{1+\cos.C}{1-\cos.C}$$

sustituyendo los valores de los dos factores del segundo miembro conforme á las fórmulas (72) y (44)

$$\frac{a+b}{a-b}=\cot.\tfrac{1}{2}(A+B)\cot.\tfrac{1}{2}(A-B)\cot^2\tfrac{1}{2}C\ldots\ldots..(8)$$

Como $A+B+C=180°$; $\frac{1}{2}(A+B)=90°-\frac{1}{2}C$, y por tanto:

$$\cot.\tfrac{1}{2}C=\tang.\tfrac{1}{2}(A+B)$$

sustituyendo este valor en la ecuacion (8) y los de las cotangentes en funcion de las tangentes:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tang.^2\frac{1}{2}(A+B)}{\tang.\frac{1}{2}(A+B)\tang.\frac{1}{2}(A-B)}$$

y simplificando resulta por último:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tang.\frac{1}{2}(A+B)}{\tang.\frac{1}{2}(A-B)}$$

que es la expresion del 3^er principio que nos propusimos deducir.

4°—Vamos á sacar finalmente el 4° principio (808) cifrado en la proporcion

$$c : a+b :: a-b : x-y$$

de la ecuacion $\quad a^2=b^2+c^2-2\,b\,c.\cos.A$

Trasladando b^2 $\quad a^2-b^2=c^2-2\,b\,c.\cos.A$

reemplazando la diferencia de los cuadrados, y sacando *c* como factor comun:

$$(a+b)(a-b)=c(c-b\cos.A-b\cos.A)\ldots\ldots\ldots..(1)$$

(Fig. 375)

En el triángulo rectángulo C D A (fig. 375) se tiene: (B)

$$y=b.\cos.A$$

$$x=BA-DA=c-y$$

$$x=c-b\cos.A$$

Sustituyendo los valores de $c-b\cos.A$ y de $b.\cos.A$ en la ecuacion (1) resulta:

$$(a+b)(a-b)=c(x-y)$$

formando una proporcion con estos cuatro factores, se obtiene:

$$c : a+b :: a-b : x-y$$

que es lo que se queria demostrar.

818.—Deduccion de las fórmulas de los triángulos rectángulos.—Siendo, como son, los triángulos rectángulos un caso particular de los triángulos oblicuángulos, naturalmente es muy sencillo deducir de las fórmulas que nos han servido para resolver los triángulos oblicuángulos las que establecimos para los rectángulos: pero, por ejercicio las sacaremos directamente de la fórmula (G) introduciendo en ella las condiciones de los triángulos rectángulos. Esto es,

$$A=90°,\quad B=90°-C,\quad \cos.A=0,\ \text{etc.}$$

Si en la fórmula (G) $\quad a^2=b^2+c^2-2\,b\,c.\cos.A$

sustituimos $\quad \cos.A=0$

resulta: $\quad a^2=b^2+c^2$, comprobacion de la ....(E)

Decimos que comprobamos esta fórmula, y no que la deducimos, porque en geometría nos fundamos en ella para establecer el teorema que sirve de base á la fórmula (G).

Para deducir la expresion $b=a.\,\text{sen}.B$ de los triángulos rectángulos, de la fórmula:

$$c^2=a^2+b^2-2\,ab.\cos.C$$

eliminaremos a^2 y $\cos.C$ sustituyendo sus valores:

$$a^2=b^2+c^2$$

$$\cos.C=\cos.(90°-B)=\text{sen}.B$$

con lo que se tendrá:

$$c^2=2\,b^2+c^2-2\,ab.\,\text{sen}.B$$

suprimiendo c^2 y dividiendo por 2 b, resulta finalmente:

$$b = a.\ \text{sen.}\ B \ \ldots\ \text{fórmula} \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

Para deducir la expresion c=a. cos.B de los triángulos rectángulos, en la fórmula

$$b^2=a^2+c^2-2\ a\ c.\ \cos.B$$

eliminaremos á a^2 sustituyendo su valor

$$a^2=b^2+c^2$$

lo que da $$b^2=b^2+2\ c^2-2\ a\ c.\ \cos.B$$

suprimiendo b^2 y dividiendo por $2c$, resulta:

$$c=a.\ \cos.B \ \ldots\ \text{fórmula} \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

Deduciremos la expresion: b=c. tang.B, dividiendo la ecuacion (A) por la (B), lo cual da:

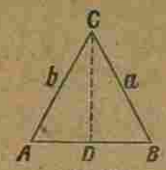
$$\frac{b}{c}=\frac{\text{sen.B}}{\cos.\ B}$$

6 $$b=c\ \text{tang.B, que es la fórmula} \ldots (C)$$

819.—Fórmulas para la resolucion de los triángulos isósceles.—Igualmente es fácil deducir de las fórmulas generales de los triángulos oblicuángulos las correspondientes al caso en que el triángulo sea isósceles, cuya circunstancia estará indicada por la doble condicion de que A=B y a=b; pero vamos á indicar otro procedimiento mucho mas sencillo que puede seguirse para resolver los triángulos isósceles, y el cual consiste en descomponerlos préviamente en dos triángulos rectángulos iguales, y resolver estos en seguida.

1er. *Caso.*—Dados A, B y *a*, determinar los demas elementos.

Por ser el triángulo isósceles, siendo A=B, se tiene a=b.



(Fig. 376)

En la fig. 376, el ángulo D C A=½ C=90°—A y

$$A\ D=\tfrac{1}{2}\ c=b\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}\ C$$

2° *Caso.*—Dados *a*, *b* y A, determinar los demas elementos.

Por ser isósceles el triángulo, se tendrá B=A

$$\tfrac{1}{2}\ C=90°-A$$

y como ántes $$\tfrac{1}{2}\ c=b\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}\ C$$

3er. *Caso.*—Dados *a*, *b* y C, determinar los demas elementos (fig. 376).

$$A=B=90°-\tfrac{1}{2}\ C$$
$$\tfrac{1}{2}\ c=b\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}\ C$$

4° *Caso.*—Dados *a*, *b* y *c*, determinar los tres ángulos.

Considerando el triángulo rectángulo A D C (fig. 376) de la fórmula (A), resulta:

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ C=\frac{\frac{1}{2}\ c}{b}$$

Una vez conocido C, se tiene: A=B=90°—½ C

820.—Antes de ocuparnos de los problemas numéricos relativos á la resolucion de los triángulos oblicuángulos, pondremos la siguiente

Tabla de las fórmulas para la resolucion de los triángulos.

Triángulos rectángulos:

$$b=a\ \text{sen.B} \qquad c=a\ \text{sen.C} \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$
$$b=a\ \cos.C \qquad c=a\ \cos.B \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$
$$b=c\ \text{tang.B} \qquad c=b\ \text{tang.C} \ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$
$$B=90°-C \qquad C=90°-B \ldots\ldots\ldots\ldots (D)$$
$$a^2=b^2+c^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (E)$$

Triángulos oblicuángulos:

$$\frac{a}{\text{sen.A}}=\frac{b}{\text{sen.B}}=\frac{c}{\text{sen.C}} \ldots\ldots\ldots\ldots (F)$$
$$a^2=b^2+c^2-2\ bc.\cos.A,\ b^2=a^2+c^2-2\ ac.\cos.B,\ c^2=a^2+b^2-2\ ab.\cos.C \ldots (G)$$
$$a+b : a-b :: \text{tang.}\tfrac{1}{2}\ (A+B) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}\ (A-B) \ldots\ldots\ldots\ldots (H)$$
$$\text{fig. } 370 \quad b : c+a :: c-a : A\ D-D\ C \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$
$$\text{fig. } 371 \quad b : c+a :: c-a : A\ D+D\ C \ldots\ldots\ldots\ldots (J)$$
$$A+B+C=180° \ldots\ldots\ldots\ldots (K)$$

Para el tercer caso $\text{tang.}\varphi=\frac{a+b}{a-b}\,\text{tang.}\frac{1}{2}C$ ....(L)

$$c=\frac{(a-b)\cos.\frac{1}{2}C}{\cos.\varphi}\ \text{..........................(M)}$$

Para el cuarto caso
$p=\frac{1}{2}[a+b+c]$ $\quad \cos.\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{b\,c}}$ ....(N)

$$\text{sen.}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{b\,c}}\ \text{......................(O)}$$

$$\text{tang.}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p[p-a]}}\ \text{......................(P)}$$

Para los triángulos isósceles, siendo:

$A=B$ y $a=b$, se tendrá: $\frac{1}{2}C=90^\circ-A$ y $\frac{1}{2}c=b\,\text{sen.}\frac{1}{2}C$

821.—Problemas.—I.—*Resolver un triángulo oblicuángulo en el que se conocen dos ángulos y un lado*, cuyos valores son:

$a=9849\overset{m}{}$'73
$B=49^\circ-18'-19''$ '34
$C=95^\circ-14'-49''$ '75

Comenzaremos por determinar A, cuyo valor es: $A=180^\circ-(B+C)$

Cálculo de A.	Cálculo de b.	Cálculo de c.
B= 49°-18'-19" '34	$b=\frac{a\ \text{sen. }B}{\text{sen.}A}$	$c=\frac{a\ \text{sen. }C}{\text{sen.}A}$
C= 95°-14-49 '75		
144 -33 - 9 '09	log.a = 3'993 4244	log.a = 3'993 4244
180 - 0 - 0 '00	log.sen.B= 9·879 7812	log.sen.C= 9 998 1762
A= 35°-26'-50" '91	13.873 2056	13'991 6006
	log.sen.A= 9·763 3953	log.sen.A= 9·763 3953
	log.b = 4'109 8103	log.c = 4'228 2053
	b= 12876'869 (m)	=16912'401 (m)

Como comprobacion calcularemos el lado *a* conociendo A, B y b.

A=35°—26'—50" '91
B=49 —18 —19 '34
b=12876'869 (m)

El valor de *a* se tendrá por la fórmula: $a=\frac{b.\text{sen.}A}{\text{sen.}B}$

Cálculo de a.

log.b	4'109 8103
log.sen.A =	9·763 3953
	13'873 2056
log.sen.B	9·879 7812
log.a =	3'993 4244

log.a = 3'993 4244 de donde a=9849·73 (m) que es el valor que teniamos ántes como dato.

II.—*Resolver un triángulo oblicuángulo en el que se conocen dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.* Sean

a= 6789'24 (m)
b=10079'44
B=87°—24'—11" '8

Determinaremos A por la fórmula:

$$\text{sen.}A=\frac{\text{sen.}B.a}{b}$$

log.sen.B=	9·999 5538
log.a =	3'831 8212
	13·831 3750
log.b =	4'003 4364
log.sen.A=	9'827 9386

log.sen.A= 9'827 9386 lo que da A=42°—17'—23" '4

Estando dado A por un seno, podriamos tomar para el valor de este ángulo el encontrado en las tablas 42°—17'—23" '4, ó su suplemento; pero siendo el lado opuesto a<b, tambien A deberá ser menor que B, por cuya razon no podremos tomar para A el valor del ángulo obtuso.

Una vez conocido A, calcularemos C por la fórmula

C=180°—(A+B)=180°—(129°—41'—35" '2)=50°—18'—24" '8

El lado *c* se determinará por la fórmula:

$$c=\frac{a\ \text{sen.}\ C}{\text{sen.}\ A}$$

log. a	=	3‘831 8212
log. sen. C	=	9·886 1953
		13‘718 0165
log. sen. A	=	9‘827 9386
log. c	=	3‘890 0779 lo que da c=7763^{m}‘86

Para comprobacion del cálculo supondremos conocidos:

c=7763^{m}‘86; C=50°—18’—24” ‘8, y A=42°—17’—23” ‘4

y calcularemos *a* por la fórmula:

$$a=\frac{c.\ \text{sen.}\ A}{\text{sen.}\ C}$$

log. c	=	3‘890 0779
log. sen. A	=	9·827 9386
		13·718 0165
log. sen. C	=	9‘886 1953
log. a	=	3‘831 8212 que da a=6789^{m}‘24, valor igual al

dato primitivo de nuestro problema.

III.—*Resolver un triángulo oblicuángulo en el que se conocen dos lados y el ángulo que forman.* Sean

a=434^{m}·32 Para preparar el cálculo tendremos a+b=814^{m}‘77

b=380^{m}‘45 a—b= 53‘87

C=54°—37’—32” ‘5 $\frac{1}{2}$ C=27°—18’—46” ‘25

Calcularemos primero $\frac{1}{2}$ (A+B)=90°—$\frac{1}{2}$ C=90°—(27°—18’—46” ‘25)

$\frac{1}{2}$ (A+B)=62°—41’—13” ‘75

Para calcular $\frac{1}{2}$ (A—B) nos serviremos de la fórmula (2) del tercer caso: (812)

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,(A—B)=\frac{(a—b)\ \text{cot.}\ \frac{1}{2}\ C}{a+b}$$

log. (a—b)	=	1‘731 3470
log. cot. $\frac{1}{2}$ C	=	0‘286 9949
		2‘018 3419
log. (a+b)	=	2‘911 0350

log. tang. $\frac{1}{2}$ (A—B)=9·107 3069 lo que da $\frac{1}{2}$(A—B)=7°—17’—44” ‘90

Una vez conocidos $\frac{1}{2}$ (A+B) y $\frac{1}{2}$ (A—B), determinaremos el valor de A y de B, debiendo ser A>B por ser a>b

A=62°—41’—13” ‘75+7°—17’—44” ‘90=69°—58’—58” ‘65

B=62°—41’—13” ‘75—(7°—17’—44” ‘90)=55°—23’—28” ‘85

Para determinar *c*, haremos uso de la fórmula:

$$c=\frac{a\ \text{sen.}\ C}{\text{sen.}\ A}$$

log. a	=	2‘637 8098
log. sen. C	=	9·911 3641
		12·549 1739
log. sen. A	=	9·972 9388
log. c	=	2‘576 2351 que da c=376^{m}‘908

Para ejercicio de los alumnos, y como comprobacion del cálculo anterior, resolveremos el mismo triángulo empleando el segundo procedimiento para el tercer caso explicado en el núm. 813. Tenemos:

a=434·32; b=380‘45, y C=54°—37’—32” ‘5

Comenzaremos por determinar el arco auxiliar φ por la fórmula (L)

$$\text{tang.}\ \varphi=\frac{a+b}{a—b}\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ C$$

log. (a+b)	=	2‘911 0350
log. tang. $\frac{1}{2}$ C	=	9·713 0052
		12·624 0402
log. (a—b)	=	1·731 3470
log. tang. φ	=	0‘892 6932 que da φ=82°—42’—15” ‘1

Conocido φ determinaremos *c* por la fórmula (M)

$$c=\frac{(a—b)\ \text{cos.}\ \frac{1}{2}\ C}{\text{cos.}\ \varphi}$$

log. (a—b)	=	1‘731 3470
log. cos. $\frac{1}{2}$ C	=	9·948 6645
		11·680 0115
log. cos. φ	=	9·103 7764
log. c	=	2·576 2351 que da c=376^{m}‘908

Una vez conocidos a, b C y c, determinaremos A y B por las fórmulas:

$$\text{sen.}\,A=\frac{a\ \text{sen.}\ C}{c} \qquad\qquad \text{sen.}\,B=\frac{b\ \text{sen.}\ C}{c}$$

Cálculo de A.		Cálculo de B.	
log.a	= 2'637 8098	log.b	= 2'580 2976
log. sen.C=	9'911 3641	log. sen.C=	9'911 3641
	12'549 1739		12'491 6617
log.c	= 2'576 2351	log.c	= 2'576 2351
log.sen. A=	9'972 9388	log.sen. B=	9'915 4266
	A= 69°—58'—58" '70		B=55°—23'—28" '89

Como comprobacion de este procedimiento, debe tenerse que

A+B+C=180°

A=69°—58'—58" '70
B=55 —23 —28 '89
C=54 —37 —32 '50

180°—00 —00 '09

la pequeña diferencia de 0" '09 procede de que las tablas de los logaritmos están calculadas solo para los arcos de 10" en 10", y en el cálculo hemos llevado la aproximacion hasta centésimas de segundo.

IV.—*Dados los tres lados de un triángulo, determinar sus tres ángulos.*

Sean: a=57'770^{m}, b=71'577^{m} y c=87'811^{m}

Debiendo usar la fórmula P (814) para resolver este caso, prepararemos el cálculo de la manera siguiente:

a= 57'770^{m}	p=108'579	p=108'579	p=108'579
b= 71'577	a= 57'770	b= 71'577	c= 87'811
c= 87'811	p—a= 50'809	p—b= 37'002	p—c= 20'768
2 p=217'158			
p=108'579			

Las fórmulas para determinar los ángulos, son:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}} \qquad\qquad \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}}$$

log.(p—b)=	1'568 2252		log (p—a)=	1'705 9406	
log.(p—c)=	1'317 3947	2'885 6199	log.(p—c)=	1'317 3947	3'023 3353
log.p	=2'035 7459		log.p	=2'035 7459	
log.(p—a)=	1'705 9406	3'741 6865	log.(p—b)=	1'568 2252	3'603 9711
Agregamos 10 para extraer raíz		(1)9'143 9334			(1)9'419 3642

Tomando la mitad:

log. tang. ½ A	=9'571 9667	log. tang. ½ B=	9'709 6821
½ A	=20°—27'—59" '97	½ B=	27°—8'—4" '24
A	=40°—55'—59" '94	B=	54 —16—8 '48

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}}$$

log. (p—a)=	1'705 9406	
log. (p—b)=	1'568 2252	3'274 1658
lag. p	=2'035 7459	
log. (p—c)=	1'317 3947	3'353 1406
Agregamos 10 para extraer raíz		(1) 9'921 0252

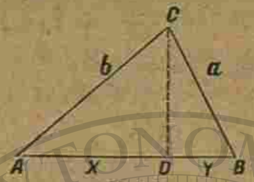
Tomando ½ log. tang. ½ C= 9'960 5126
½ C=42°—23'—55" '77
C=84 —47 —51 '54

Como comprobacion del cálculo debemos tener: A+B+C=180°
A=40°—55'—59" '94
B=54 —16 — 8 '48
C=84 —47 —51 '54

179°—59'—59" '96 La pequeña diferencia de 0" '04 procede de que los valores de los logaritmos no son exactos, sino aproximados.

Vamos á emplear el segundo procedimiento que hemos explicado (815) para el cuarto caso de la resolucion de los triángulos oblicuángulos. Conocemos los tres lados:

a=57'770^{m}; b=71'577^{m} y c=87'811^{m}



(Fig. 377)

Tomaremos la fig. 377 para facilitar nuestra explicacion. Desde el vértice C opuesto al lado mayor, que es *c*, bajaremos la perpendicular C D que caerá dentro del triángulo, y el segmento mayor *x* quedará contíguo al lado b>a, esto es, será adyacente al ángulo A.

Esto supuesto, tenemos:

Suma de los segmentos $x+y=c=\overset{m}{87}{'}811$

Conforme al cuarto principio (808) se tiene:

$$c : b+a :: b-a : x-y=\frac{(b+a)(b-a)}{c}$$

Sustituyendo

$$x-y=\frac{129{'}347\times 13{'}807}{87{'}811}$$

log. (b+a)=2'111 7564
log. (b—a)=1'140 0993

3'251 8557
log. c =1'943 5489

log. (x—y)=1'308 3068 x—y=20'338

Una vez conocida la suma y la diferencia de los segmentos:

el mayor $x=\frac{87{'}811}{2}+\frac{20{'}338}{2}=54{'}074$

el menor $y=\frac{87{'}811}{2}-\frac{20{'}338}{2}=33{'}737$

Ahora podremos resolver los triángulos rectángulos A C D y B C D para determinar los ángulos A y B por medio de las fórmulas:

$\cos.A=\frac{x}{b}$ $\cos.B=\frac{y}{a}$

log.x =1'732 9885	log.y =1'528 1065
log.b =1'854 7735	log.a =1'761 7024
log. cos. A=9'878 2150	log. cos. B=9'766 4041
A=40°—56'—1'' '98	B=54°—16'—6'' '44

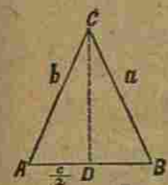
Conocidos A y B se determinará C por medio de la relacion:

C=180°—(A+B)

que da C=84°—47'—51'' '58

Los valores de los ángulos tienen pequeñas diferencias con los obtenidos por el primer método, tanto porque los logaritmos no son enteramente exactos, cuanto porque una vez han sido dados por sus tangentes, y otra por sus cosenos; dando resultados mas aproximados el primer procedimiento, porque generalmente tambien lo son los logaritmos de las tangentes.

V.—*Resolver un triángulo isósceles* A B C (fig. 378), *en el que se conoce el lado c desigual á los otros dos, y el ángulo opuesto* C.



(Fig. 378)

Sean: $c=\overset{m}{82}{'}25$ y C=48°—45'—16'' '4

Considerando el triángulo rectángulo C D A conocemos el cateto $\frac{c}{2}$ y el ángulo opuesto ½ C, y tratamos de determinar la hipotenusa *b* y el ángulo A. A este fin nos serviremos de las fórmulas (A) y (D):

$\frac{c}{2}=b$ sen. ½ C A=90°—½ C

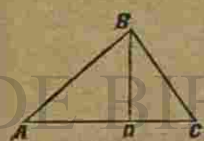
despejando $b=\frac{41{'}125}{\text{sen.}24°—22'—38''\ '2}$ A=90°—(24°—22'—38'' '2)

log. 41'125 =1'614 1059 A=65°—37'—21'' '8
log. sen. ½ C =9'615 6799

log. b =1'998 4260 lo que da $b=\overset{m}{99}{'}6382$

y como el triángulo es isósceles, B será igual á A, y a=b.

VI.—*Dados los tres lados de un triángulo* A B C (fig. 379), *determinar su altura, bajada desde el vértice* B.



(Fig. 379)

Si consideramos el triángulo rectángulo A D B de que forma parte la altura B D buscada, tendremos que

D B=c. sen.A ....(1)

por la fórmula 34

sen.A=2 sen.½ A.cos.½ A

sustituyendo por sen.$\frac{1}{2}$ A y por cos.$\frac{1}{2}$ A sus valores expresados en las fórmulas (N) y (O) se tiene:

$$\text{sen.}A=2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)\,p\,(p-a)}{b^2\,c^2}}$$

sustituyendo en la (1) y simplificando, resulta definitivamente:

$$B\,D=\frac{2}{b}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

y como $p=\frac{1}{2}\,(a+b+c)$

se tendrá la altura B D en funcion de los tres lados.

VII.—*Determinar el radio de un círculo, conociendo el lado* a *del triángulo equilátero* A B C (fig. 380) *inscrito.*

(Fig. 380)

Por el vértice A y el centro O del círculo tiremos la recta A O D que será perpendicular al lado C B, por tener los puntos A y O equidistantes de los extremos C y B. Si trazamos la recta C O E, por pasar por el centro y ser perpendicular á la cuerda A B, dividirá el arco A E B en dos partes iguales; y como los ángulos A C E y E C B tienen respectivamente por medida la mitad de A E y de E B, resulta que la recta O C divide en dos partes iguales el ángulo A C B del triángulo. Ahora bien, como este es equilátero, cada uno de sus ángulos valdrá 60°, y en consecuencia el ángulo O C D=30°.

Considerando el triángulo rectángulo C O D, del que forma parte el radio O C buscado, segun la fórmula (B) se tiene:

$$C\,D=C\,O.\ \cos.\ O\,C\,D$$

despejando
$$C\,O=\frac{C\,D}{\cos.O\,C\,D}$$

sustituyendo y teniendo presente que el cos.$30°=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, tendremos:

$$r=\frac{\frac{1}{2}\,a}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

VIII.—*Determinar el valor del arco* x *por medio de la expresion:*

$$\text{sen.}x=\frac{a}{b}$$

Sea por ejemplo a=375 y b=863.

Como log. sen.x=log.a—log.b, tendremos:

$$\begin{array}{r} \log.\ 375=2{'}574\ 0313 \\ -\log.\ 863=2{'}936\ 0108 \\ \hline 9{\cdot}638\ 0205=\log.\ \text{sen.}25°-45'-19''\ {'}6 \end{array}$$

Nos hemos servido del complemento aritmético, porque así se han calculado los logaritmos de las líneas trigonométricas; y despues de haber restado los logaritmos de los números hemos buscado en las tablas de las líneas trigonométricas, en la columna de los senos, á qué arco corresponde el resultado. Para que el problema sea posible, debe tenerse a<b, supuesto que el seno siempre es menor que el radio, igual á 1.

IX.—*Resolver un triángulo conociendo el ángulo* B, *el lado adyacente* a, *y la suma de los otros dos lados ó su diferencia.*

Representando por 2 p el perímetro a+b+c del triángulo, conforme á la fórmula (P) tenemos:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,B=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}}\qquad \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,C=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}}$$

multiplicando miembro á miembro estas ecuaciones, y dividiendo la segunda por la primera, se tiene respectivamente:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,C\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,B=\frac{p-a}{p}\qquad \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,C\ \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}\,B=\frac{p-b}{p-c}$$

de las cuales se despejaria á tang. $\frac{1}{2}$ C para hacer uso de la primera cuando se conoce la suma b+c de los otros dos lados, y de la segunda cuando se nos dé b—c. En efecto, como se conoce *a*, cuando se nos dé (b+c) fácilmente determinaremos á $p=\frac{1}{2}\,(a+b+c)$ y á p—a, que son los valores que entran junto con B en la primera expresion. Cuando ademas de *a* se nos da (b—c), tendremos:

$$a+(b-c)=a+b-c+c-c=2\,p-2\,c=2\,(p-c)$$

de la que $$p-c=\frac{a+(b-c)}{2}$$

que son los valores que junto con B entran en la segunda expresion.

Una vez conocidos a, B y C, se pueden determinar los demas elementos del triángulo conforme al procedimiento explicado para el primer caso (810)

X.—*Resolver un triángulo en el que se conoce su perímetro* $(a+b+c)$ *y los tres ángulos.*

En el núm. 814 hemos dejado demostradas las fórmulas (N):

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\ B=\sqrt{\frac{p\,(p-b)}{a\,c}}$$

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\ C=\sqrt{\frac{p\,(p-c)}{a\,b}}$$

multiplicando estas ecuaciones se tiene:

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\ B.\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C=\frac{p}{a}\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{b\,c}}$$

Por otra parte, en el mismo párrafo la fórmula (O) da:

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ A=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{b\,c}}$$

multiplicando los dos miembros de esta ecuacion por $\frac{p}{a}$ se infiere que:

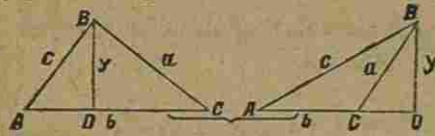
$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\ B.\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C=\frac{p}{a}\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ A$$

despejando á $$a=\frac{p\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ A}{\cos.\tfrac{1}{2}\ B.\ \ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C}$$

lo mismo que hemos determinado a pueden obtenerse b y c, ó emplear alguno de los procedimientos explicados para los cuatro casos de la resolucion de los triángulos oblicuángulos una vez conocido el lado a.

Superficie de los triángulos.

822.—Fórmula fundamental.—En geometría hemos visto (564) que la área de un triángulo tiene por valor la mitad del producto de su base por su altura; de consiguiente, si representamos por b la base A C de cualquiera de los dos triángulos de la fig. 381, por y su altura B D y por s la superficie del triángulo, en general tendremos:



(Fig. 381)

$$s=\tfrac{1}{2}\ by$$

pero considerando el triángulo rectángulo ABD conforme á la fórmula (A), tenemos:

$$y=c.\ \text{sen.}A$$

por lo que sustituyendo, resulta

$$s=\tfrac{1}{2}\ b\ c\ \text{sen.}A \ldots\ldots\ldots\ldots (Q)$$

que consideraremos como fórmula fundamental, para deducir de ella las diferentes expresiones relativas á los casos de que vamos á ocuparnos.

823.—Casos para determinar la superficie de un triángulo.—Para el cálculo de la área de un triángulo, distinguiremos los mismos casos que para su resolucion.

1° Dados dos ángulos y un lado, determinar la superficie de un triángulo.

2° Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.

3° Dados dos lados y el ángulo que forman.

4° Dados los tres lados.

824.—1er. Caso.—Supongamos conocidos los ángulos A y C y el lado b.

En la fórmula fundamental

$$s=\tfrac{1}{2}\ b\ c.\ \text{sen.}A \ldots\ldots\ldots\ldots (Q)$$

no conocemos á c, pero podemos determinar su valor por medio de la expresion:

$$c=\frac{b\ \text{sen.}\ C}{\text{sen.}\ B}$$

Ademas, como $B=180°-(A+C)$, y el seno de un ángulo es igual al de su suplemento, el valor de c se trasforma en

$$c=\frac{b.\ \text{sen.}\ C}{\text{sen.}(A+C)}$$

y sustituyendo en la ecuacion (Q), resulta finalmente:

$$s=\tfrac{1}{2}\ b^2\frac{\text{sen.}A\ \text{sen.}C}{\text{sen.}\ (A+C)}\ \dots\dots\dots\dots\ (R)$$

825.—2º CASO.—Para establecer la fórmula correspondiente, supondremos que conocemos a, b, y A.

En la fórmula fundamental

$$s=\tfrac{1}{2}\ b\ c.\ \text{sen.}A\dots\dots\dots\dots(Q)$$

tendremos que sustituir el valor de *c;* que es desconocido, en funcion de a, b y A, á cuyo fin de la expresion

$$a^2=b^2+c^2-2\ b\ c.\ \cos.A$$

que es una ecuacion mixta de 2º grado con respecto á *c;* despejaremos esta cantidad como sigue:

$$c^2-2\ b\ \cos.A.\ c=a^2-b^2$$
$$c=\ \ b\ \cos.A.\pm\sqrt{b^2\cos^2A+a^2-b^2}$$
$$c=\ \ b\ \cos.A.\pm\sqrt{a^2-b^2\ (1-\cos^2A)}$$
$$c=\ \ b\ \cos.A.\pm\sqrt{a^2-b^2\ \text{sen}^2A}$$

sustituyendo este valor en la ecuacion (Q), se tiene:

$$s=\tfrac{1}{2}\ b\ \text{sen.}A\ (b\ \cos.A\pm\sqrt{a^2-b^2\ \text{sen}^2A})\dots\dots\dots(1)$$

fórmula que resuelve el problema, pero que es conveniente trasformar á fin de hacerla adaptable al uso de los logaritmos. Con este objeto, sacaremos a^2 fuera del radical, para lo cual multiplicaremos y dividiremos el término $b^2\ \text{sen}^2A$ por a^2, y se tiene:

$$s=\tfrac{1}{2}\ b\ \text{sen.}A\ \left(b.\ \cos.A\pm a\sqrt{1-\frac{b^2\text{sen}^2A}{a^2}}\right)\ \dots\dots\dots(2)$$

De la expresion (F) $\dfrac{a}{\text{sen.}A}=\dfrac{b}{\text{sen.}B}$ se infiere que

$$b=\frac{a\ \text{sen.}B}{\text{sen.}A},\ \ y\ \text{sen.}B=\frac{b.\text{sen.}A}{a},\ \text{luego}\ \text{sen}^2B=\frac{b^2\text{sen}^2A}{a^2};$$

sustituyendo en la ecuacion (2), en la parte que está dentro del paréntesis, por *b* y por $\dfrac{b^2\text{sen}^2A}{a^2}$ sus valores, tendremos:

$$s=\tfrac{1}{2}\ b\ \text{sen.}A\left(\frac{a\ \text{sen.}B}{\text{sen.}A}\cos.A\pm a\sqrt{1-\text{sen}^2B}\right)$$

ó

$$s=\tfrac{1}{2}\ b\ \text{sen.}A\left(\frac{a\ \text{sen.}B\ \cos.A}{\text{sen.}A}\pm a\ \cos.B\right)$$

incorporando el entero al quebrado y sacando *a* como factor comun, se tiene:

$$s=\tfrac{1}{2}\ ab\ \text{sen.}A\ \left(\frac{\text{sen.}B\ \cos.A\pm\text{sen.}A\ \cos.B}{\text{sen.}A}\right)$$

reduciendo y teniendo presente, fórmulas (12) y (14), que

$$\text{sen.}B\ \cos.A\pm\text{sen.}A\ \cos.B=\text{sen.}\ (B\pm A)$$

resulta finalmente que

siendo $$B=\frac{b\ \text{sen.}A}{a},\ \ s=\tfrac{1}{2}\ ab\ \text{sen.}\ (B\pm A)\dots\dots\dots(S)$$

El doble signo que contiene la expresion de la superficie, indica, como lo hemos explicado, al ocuparnos del segundo caso de la resolucion de los triángulos, que cuando se dan dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, puede haber dos triángulos que satisfagan el problema.

Por lo demas, en la práctica, cuando se sabe que debe tomarse el signo + de sen. $(A\pm B)$, este caso se reduce al siguiente; pues como se habrá notado, es preciso comenzar por determinar B, y entónces se conocen a, b, A, B, y por consiguiente:

$$C=180°-(A+B)$$

y como el seno de un ángulo es igual al de su suplemento, la segunda de las fórmulas (S), se trasforma en

$$s=\frac{1}{2}\ a\ b\ sen.C$$

que es la fundamental.

826.—3er Caso.—*Determinar la superficie de un triángulo en el que se conocen dos lados a, b y el ángulo C que forman.*

La resolucion de este caso, se hace por medio de la fórmula fundamental (Q) que hemos demostrado en el párrafo 822

$$s=\frac{1}{2}\ a\ b\ sen.C \ldots\ldots\ldots\ldots (Q)$$

827.—4° Caso.—*Determinar la superficie de un triángulo, dados sus tres lados a, b y c.*

En la fórmula fundamental

$$s=\frac{1}{2}\ a\ b\ sen.C$$

sustituiremos el valor de $sen.C=2\ sen.\frac{1}{2}\ C.\ cos.\frac{1}{2}\ C$

y se trasforma en $\qquad s=a\ b\ sen.\frac{1}{2}\ C.\ cos.\frac{1}{2}\ C$

Ahora, reemplazando por $sen.\frac{1}{2}\ C$ y por $cos.\frac{1}{2}\ C$ sus valores en funcion de los tres lados, fórmulas (O) y (N) que son:

$$sen.\frac{1}{2}\ C=\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)}{a\ b}} \qquad cos.\frac{1}{2}\ C=\sqrt{\frac{p\ (p-c)}{a\ b}}$$

resulta:

$$s=\sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)} \ldots\ldots\ldots\ldots (T)$$

en la que, como se sabe, $\quad p=\frac{1}{2}\ (a+b+c)$

La rectificacion de los cálculos para obtener la superficie de un triángulo, generalmente se hace determinando la misma superficie valiéndose de otros datos, ó se resuelve el triángulo tomando como dato la área encontrada y dos de los elementos del triángulo. (831 IV y V)

828.—Superficie de los triángulos rectángulos.—Siendo los triángulos rectángulos un caso particular de los oblicuángulos, para determinar su superficie, bastará emplear las fórmulas anteriores, haciendo en ellas las modificaciones consiguientes á que uno de los ángulos valga 90°; pero es mas sencillo el procedimiento, fundándose en que si se considera uno de los catetos *b* como base, el otro *c* será la altura del triángulo; y por tanto, la superficie de un triángulo rectángulo estará expresada por

$$s=\frac{1}{2}\ b\ c$$

Ahora bien, como (804) $\qquad b=a\ sen.B=a\ cos.C=c\ tang.B=c\ cot.C$

Sustituyendo por *b* sus diversos valores, se tendrá:

$$s=\frac{1}{2}\ b\ c=\frac{1}{2}\ a\ c.\ sen.B=\frac{1}{2}\ a\ c.\ cos.C=\frac{1}{2}\ c^2\ tang.B=\frac{1}{2}\ c^2\ cot.C \ldots (U)$$

debiendo hacerse uso de una de estas cinco expresiones segun sean los datos que se tengan para calcular la superficie.

829.—Superficie de un triángulo equilátero.—Cuando se trata de un triángulo equilátero, se tiene al mismo tiempo:

$$a=b=c \qquad y \qquad A=B=C.$$

Ademas, el valor de cada ángulo es de 60°.

Con estas condiciones, como en los tres primeros casos, forman parte de los datos un lado y algun ángulo, los tres se reducen á uno solo que es, *dado un lado y el ángulo de un triángulo equilátero, determinar su superficie.*

La fórmula fundamental

$$s=\frac{1}{2}\ a\ b\ sen.C$$

se trasforma en $\qquad s=\frac{1}{2}\ a^2\ sen.A \ldots\ldots\ldots\ldots (V)$

será la que nos servirá para resolver los tres primeros casos.

Para cuando se nos dan los tres lados, tendremos que $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ se trasforma en

$$p=\tfrac{3}{2}\,a, \quad y \quad p-a=p-b=p-c=\frac{3a}{2}-a=\frac{a}{2}$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula (T)

$$s=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

se tiene: $$s=\sqrt{\frac{3a}{2}\times\frac{a^3}{2^3}}=\sqrt{\frac{3a^4}{16}}$$

ó $$s=\tfrac{1}{4}\,a^2\sqrt{3}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (X)$$

que será la fórmula correspondiente al caso en que se nos dé uno de los lados *a* de un triángulo equilátero.

Por lo demas, las fórmulas (V) y (X), son idénticas. En efecto, siendo el triángulo equilátero, $A=60°$ y $sen.A=\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Sustituyendo este valor en la expresion (V), resulta:

$$s=\tfrac{1}{4}\,a^2\sqrt{3}$$

como en la fórmula (X).

830.—Reasumiremos las diversas expresiones de la área de un triángulo en la siguiente

Tabla de las fórmulas de la superficie de un triángulo.

1° Dados A, C y b $\quad s=\frac{1}{2}\,b^2\frac{sen.A.\ sen.C}{sen.(A+C)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (R)$

2° ,, a, b y A $\quad sen.B=\frac{b\ sen.A}{a}$; y $s=\frac{1}{2}\,a\,b\ sen.(A\pm B)\ \ldots (S)$

3° ,, a, b y C $\quad s=\frac{1}{2}\,a\,b\ sen.C\ \ldots\ldots\ldots (Q)$

4° ,, a, b y c $\ p=\frac{1}{2}(a+b+c)\quad s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ \ldots\ldots (T)$

Para un triángulo rectángulo:

$$s=\tfrac{1}{2}\,b\,c=\tfrac{1}{2}\,a\,c\ sen.B=\tfrac{1}{2}\,a\,c\ cos.C=\tfrac{1}{2}\,c^2\ tang.B=\tfrac{1}{2}\,c^2\ cot.C\ \ldots (U)$$

Para un triángulo equilátero:

si se da *a* $\quad s=\frac{1}{4}\,a^2\sqrt{3}=\frac{1}{2}\,a^2\ sen.60°\ \ldots\ldots (X)$

831.—Problemas.—I.—*Determinar la superficie de un triángulo en el que se conocen dos ángulos y un lado, cuyos valores son:*

A= 9°— 7'—13" '6
C=87°—14 —19 '3 $\qquad b=198'57^{m}$

A + C=96°—21 —32 '9

La fórmula correspondiente á este caso, es: (R)

$$s=\tfrac{1}{2}\,b^2\frac{sen.A\ sen.C}{sen.(A+C)}$$

Por ser A + C =96°—21'—32" '9, sen.(A + C)=cos. 6°—21'—32" '9

log. b	=2'297 9136	
log. b	=2'297 9136	
log. sen.A	=9'200 0577	
log. sen.C	=9'999 4954	=23'795 3803
log.sen.(A + C)	=9'997 3196	
log.2	=0'301 0300	—10'298 3496
log. s	=	(1)3'497 0307 que da $s=3140'73^{m.\,cd.}$

II.—*Conocidos dos lados de un triángulo y el ángulo que forman, determinar su superficie.*

Sean: a=984'78, b=1049'54 y C=49°—18'—15" '7

La fórmula correspondiente á este caso, es:

$$s=\tfrac{1}{2}\,a\,b\ sen.C\ \ldots\ldots\ldots\ldots (Q)$$

log. a	=2'993 3392
log. b	=3'020 9990
log. sen.C	=9'879 7746
	(1)5'804 1128
Ménos log.2	=0'301 0300
log. s	=5'593 0828 lo que da $s=391\ 816'58^{m.\,cd.}$

III.—*Dados los tres lados de un triángulo, determinar su superficie.*

Sean: $a = \overset{m}{57{\cdot}394}$, $b = 49{\cdot}875$ y $c = 63{\cdot}943$

La fórmula correspondiente, es: $s = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} \ldots (T)$

$$
\begin{array}{llll}
a = \overset{m}{57{\cdot}394} & & & \\
b = 49{\cdot}875 & p = 85{\cdot}606 & p = 85{\cdot}606 & p = 85{\cdot}606 \\
c = 63{\cdot}943 & a = 57{\cdot}394 & b = 49{\cdot}875 & c = 63{\cdot}943 \\
\hline
2\,p = 171{\cdot}212 & p-a = 28{\cdot}212 & p-b = 35{\cdot}731 & p-c = 21{\cdot}663 \\
p = 85{\cdot}606 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\log.\ p & = & 1{\cdot}932\ 5042 \\
\log.\ (p-a) & = & 1{\cdot}450\ 4339 \\
\log.\ (p-b) & = & 1{\cdot}553\ 0452 \\
\log.\ (p-c) & = & 1{\cdot}335\ 7186 \\
\hline
\text{Tomando } \tfrac{1}{2} \text{ de} & & 6{\cdot}271\ 7019 \\
\log.\ s & = & 3{\cdot}135\ 8509 \text{ que da } s = \overset{m.\ cd.}{1367{\cdot}26}
\end{array}
$$

IV.—*Resolver un triángulo conociendo su superficie* s, *un lado* a *y un ángulo* C.

De la fórmula $s = \frac{1}{2}\,a\,b\,\text{sen.}\,C$

despejaremos á *b* que es desconocido

$$b = \frac{2\,s}{a\ \text{sen.}\ C}$$

y una vez conocidos a, b y C, el problema se trasforma en resolver un triángulo dados dos lados y el ángulo que forman, que lo hemos explicado ya (812) al tratar del 3er. caso.

V.—*Resolver un triángulo conociendo su superficie* s *y dos de sus ángulos* A *y* B.

El 3er. ángulo se calculará fácilmente por medio de la expresion:

$$C = 180° - (A + B)$$

La fórmula (R) da:

$$s = \tfrac{1}{2}\,b^2\,\frac{\text{sen.}\,A\ \text{sen.}\,C}{\text{sen.}\ (A + C)}$$

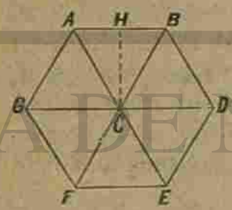
despejando á $\quad b = \sqrt{\dfrac{2\ s.\ \text{sen.}\ (A + C)}{\text{sen.}\,A\ \text{sen.}\,C}}$

los otros dos lados se calcularán por fórmulas análogas

$$a = \sqrt{\frac{2\ s.\ \text{sen.}\ (B + C)}{\text{sen.}\,B\ \text{sen.}\,C}} \qquad y \qquad c = \sqrt{\frac{2\ s.\ \text{sen.}\ (A + B)}{\text{sen.}\,A\ \text{sen.}\,B}}$$

832.—Poligonometría.—Hemos dejado indicado (723) que pudiendo descomponerse un polígono cualquiera en triángulos, los problemas de poligonometría se reducen á los de trigonometría. Basta, en efecto, concebir que desde el vértice de un polígono se tiran diagonales á todos los otros, para comprender que los elementos del polígono, lados, ángulos, diagonales y superficie, pueden sucesivamente irse determinando cuando se conocen los datos necesarios para determinar los de los triángulos de que está compuesto el polígono. En la práctica generalmente lo que se hace es, medir un lado de un triángulo y todos los ángulos de los triángulos que forman el polígono, y en seguida se calculan los elementos desconocidos por medio de las fórmulas que hemos establecido al tratar de los casos de los triángulos oblicuángulos. Aun cuando por este procedimiento general pueden resolverse todas las cuestiones de poligonometría, terminaremos el estudio de la trigonometría considerando algunos casos particulares de los polígonos.

833.—Polígonos regulares.—Cuando el polígono que se considera es regular, es preciso conocer la longitud *l* de uno de sus lados y el número de ángulos de que consta. En geometría hemos explicado (465) cómo puede determinarse el valor de cada uno de los ángulos del polígono regular, por lo cual no nos ocuparemos ahora sino del cálculo de su superficie.



(Fig. 382)

La área del polígono regular A B D E.... (fig. 382), cuyo número de lados supondremos que sea *n*, será igual á tantas veces el triángulo A C B como lados tiene. Esto es,

$$s = n.\ A\,C\,B$$

Llamando *l* el lado A B del polígono, y C el ángulo A C B, en el centro del polígono tendremos:

$$\text{sup. triángulo } A\,C\,B = \tfrac{1}{2}\ l \times H\,C$$

En el triángulo rectángulo A C H

$$C\,H = A\,H \times \text{tang. } C\,A\,H = \tfrac{1}{2}\,l.\ \text{cot. } \tfrac{1}{2}\,C$$

luego, triángulo $A\,C\,B = \frac{1}{4}\,l^2 \text{ cot. } \frac{1}{2}\,C$

$$s = \tfrac{1}{4}\,n\,l^2 \text{ cot. } \tfrac{1}{2}\,C$$

pero como el ángulo C en el centro de un polígono regular es igual á $\frac{360^\circ}{n}$, se tiene finalmente:

$$s = \tfrac{1}{4}\,n\,l^2 \text{ cot. } \left[\frac{180^\circ}{n}\right]$$

834.—CUADRILÁTERO.—Consideraremos varios casos para determinar la superficie de un cuadrilátero.

(Fig. 383)

1° *Dados los cuatro lados a, b, c y d y los ángulos* M *y* N (fig. 383), *que forman respectivamente los dos primeros y los dos últimos.*

Si tiramos la diagonal P O, la superficie del cuadrilátero será igual á la suma de las áreas de los triángulos P O M y P O N, pero (822—Q)

$$\text{sup. } P\,O\,M = \tfrac{1}{2}\,a\,b \text{ sen.} M$$

y

$$\text{sup. } P\,O\,N = \tfrac{1}{2}\,c\,d \text{ sen.} N$$

luego llamando *s* la superficie del cuadrilátero

$$s = \tfrac{1}{2}\,a\,b \text{ sen.} M + \tfrac{1}{2}\,c.d \text{ sen.} N$$

2° *Dadas las dos diagonales* (fig. 383) P O=D, M N=D' *y el ángulo que forman* P A N=A, *determinar la superficie del cuadrilátero.*

La superficie del cuadrilátero es igual á la suma de las superficies de los cuatro triángulos P A N, N A O, O A M y M A P. Llamando *x* é *y* los segmentos P A y A O de la diagonal P O, y *z* y *u* los de la M N, conforme á la fórmula (Q), representando por *s* la superficie del cuadrilátero, y recordando que los ángulos opuestos al vértice son iguales, y que el seno de un ángulo P A N es igual al de su suplemento N A O, se tiene:

$$s = \tfrac{1}{2}\,x.\ u.\ \text{sen.} A + \tfrac{1}{2}\,u\ y.\ \text{sen.} A + \tfrac{1}{2}\,y\ z \text{ sen.} A + \tfrac{1}{2}\,z\ x \text{ sen.} A$$

sacando como factor comun á $\frac{1}{2}$ sen. A, así como á *x* y á *y*

$$s = \tfrac{1}{2} \text{ sen.} A\ [x\,(u+z) + y\,(u+z)]$$

$$s = \tfrac{1}{2} \text{ sen.} A\ (u+z)\ (x+y)$$

y sustituyendo por (u+z) y por (x+y), D' y D, resulta:

$$s = \tfrac{1}{2}\,D.\ D' \text{ sen.} A$$

Cuando el cuadrilátero sea rombo, las diagonales se cortarán en ángulo recto y será sen. A=1, por lo que tendremos:

$$\text{sup. del rombo} = \tfrac{1}{2}\,D.\ D'.$$

Si se trata de un cuadrado, ademas de tenerse sen. A=1 se tendrá D=D', y

$$\text{sup. del cuadrado} = \tfrac{1}{2}\,D^2.$$

Si el cuadrilátero fuera rectángulo D=D' y

$$\text{sup. del rectángulo} = \tfrac{1}{2}\,D^2 \text{ sen.} A$$

835.—TRAPECIO.—*Vamos á determinar la superficie de un trapecio conociendo la magnitud de sus cuatro lados.*

En la fig. 385 supondremos que las bases paralelas son los lados *a* y *b*. Tirando la recta M N paralela al lado *c*, nos resultará un triángulo cuya superficie llamaremos *s'* y que tiene la misma altura *h* que el trapecio. Representaremos el perímetro del trapecio por

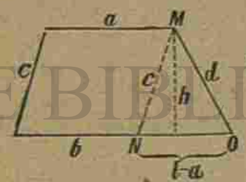
$$2\,p = a+b+c+d$$

y su superficie por S. El perímetro del triángulo M N O lo haremos igual á 2 p'. Esto supuesto:

sup. del trapecio $\qquad S = \frac{a+b}{2} \times h$

sup. del triángulo $\qquad s' = \frac{b-a}{2} \times h$

despejando á $\qquad h = \frac{2\,s'}{b-a}$



(Fig. 385)

sustituyendo en la primera ecuacion, se tiene:

$$S = \frac{a+b}{b-a}\,s' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

La área del triángulo M N O en funcion de sus tres lados, fórmula (T), es:

$$s' = \sqrt{p'\,(p'-b+a)\,(p'-c)\,(p'-d)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Por otra parte

$$2\,p = a+b+c+d$$
$$2\,p' = b-a+c+d$$

restando la última ecuacion de la que antecede

$$2\,p-2\,p' = 2\,a$$

de donde

$$p' = p-a$$

Sustituyendo este valor en la ecuacion (2), se tiene:

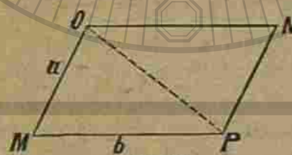
$$s' = \sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-a-c)\,(p-a-d)}$$

Reemplazando este valor en la ecuacion (1), resulta finalmente:

$$S = \frac{a+b}{b-a}\sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-a-c)\,(p-a-d)} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

siendo $p = \frac{1}{2}\,(a+b+c+d)$

836.—PARALELÓGRAMO.—*Dados dos lados* a *y* b *de un paralelógramo y el ángulo* M *que forman, determinar su superficie.*



(Fig. 386)

Si tiramos la diagonal O P, (fig. 386) quedará dividido el paralelógramo en dos triángulos iguales, en los que, por ser la figura paralelógramo, el ángulo M=N así como los lados opuestos. En consecuencia la superficie del paralelógramo será igual á la suma de la de los triángulos que lo forman.

$$s = \frac{1}{2}\,a\,b\,\text{sen.}\,M + \frac{1}{2}\,a\,b\,\text{sen.}\,M$$

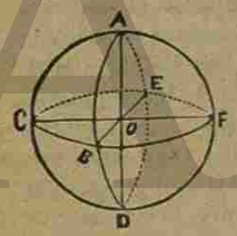
ó

$$s = a\,b\,\text{sen.}\,M$$

que es la expresion que buscábamos.

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA.

Definiciones y propiedades de los triángulos esféricos.



(Fig. 387)

837.—CÍRCULOS MÁXIMOS.—Un plano, sea cual fuere su direccion, corta siempre la esfera segun un círculo que generalmente es de magnitud variable y se le llama *círculo menor;* pero cuando el plano pasa por el centro de la esfera, hemos dicho (681) que su interseccion con la superficie de ella determina un círculo, con A B D E (fig. 387) que se llama *círculo máximo,* á causa de que no hay otro mayor entre todos los que pueden trazarse en la superficie de la esfera.

Todos los círculos *máximos* A B D E, A C D F, C B F E, etc., tienen las propiedades: de ser iguales, porque tienen el mismo radio; su centro es el de la esfera y la dividen en dos partes iguales.

Se llama *polo de un círculo,* sea ó no máximo, *trazado sobre la esfera, el punto de la superficie de la misma esfera equidistante de todos los puntos de su circunferencia.* Cada círculo tiene dos polos, que son las extremidades del diámetro de la esfera perpendicular al plano del círculo. Los polos del círculo C B F E son los puntos A y D.

838.—TRIANGULO ESFÉRICO.—Si se corta una esfera por tres planos que concurren en el centro resultará un triedro O A B C (fig. 388) cu-

La área del triángulo M N O en funcion de sus tres lados, fórmula (T), es:

$$s' = \sqrt{p'\,(p'-b+a)\,(p'-c)\,(p'-d)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Por otra parte
$$2\,p = a+b+c+d$$
$$2\,p' = b-a+c+d$$

restando la última ecuacion de la que antecede

$$2\,p - 2\,p' = 2\,a$$

de donde
$$p' = p - a$$

Sustituyendo este valor en la ecuacion (2), se tiene:

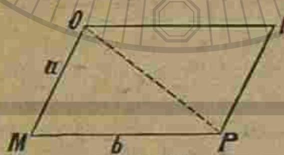
$$s' = \sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-a-c)\,(p-a-d)}$$

Reemplazando este valor en la ecuacion (1), resulta finalmente:

$$S = \frac{a+b}{b-a}\sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-a-c)\,(p-a-d)} \ldots\ldots (3)$$

siendo
$$p = \tfrac{1}{2}\,(a+b+c+d)$$

836.—Paralelógramo.—*Dados dos lados* a *y* b *de un paralelógramo y el ángulo* M *que forman, determinar su superficie.*



(Fig. 386)

Si tiramos la diagonal O P, (fig. 386) quedará dividido el paralelógramo en dos triángulos iguales, en los que, por ser la figura paralelógramo, el ángulo M=N así como los lados opuestos. En consecuencia la superficie del paralelógramo será igual á la suma de la de los triángulos que lo forman.

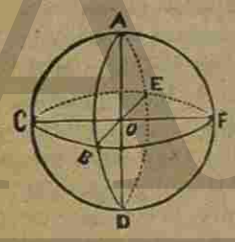
$$s = \tfrac{1}{2}\,a\,b\,\text{sen.}\,M + \tfrac{1}{2}\,a\,b\,\text{sen.}\,M$$

ó
$$s = a\,b\,\text{sen.}\,M$$

que es la expresion que buscábamos.

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA.

Definiciones y propiedades de los triángulos esféricos.



(Fig. 387)

837.—Círculos máximos.—Un plano, sea cual fuere su direccion, corta siempre la esfera segun un círculo que generalmente es de magnitud variable y se le llama *círculo menor;* pero cuando el plano pasa por el centro de la esfera, hemos dicho (681) que su interseccion con la superficie de ella determina un círculo, con A B D E (fig. 387) que se llama *círculo máximo,* á causa de que no hay otro mayor entre todos los que pueden trazarse en la superficie de la esfera.

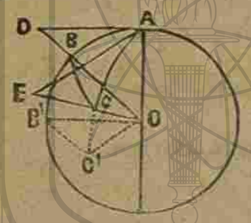
Todos los círculos *máximos* A B D E, A C D F, C B F E, etc., tienen las propiedades: de ser iguales, porque tienen el mismo radio; su centro es el de la esfera y la dividen en dos partes iguales.

Se llama *polo de un círculo,* sea ó no máximo, *trazado sobre la esfera, el punto de la superficie de la misma esfera equidistante de todos los puntos de su circunferencia.* Cada círculo tiene dos polos, que son las extremidades del diámetro de la esfera perpendicular al plano del círculo. Los polos del círculo C B F E son los puntos A y D.

838.—Triangulo esférico.—Si se corta una esfera por tres planos que concurren en el centro resultará un triedro O A B C (fig. 388) cuyas aristas son radios de la esfera, sus caras A O B, A O C y B O C, son sectores de círculos máximos, y sus ángulos diedros, formados por las caras, tienen por aristas los radios. Por último ese triedro determina sobre la superficie de la esfera una figura A B C, limitada por tres arcos de círculos máximos, que es un triángulo esférico.

Los ángulos planos del triedro formados por dos radios tienen por medida los arcos de los respectivos círculos máximos, que pasan por las extremidades de las aristas, y que son los lados del triángulo esférico; esto es, la medida del ángulo plano A O C es el arco A C, la del ángulo A O B es el arco A B, y la del ángulo B O C es el arco B C.

En cuanto á los ángulos diedros formados por la interseccion de dos planos en las aristas A O, B O y C O que vienen á determinar los ángulos del triángulo esférico en A, en B y en C, se ha visto (619) que un diedro tiene por medida el ángulo plano correspondiente formado por dos perpendiculares levantadas á la interseccion comun en el mismo punto, contenida cada una de las perpendiculares en uno de los planos del diedro. Por tanto, la medida del diedro segun A O será el ángulo D A E formado por las tangentes levantadas en el punto A respectivamente á los arcos A B y A C. Podemos igualmente tomar por medida del diedro A O, ó lo que es lo mismo del ángulo A del triángulo esférico, el arco B' C' que resulta de prolongar los lados A B y A C, del ángulo A, hasta que tengan 90° y en reunir con un arco las extremidades B' y C'. En efecto, por ser de 90° los arcos A B' y A C' las rectas B' O y C' O serán perpendiculares á la arista A O del diedro en el punto O, y por ser B' C' la medida del ángulo B' O C' correspondiente al diedro, lo será de éste.



(Fig. 388)

La superficie del triángulo A B C no es plana, sino que es una porcion de la de la esfera.

Definicion.—*Se llama triángulo esférico la figura limitada por tres arcos de círculos máximos en la superficie de una esfera.*

Los elementos de un triángulo son los ángulos, los lados y la superficie.

No consideraremos sino los triángulos esféricos cuyos lados sean menores que 180°, y para simplificar supondremos el radio de la esfera igual á la unidad.

Cada ángulo del triángulo esférico tiene por medida la del ángulo diedro que forman los planos que contienen los arcos del ángulo.

Los lados del triángulo son arcos de círculo máximo que generalmente se estiman en grados y fracciones de grado; pero pueden medirse tambien, en partes del radio, y calcularse su longitud, esto es, rectificarlos, conociendo su valor en grados y la magnitud del radio de la esfera que se considera.

Si representamos por r el radio de la esfera expresado en metros, por a el lado de triángulo esférico estimado en grados y fracciones de grado, y por l la longitud del arco a en metros, la siguiente proporcion nos dará á conocer el valor de l

$$360^\circ : a^\circ :: 2\,\pi\,r : l$$

ó bien

$$l = \frac{\pi\, r\, a^\circ}{180}$$

Siempre designaremos los ángulos de los triángulos esféricos por las letras mayúsculas A, B y C, y los lados respectivamente opuestos á los ángulos por las minúsculas a, b y c.

839.—Definicion de trigonometría esférica.—*La trigonometría esférica tiene por objeto: 1° conocer las relaciones que existen entre los elementos de un triángulo esférico, y 2° dados tres de estos elementos, determinar por medio del cálculo los otros tres, ó la superficie del triángulo.*

A menudo lo que se estudia y llega á conocerse no es la relacion entre los elementos mismos de un triángulo esférico, sino la que existe entre las líneas trigonométricas de esos elementos.

840.—Propiedades de los triángulos esféricos.—Como si reunimos los tres vértices A, B y C (fig. 388) de un triángulo esférico con el centro O de la esfera resulta un triedro, es claro que las propiedades y casos de igualdad de los triedros, que hemos demostrado en geometría, serán aplicables á los triángulos esféricos.

1°—*Cada uno de los ángulos formado por dos aristas es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.* (629) Estas propiedades aplicadas al triángulo esférico quedarán cifradas en las siguientes desigualdades:

$$a < b + c$$
$$a > b - c$$

2°—*La suma de los tres ángulos planos es menor que cuatro rectos.* (630)

$$a + b + c < 360°$$

3°—*Cada ángulo plano es menor que* 180°.

En efecto, restando miembro á miembro las desigualdades

$$a+b+c<360°$$
$$b+c>a$$

obtendremos $\quad a<360°-a$

trasladando $\quad 2\ a<360°$

y por último $\quad a<\frac{360°}{2}$, esto es, $a<180°$

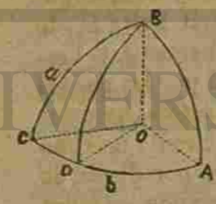
4°—*La suma de los ángulos diedros es mayor que 2 y menor que 6 ángulos rectos.* (633)

$$A+B+C>2 \text{ rectos} \qquad y \quad A+B+C<6 \text{ rectos.}$$

5°—*El lado mayor está opuesto al mayor ángulo y recíprocamente.*

Decimos que si $B>A$ se tendrá $b>a$. En efecto, si en el vértice B (fig. 389) construimos el ángulo $A\ B\ D=A$; á causa de ser el ángulo $B>A$, el arco B D caerá dentro del ángulo A B C, y en el triángulo A B D por ser $A=A\ B\ D$, se tendrá:

$$B\ D = A\ D\ *$$



(Fig. 389)

Por otra parte $\quad B\ D+D\ C>C\ B$

y sustituyendo $\quad A\ D+D\ C>B\ C$

ó bien $\quad b>a$

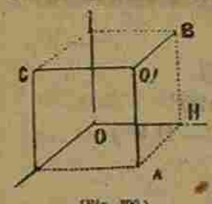
que es lo que se quería demostrar.

Recíprocamente si $b>a$, se tendrá $B>A$. En efecto, B no puede ser igual á A, porque entonces inferiríamos que lados desiguales estarían opuestos á ángulos iguales; tam-

* Para demostrarlo, bastaría reunir la mitad del arco A B con D y resultarían dos triángulos iguales, por tener dos lados y un ángulo respectivamente iguales.

poco puede ser $B<A$, porque resultaría el absurdo de que al menor ángulo estaría opuesto el mayor lado.

841.—Triángulo suplementario.—Hemos visto (633) que si desde un punto O' (fig. 390) tomado en el interior de un triedro O bajamos perpendiculares O' A, O' B y O' C á sus tres caras y hacemos pasar planos por estas perpendiculares, resulta un segundo triedro O', cuyos ángulos planos son respectivamente suplementos de los ángulos diedros del triedro O, y cuyos diedros son suplementos de los ángulos planos del triedro O.

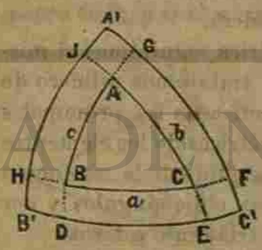


(Fig. 390.)

Aplicando esta construccion á un triángulo esférico, se comprende que siempre es posible obtener *otro* cuyos lados sean suplementos de los ángulos del primero, y cuyos ángulos sean suplementos de los lados del primero. Esto es, representando por A, B y C los ángulos y por *a*, *b* y *c* los lados del primer triángulo, y por A', B' y C' los ángulos y por *a'*, *b'* y *c'* los lados del segundo, tendrémos:

$$a'=180°-A \qquad A'=180°-a$$
$$b'=180°-B \qquad B'=180°-b$$
$$c'=180°-C \qquad C'=180°-c$$

A este segundo triángulo A' B' C' suplementario del primero A B C se le llama tambien *triángulo polar;* porque trazando sobre la esfera un triángulo de cuyos lados sean sus *polos* respectivos los ángulos del primer triángulo, resultan dos triángulos suplementarios.



(Fig. 391.)

En efecto, sea A B C (fig. 391) un triángulo esférico. Prolonguemos A B hasta D, de modo que $A\ D=90°$; prolonguemos A C hasta E para tener $A\ E=90°$, y si por los puntos D y E y por el centro de la esfera hacemos pasar un plano, tendrémos el círculo máximo B' C' del cual será A *su polo,* por distar de todos sus puntos 90°. Prolongando los lados B A y B C hasta G y F para que se tengan $B\ G=B\ F=90°$, y haciendo pasar un plano por estos puntos y por el centro de la esfera, determinarémos el arco A' C' de círculo máximo, cuyo polo es B. La misma construccion nos conduce á determinar el arco A' B' cuyo polo es C. Siendo por construccion los vértices A, B y C, polos de los lados del triángulo A' B' C', vamos á demostrar que recíprocamente los vértices de este son polos de los lados del primer triángulo A B C. Estando todos los puntos del arco A′ C′ á 90° de B, este punto distará 90° de C′, y estando todos los puntos del arco B′ C′ á 90° de A, este punto distará 90° de C′ y por tanto C′ será el polo del arco A B. De igual manera se demuestra que A′ es polo de B C y que B′ lo es de A C.

Ahora bien, siendo A D=90° y A E=90°, el arco D E será la medida del ángulo A (838)

Esto es, $A = D\,E$

Además tenemos $B'\,E = 90°$ y $C'\,D = 90°$

$$D\,E = B'\,E - B'\,D = B'\,E - (B'\,C' - D\,C')$$

sustituyendo $A = 90° - (a' - 90°) = 180° - a'$

luego $a' = 180 - A.$

Así se demostraría que $b' = 180° - B$ y que $c' = 180° - C$.

Siendo A′ H=90° y A′ F=90°, el arco H F será medida del ángulo A′ (838)

Esto es $A' = H\,F$

$$H\,F = B\,F + H\,B = B\,F + (H\,C - B\,C)$$

sustituyendo $A' = 90° + 90° - a$

luego $A' = 180° - a$

y de la misma manera se demostraría que

$$B' = 180° - b \text{ y que } C' = 180° - c.$$

Debe notarse que de los dos polos que tiene cada uno de los arcos se toma el que queda en el hemisferio que se considera.

842.—En el estudio de la trigonometría esférica seguirémos el mismo método que en la trigonometría rectilínea: trataremos primero de las fórmulas fundamentales en las que están cifradas las principales relaciones que existen entre las líneas trigonométricas de los elementos de los triángulos esféricos, nos ocuparémos en seguida de la resolucion de los triángulos rectángulos, luego de la de los oblicuángulos y por último de la determinacion de la superficie del triángulo esférico.

Debemos hacer notar que puede resolverse un triángulo esférico conociendo sus tres ángulos, sin que sea necesario, como en los triángulos rectilíneos, conocer un lado; lo cual tiene por causa que la suma de los ángulos de un triángulo plano constantemente es igual á 180°, miéntras que en los triángulos esféricos la suma de sus ángulos puede variar entre 2 y 6 ángulos rectos.

Relacion entre los ángulos y los lados de un triángulo esférico.

843.—De las quince combinaciones que pueden formarse con 6 cantidades combinadas de 4 en 4 segun la fórmula (356)

$$C^{m}_{n} = \frac{m(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\,2.\,3.\ldots n}$$

$$C^{6}_{4} = \frac{6\times5\times4\times3}{1\times2\times3\times4} = 15$$

cuatro son las relaciones diferentes que pueden existir entre los lados y los ángulos de un triángulo esférico y son:

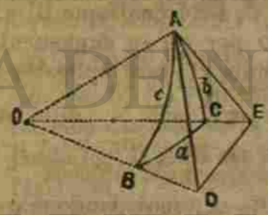
1ª Entre los tres lados y un ángulo.

2ª Entre dos lados y los ángulos opuestos.

3ª Entre dos lados, el ángulo comprendido y uno de los ángulos opuestos.

4ª Entre un lado y los tres ángulos.

844.—Relacion entre los tres lados y un ángulo.—Sea A B C (fig. 392) un triángulo trazado sobre una esfera cuyo centro es O, y cuyo radio supondremos igual á la unidad. Pudiendo ser el lado *a de cualquiera magnitud*, supondrémos menores que 90° los lados *b* y *c*. Trazando los rádios O A, O B, y O C, las tangentes A D y A E; prolongando O B, y O C y tirando la recta D E, tendrémos:



(Fig. 392.)

$A\,D = \text{tang. } c$ y $A\,E = \text{tang. } b$

$O\,D = \text{sec. } c$ y $O\,E = \text{sec. } b$

ángulo $E\,A\,D = A$ y ángulo $E\,O\,D = a$

Los triángulos E O D y E A D dan (808 2°)

$$D\,E^2 = E\,O^2 + D\,O^2 - 2\,E\,O \times D\,O \cos E\,O\,D$$

$$D\,E^2 = E\,A^2 + D\,A^2 - 2\,E\,A \times D\,A \cos E\,A\,D$$

sustituyendo:

$$D\,E^2 = \text{sec.}^2\, b + \text{sec.}^2\, c - 2 \text{ sec. } b.\ \text{sec. } c \cos.\ a$$

$$D\,E^2 = \text{tang}^2\, b + \text{tang}^2\, c - 2 \text{ tang } b.\ \text{tang } c.\ \cos A$$

restando la segunda ecuacion de la primera para eliminar á $D\,E^2$ recordando que $\sec.^2 a = 1 + \tan^2 a$, y sustituyendo por $\sec. b = \frac{1}{\cos b}$

por $\sec c = \frac{1}{\cos c}$, por $\tan b = \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}$ y por $\tan c = \frac{\operatorname{sen} c}{\cos c}$, resulta:

$$o = 1 + 1 - \frac{2 \cos a}{\cos b \cos c} + \frac{2 \operatorname{sen} b. \operatorname{sen} c. \cos A}{\cos b. \cos c}$$

reduciendo, dividiendo por 2 y quitando los denominadores, resulta:

$$o = \cos b \cos c - \cos. a + \operatorname{sen} b. \operatorname{sen} c. \cos A;$$
$$\cos. a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b. \operatorname{sen} c. \cos A \ldots (1)$$

fórmula fundamental de la trigonometría esférica en la que están cifradas las relaciones que existen entre los tres lados y un ángulo de un triángulo esférico.

845.—Generalidad de la fórmula precedente.—Para establecer la fórmula (1) hemos considerado que pueda tener a cualquier valor, y hemos supuesto que tanto b como c eran menores que 90°, vamos á demostrar que dicha fórmula subsiste igualmente cuando uno de estos lados, b ó c ó cuando ambos sean mayores ó iguales á 90°.

(Fig. 393.)

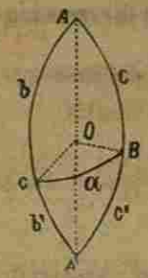
1° Supongamos como ántes $a = > ó <$ que 90°, y hagamos ahora $c > 90°$ y $b < 90°$. Si prolongamos (fig. 393) los arcos B A y B C de círculos máximos hasta que se encuentren en B', concibiendo los dos planos que contienen dichos arcos y que pasan por el mismo diámetro B B', se ve que B A B' = B C B' = 180° y que el ángulo B = B'. Considerando el triángulo B' A C, tendrémos que B' = B $b < 90°$ por el supuesto, y $c' < 90$ por ser su suplemento $c > 90$. En consecuencia la fórmula (1) será aplicable al triángulo B' A C y tendrémos:

$$\cos. a' = \cos b \cos c' + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c' \cos B' A C$$

siendo $a' = 180° - a$; $c' = 180 - c$; $B' A C = 180° - A$; recordando que el coseno de un ángulo es igual al de su suplemento con signo contrario y sustituyendo, resulta:

$$\cos. a = \cos b. \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

que es la fórmula (1) aplicable al triángulo B A C en el que $c > 90°$



(Fig. 394)

2° Sean ahora (fig. 394) $b > 90°$ y $c > 90°$ pudiendo tener a cualquier valor. Prolonguemos A B y A C hasta que se encuentren en A'. En el triángulo A' B C, en el que tanto b' como c' son menores que un cuadrante, tendremos:

$$\cos. a = \cos. b' \cos. c' + \operatorname{sen}. b' \operatorname{sen}. c' \cos. A'$$

$b' = 180° - b$; $c' = 180° - c$; $A' = A$; recordando que el coseno de un ángulo es igual al de su suplemento con signo contrario, y que el seno de un ángulo es igual al de su suplemento, sustituyendo resulta:

$$\cos. a = \cos. b \cos. c + \operatorname{sen}. b \operatorname{sen}. c \cos. A$$

que es la fórmula (1) aplicable al triángulo B A C en el que los lados b y c son mayores que 90°.

Como si en la (fig. 392) suponemos que uno de los lados b ó c ó que ambos sean iguales á 90° desarrollando el cálculo del párrafo 844 obtendrémos la fórmula (1), resulta que esta es general y aplicable á un triángulo esférico cualquiera que sea la magnitud de sus lados.

De la fórmula que se acaba de establecer se obtienen por simple cambio de letras otras dos fórmulas semejantes; resultando así las tres ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \cos. a &= \cos. b \cos. c + \operatorname{sen}. b \operatorname{sen}. c \cos. A \\ \cos. b &= \cos. a \cos. c + \operatorname{sen}. a \operatorname{sen}. c \cos. B \\ \cos. c &= \cos. a \cos. b + \operatorname{sen}. a \operatorname{sen}. b \cos. C \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (1)$$

que se deben considerar como fundamentales de la trigonometría esférica. Entre los elementos de un triángulo esférico no puede existir una relacion distinta de la precedente, porque si esto fuera posible, despejando los ángulos A, B, y C de esa relacion diversa, así como de las fórmulas (1) se obtendrian para los ángulos A, B, y C dos valores diferentes, lo cual es un absurdo. De las fórmulas (1) se pueden deducir otras muchas que es indispensable conocer, y que vamos á obtener sucesivamente.

846.—Relacion entre dos lados y los ángulos opuestos.—Para obtener una relacion, por ejemplo entre a, b, A y B debemos eliminar á C y *c* en las ecuaciones (1) lo cual puede lograrse de diversas maneras, pero vamos á indicar el siguiente procedimiento.

De la fórmula (1)

$$\cos. a = \cos. b \cos. c + \text{sen. } b \text{ sen. } c \cos A$$

despejando á

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}$$

sustituyendo este valor en la expresion

$$\text{sen.}^2 A = 1 - \cos.^2 A$$

se tiene $$\text{sen.}^2 A = 1 - \left(\frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}\right)^2$$

sustituyendo la diferencia de los cuadrados por el producto de la suma por la diferencia de las cantidades, resulta:

$$\text{sen.}^2 A = \left(1 + \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}\right)\left(1 - \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}\right)$$

incorporando los enteros á los quebrados y multiplicando los denominadores, esta expresion se trasforma en las siguientes:

$$\text{sen.}^2 A =$$

$$\frac{(\text{sen. } b \text{ sen. } c + \cos. a - \cos. b \cos. c)(\text{sen. } b \text{ sen } c - \cos. a + \cos. b \cos c)}{\text{sen.}^2 b \text{ sen.}^2 c};$$

$$\text{sen.}^2 A = \frac{[\cos. a - \cos(b+c)]\,[\cos.(b-c) - \cos. a]}{\text{sen.}^2 b \text{ sen.}^2 c}$$

sustituyendo la diferencia de los cosenos por sus valores (776 f. 62)

$$\text{sen.}^2 A =$$

$$\frac{4 \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ sen. } \frac{1}{2}(b+c-a) \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+b-c) \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen.}^2 b \text{ sen.}^2 c} \quad ..(c)$$

haciendo el mismo cálculo con la fórmula

$$\cos. b = \cos. a \cos. c + \text{sen. } a \text{ sen. } c \cos. B$$

se encuentra:

$$\text{sen.}^2 B =$$

$$\frac{4 \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+c-b) \text{ sen } \frac{1}{2}(a+b-c) \text{ sen. } \frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sen.}^2 a \text{ sen.}^2 c} \quad ..(d)$$

dividiendo la ecuacion (c) por la (d) se encuentra:

$$\frac{\text{sen.}^2 A}{\text{sen.}^2 B} = \frac{\text{sen.}^2 a}{\text{sen.}^2 b}$$

extrayendo raíz y trasladando resulta finalmente:

$$\frac{\text{sen. } a}{\text{sen. } A} = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B}$$

847.—El mismo cálculo aplicado á la fórmula

$$\cos. c = \cos. a \cos. b + \text{sen. } a \text{ sen. } b \cos. C$$

conduciría al resultado

$$\frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B} = \frac{\text{sen. } c}{\text{sen. } C}$$

y por tanto se tiene finalmente:

$$\frac{\text{sen. } a}{\text{sen. } A} = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B} = \frac{\text{sen. } c}{\text{sen. } C} \quad .....(2)$$

La fórmula (2) expresa que *los senos de los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.*

848.—La fórmula (2) puede obtenerse directamente de la figura como sigue: Bajemos del punto C (fig. 395) una perpendicular C D al plano A O B y del pié D tiremos en el mismo plano, D P perpendicular á O A y D Q perpendicular á O B. Siendo el plano C D P perpendicular á O A si tiramos C P esta recta será perpendicular á O A.

Igualmente siendo el plano C D Q perpendicular á O B la recta C Q será perpendicular á O B.

Considerando el triángulo C D P rectángulo en C D P y el triángulo C D Q rectángulo en C D Q se tiene:

$$C\,D = C\,P \text{ sen. } C\,P\,D$$
$$C\,D = C\,Q \text{ sen. } C\,Q\,D$$

(Fig. 395.)

igualando se tiene:

$$C\,P \text{ sen. } C\,P\,D = C\,Q \text{ sen. } C\,Q\,D \ldots.(b)$$

considerando que C P=sen. b, que C P D =A, que C Q=sen. a y que C Q D=B, y sustituyendo en la ecuacion (b) resulta:

$$\text{sen. } b \text{ sen } A = \text{sen. } a \text{ sen. } B$$

trasladando $$\frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B} = \frac{\text{sen. } a}{\text{sen. } A}$$

que es la fórmula (2)

849.—Relacion entre dos lados, el ángulo que forman y el ángulo opuesto á uno de ellos.—Si buscamos una relacion entre a, b, C y A tendremos que eliminar c y B entre las ecuaciones (1) y (2). En la ecuacion

$$\cos. a = \cos. b \cos. c + \text{sen. } b \text{ sen. } c \cos. A$$

sustituiremos $$\cos. c = \cos. a \cos. b + \text{sen. } a \text{ sen. } b \cos. C$$

y $$\text{sen. } c = \text{sen. } C \frac{\text{sen. } a}{\text{sen. } A}$$

lo que da:

$$\cos. a = \cos. b\,(\cos. a \cos. b + \text{sen. } a \text{ sen. } b \cos. C) + \frac{\text{sen. } b \text{ sen. } a \text{ sen. } C \cos. A}{\text{sen. } A}$$

$$\cos. a = \cos. a \cos^2 b + \text{sen. } a \text{ sen. } b \cos. b \cos. C + \text{sen. } b \text{ sen. } a \text{ sen. } C \cot. A$$

$$\cos. a\,(1 - \cos.^2 b) = \text{sen. } a \text{ sen. } b\,(\cos. b \cos\ C + \text{sen. } C \cot. A)$$

$$\frac{\cos. a \text{ sen.}^2 b}{\text{sen. } a \text{ sen. } b} = \cos. b \cos. C + \text{sen. } C \cot. A$$

y por último

$$\cot. a \text{ sen. } b = \cos. b \cos. C + \text{sen. } C \cot. A$$

Por cálculos idénticos, ó por simple permutacion de letras se pueden obtener otras cinco fórmulas semejantes y se tienen seis ecuaciones correspondientes á ella, que son:

$$\left.\begin{array}{l}
\cot. a \text{ sen. } b - \cot. A \text{ sen. } C = \cos. b \cos. C \\
\cot. b \text{ sen. } a - \cot. B \text{ sen. } C = \cos. a \cos. C \\
\cot. b \text{ sen. } c - \cot. B \text{ sen. } A = \cos. c \cos. A \\
\cot. c \text{ sen. } b - \cot. C \text{ sen. } A = \cos. b \cos. A \\
\cot. c \text{ sen. } a - \cot. C \text{ sen. } B = \cos. a \cos. B \\
\cot. a \text{ sen. } c - \cot. A \text{ sen. } B = \cos. c \cos. B
\end{array}\right\}\ldots.(3)$$

850.—Relacion entre un lado y los tres ángulos.—Para determinar una relacion entre a, A, B, C aplicando al triángulo suplementario (841 fig. 391) A' B' C' la fórmula fundamental, tendremos:

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \text{sen } b' \text{ sen } c' \cos A'$$

Como $a' = 180° - A$; $b' = 180° - B$; $c' = 180° - C$ y $A' = 180 - a$; sustituyendo resulta:

$$-\cos A = \cos B \cos C - \text{sen } B \text{ sen } C \cos a$$

cambiando signos

$$\cos A = -\cos B \cos C + \text{sen } B \text{ sen } C \cos a$$

aplicando el mismo procedimiento á las otras fórmulas (1) ó por simple cambio de letras resultan las tres relaciones.

$$\left.\begin{array}{l}
\cos. A = -\cos. B \cos. C + \text{sen. } B \text{ sen. } C \cos. a \\
\cos. B = -\cos. A \cos. C + \text{sen. } A \text{ sen. } C \cos. b \\
\cos. C = -\cos. A \cos. B + \text{sen. } A \text{ sen. } B \cos. c
\end{array}\right\}\ldots\ldots..(4)$$

Fórmulas relativas á los triángulos rectángulos.

(Fig. 396.)

851.—Los triángulos esféricos pueden tener los tres ángulos rectos, dos, ó solamente uno; pero es inútil considerar los casos en que el triángulo tiene *dos* ó *tres* rectos. En efecto, si suponemos que los ángulos A y B (fig. 396) sean rectos, los dos planos A O C y A O B, serán perpendiculares entre sí, y sucederá lo mismo con los planos C O B y A O B; de consiguiente, C O es perpendicular á A O B, y serán rectos los ángulos rectilíneos C O A, C O B; esto es, $a=b=90°$, así como A y B. Por otra parte, por ser C O perpendicular á O A y á O B, el ángulo C estará medido por el ángulo rectilíneo A O B y se tiene $C=c$.

Si los tres ángulos son rectos, los radios A O, B O y C O, serán perpendiculares entre sí y se tendrá $a=b=c=90°$.

En uno y otro caso no hay problema que resolver.

852.—Fórmulas de los Triángulos rectángulos.—Supondremos que $A=90°$. La hipotenusa será *a*, y los lados del ángulo recto serán *b* y *c*.

Recordando que seno $90°=1$, que $\cos 90°=0$, que $\operatorname{tang} 90=\infty$, que $\cot 90°=0$ y sustituyendo en las fórmulas respectivas (1) (2) (3) y (4), obtendrémos las correspondientes á los triángulos rectángulos.

La fórmula (1)

$$\cos a=\cos b \cos c+\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

cuando $A=90°$ se convierte en la fórmula única:

$$\cos a=\cos b \cos c \ldots\ldots\ldots(5)$$

La fórmula (2)

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A}=\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}=\frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

cuando $A=90°$ da:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} b=\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B\\ \operatorname{sen} c=\operatorname{sen} a \operatorname{sen} C\end{array}\right\}\ldots\ldots(6)$$

La fórmula 1ª de las (3)

$$\cot a \operatorname{sen} b-\cot A \operatorname{sen} C=\cos b \cos C$$

cuando $A=90°$ da:

$$\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{tang} a}=\cos b \cos C$$

$$\operatorname{tang} b=\operatorname{tang} a \cos C\ldots\ldots(7)$$

La 6ª fórmula de las (3)

$$\cot a \operatorname{sen} c-\cot A \operatorname{sen} B=\cos c \cos B$$

cuando $A=90°$ da:

$$\cot a \operatorname{sen} c=\cos c \cos B$$

ó bien $\operatorname{tang} c=\operatorname{tang} a \cos B \ldots(7)$

La 3ª de las fórmulas (3)

$$\cot b \operatorname{sen} c-\cot B \operatorname{sen} A=\cos c \cos A$$

da, si $A=90°$ $\cot b \operatorname{sen} c=\cot B$

ó bien $\operatorname{tang} b=\operatorname{sen} c \operatorname{tang} B\ldots(8)$

De la 4ª de las fórmulas (3)

$$\cot c \operatorname{sen} b-\cot C \operatorname{sen} A=\cos b \cos A$$

Cuando $A=90°$ se tiene:

$$\cot c \operatorname{sen} b=\cot C$$

ó bien $\operatorname{tang} c=\operatorname{sen} b \operatorname{tang} C\ldots(8)$

De la 2ª de las fórmulas (4)

$$\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b$$

cuando $A = 90°$ se tiene:

$$\cos B = \cos b \operatorname{sen} C \ldots (9)$$

De la 3ª de las fórmulas (4)

$$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c$$

cuando $A = 90°$ se obtiene:

$$\cos C = \cos c \operatorname{sen} B \ldots (9)$$

De la 1ª de las fórmulas (4)

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

Cuando $A = 90°$ se tiene:

$$\cos B \cos C = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

ó bien la fórmula única:

$$\cos a = \cot B \cot C \ldots (10)$$

En las seis fórmulas diferentes que acabamos de obtener, están cifrados los siguientes principios:

$$\cos a = \cos b \cos c \ldots (5)$$

expresa que *el coseno de la hipotenusa es igual al producto de los cosenos de los catetos.*

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C \end{array}\right\} \ldots (6)$$

expresan que *el seno de un lado es igual al seno de la hipotenusa multiplicado por el seno del ángulo opuesto al lado que se considera.*

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tang.} b = \operatorname{tang.} a \cos. C \\ \operatorname{tang.} c = \operatorname{tang.} a \cos. B \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (7)$$

expresan que *la tangente de un lado es igual al producto de la tangente de la hipotenusa por el coseno del ángulo adyacente.*

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tang.} b = \operatorname{sen.} c \operatorname{tang.} B \\ \operatorname{tang.} c = \operatorname{sen.} b \operatorname{tang.} C \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (8)$$

expresan que *la tangente de un lado es igual al producto del seno del otro lado por la tangente del ángulo opuesto al primero.*

$$\left.\begin{array}{l} \cos. B = \cos. b \operatorname{sen.} C \\ \cos. C = \cos. c \operatorname{sen.} B \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (9)$$

expresan que *el coseno de un ángulo es igual al producto del coseno del lado opuesto por el seno del otro ángulo.*

$$\cos. a = \cot. B \cot. C \ldots\ldots\ldots (10)$$

expresa que *el coseno de la hipotenusa es igual al producto de las cotangentes de los ángulos oblicuos.*

853.—Discusion de algunas fórmulas de los triángulos rectángulos.—En la fórmula

$$\cos. a = \cos. b \cos. c$$

pueden hacerse las siguientes hipótesis:

$$\begin{array}{ll}
1^a & \left\{\begin{array}{ll} b<90° & \cos. b \text{ tiene signo} + \\ c<90° & \cos. c \quad ,, \quad ,, \quad + \end{array}\right\} \cos. a \text{ tendrá signo} + \text{y } a<90° \\
2^a & \left\{\begin{array}{ll} b>90° & \cos. b \quad ,, \quad ,, \quad - \\ c>90° & \cos. c \quad ,, \quad ,, \quad - \end{array}\right\} \cos. a \quad ,, \quad ,, \quad + \text{y } a<90° \\
3^a & \left\{\begin{array}{ll} b>90° & \cos. b \quad ,, \quad ,, \quad - \\ c<90° & \cos. c \quad ,, \quad ,, \quad + \end{array}\right\} \cos. a \quad ,, \quad ,, \quad - \text{y } a>90° \\
4^a & \left\{\begin{array}{ll} b<90° & \cos. b \quad ,, \quad ,, \quad + \\ c>90° & \cos. c \quad ,, \quad ,, \quad - \end{array}\right\} \cos. a \quad ,, \quad ,, \quad - \text{y } a>90°
\end{array}$$

De lo cual se deduce la siguiente regla. *Cuando los lados del ángulo recto son de la misma especie, la hipotenusa es menor que 90°; y cuando esos lados son de distinta especie, la hipotenusa es mayor que 90°.*

En la fórmula

$$\operatorname{tang.} b = \operatorname{sen.} c \operatorname{tang.} B$$

vemos que tang. b, es el producto de dos factores, y como uno de ellos, sen. c, siempre es positivo, á causa de que $c<180°$, tang. b tendrá el mismo signo que tang. B. Cuando tang. b y tang. B tengan signo + serán b y B menores que 90°, y cuando tengan signo — serán b y B mayores que 90°, luego *un lado del ángulo recto siempre es de la misma especie que el ángulo opuesto.*

La fórmula

$$\cos. a = \cot. B \cot. C$$

discutida lo mismo que *cos. a=cos. b cos. c* conduce á la consecuencia de que *cuando los ángulos* B, C *son de la misma especie, la hipotenusa es menor que* 90°; *pero que cuando son de distinta especie, la hipotenusa es mayor que* 90°.

854.—Trasformaciones de las fórmulas de los triángulos rectángulos.—Las fórmulas anteriores pueden trasformarse en otras, que es conveniente conocer, porque los resultados son más aproximados sirviéndose de los logaritmos.

De la fórmula

$$\cos. a = \cos. b \cos. c$$

despejando á

$$\cos. c = \frac{\cos. a}{\cos. b}$$

y sustituyendo este valor en la expresion

$$\tang. \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{1-\cos. c}{1+\cos. c}}$$

resulta:

$$\tang. \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{1-\dfrac{\cos. a}{\cos. b}}{1+\dfrac{\cos. a}{\cos. b}}} = \sqrt{\frac{\cos. b-\cos. a}{\cos. b+\cos. a}}$$

$$= \sqrt{\tang. \tfrac{1}{2}(a-b) \tang. \tfrac{1}{2}(a+b)} \quad [777 \text{ f } (52)]$$

por trasformaciones idénticas se obtiene tang. ½ b, de manera que de la fórmula *cos. a=cos. b cos. c* resultan las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} \tang. \tfrac{1}{2} c = \pm\sqrt{\tang. \tfrac{1}{2}(a-b) \tang. \tfrac{1}{2}(a+b)} \\ \tang. \tfrac{1}{2} b = \pm\sqrt{\tang. \tfrac{1}{2}(a-c) \tang. \tfrac{1}{2}(a+c)} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (11)$$

De la fórmula

$$\text{sen. } b = \text{sen. } a \text{ sen. } B$$

se obtiene $$\text{sen. } a = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B} \ldots\ldots\ldots (a)$$

por otra parte

$$\tang. \tfrac{1}{2}(90°+a) = \sqrt{\frac{1-\cos.[90°+a]}{1+\cos.[90°+a]}} = \sqrt{\frac{1+\text{sen. } a}{1-\text{sen. } a}}$$

sustituyendo la expresion (a) en esta fórmula, se tiene:

$$\tang. [45°+\tfrac{1}{2} a] = \pm\sqrt{\frac{1+\dfrac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B}}{1-\dfrac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B}}} = \sqrt{\frac{\text{sen. } B+\text{sen. } b}{\text{sen. } B-\text{sen. } b}}$$

ó bien $$\tang. [45°+\tfrac{1}{2} a] = \pm\sqrt{\frac{\tang. \tfrac{1}{2}[B+b]}{\tang. \tfrac{1}{2}[B-b]}} \quad (777 \text{ f } [67])$$

De manera que de las fórmulas (6) se obtienen:

$$\tang. [45°+\tfrac{1}{2} a] = \pm\sqrt{\frac{\tang. \tfrac{1}{2}[B+b]}{\tang. \tfrac{1}{2}[B-b]}} = \pm\sqrt{\frac{\tang. \tfrac{1}{2}[C+c]}{\tang. \tfrac{1}{2}[C-c]}} \ldots\ldots (12)$$

Como las fórmulas (6) no se alteran cuando en ellas se reemplaza el lado a por el ángulo B, y B por a, así como cuando se reemplaza a por C y C por a, pues se tiene:

$$\text{sen. } b = \text{sen. } a \text{ sen. } B = \text{sen. } B \text{ sen. } a$$
$$\text{sen. } c = \text{sen. } a \text{ sen. } C = \text{sen. } C \text{ sen. } a$$

haciendo esta permutacion en las fórmulas (12) que se han deducido de las (6) se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} \tang. [45°+\tfrac{1}{2} B] = \pm\sqrt{\dfrac{\tang. \tfrac{1}{2}(a+b)}{\tang. \tfrac{1}{2}(a-b)}} \\ \tang. [45°+\tfrac{1}{2} C] = \pm\sqrt{\dfrac{\tang. \tfrac{1}{2}(a+c)}{\tang. \tfrac{1}{2}(a-c)}} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (13)$$

Por cálculos análogos, cuyo desarrollo recomendamos al lector que ejecute, pueden obtenerse las fórmulas siguientes:

De las fórmulas $\quad \text{tang.}b=\text{tang.}a\ \cos.C, \quad \text{tang.}c=\text{tang.}a\ \cos.B$

se obtiene:

$$\left.\begin{aligned}\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,C&=+\sqrt{\frac{\text{sen.}\ (a-b)}{\text{sen.}\ (a+b)}}\\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,B&=+\sqrt{\frac{\text{sen.}\ (a-c)}{\text{sen.}\ (a+c)}}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(14)$$

De las fórmulas

$\text{tang.}b=\text{sen.}c\ \text{tang.}\ B, \qquad \text{tang.}\ c=\text{sen.}b\ \text{tang.}C$

se obtiene:

$$\left.\begin{aligned}\text{tang.}\ [45^\circ+\tfrac{1}{2}\,c]&=\pm\sqrt{\frac{\text{sen.}\ [B+b]}{\text{sen.}\ [B-b]}}\\ \text{tang.}\ [45^\circ+\tfrac{1}{2}\,b]&=\pm\sqrt{\frac{\text{sen.}\ [C+c]}{\text{sen.}\ [C-c]}}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(15)$$

Las fórmulas (9)

$$\cos.\ B=\cos.\ b\ \text{sen.}\ C$$
$$\cos.\ C=\cos.\ c\ \text{sen.}\ B$$

dan

$$\cos.\ b=\frac{\cos.\ B}{\cos.\ [90^\circ-C]} \quad \text{y} \quad \cos.\ c=\frac{\cos.\ C}{\cos.\ [90^\circ-B]}$$

sustituyendo en la fórmula

$$\text{tang.}^2\ \tfrac{1}{2}\,b=\frac{1-\cos.\ b}{1+\cos.\ b}$$

$$\text{tang.}^2\ \tfrac{1}{2}\,b=\frac{\cos.\ (90^\circ-C)-\cos.\ B}{\cos.\ (90^\circ-C)+\cos.\ B}$$

$$=\frac{2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,(90^\circ+B-C)\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,(B+C-90^\circ)}{2\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,(90^\circ+B-C)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,(B+C-90^\circ)}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,b=+\sqrt{\text{tang.}\left(45^\circ+\frac{B-C}{2}\right)\ \text{tang.}\left(\frac{B+C}{2}-45^\circ\right)}\ldots(15\tfrac{1}{2})$$

un cálculo semejante con el valor de cos. *c* conduce al resultado

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,c=+\sqrt{\text{tang.}\left(45^\circ-\frac{B-C}{2}\right)\ \text{tang.}\left(\frac{B+C}{2}-45^\circ\right)}\ldots\ldots(15\tfrac{1}{2})$$

Ahora, sustituyendo el valor de $\text{sen.}C=\dfrac{\cos.\ B}{\cos.\ b}$ de la ecuacion (9) en la fórmula:

$$\text{tang.}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\,C)=\sqrt{\frac{1+\text{sen.}C}{1-\text{sen.}C}}$$

se tiene:

$$\text{tang.}\ (45^\circ+\tfrac{1}{2}\,C)=\sqrt{\frac{\cos.\ b+\cos.\ B}{\cos.\ b-\cos.\ B}}=\sqrt{\frac{2\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,(B+b)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,(B-b)}{2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,(B+b)\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,(B-b)}}$$

$$\text{tang.}\ (45^\circ+\tfrac{1}{2}\,C)=\pm\sqrt{\cot.\ \tfrac{1}{2}\,(B+b)\ \cot.\ \tfrac{1}{2}\,(B-b)}\ldots.(16)$$

un cálculo semejante con el valor $\text{sen.}B=\dfrac{\cos.\ C}{\cos.\ c}$ conduce á la fórmula:

$$\text{tang.}\ (45^\circ+\tfrac{1}{2}\,B)=+\sqrt{\cot.\ \tfrac{1}{2}\,(C+c)\ \cot.\ \tfrac{1}{2}\,C-c]}\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

La fórmula $\quad \cos.\ a=\cot.\ B\ \cot.\ C \quad$ se trasforma en:

$$\cos.\ a=\frac{\cos.\ B\ \cos.\ C}{\text{sen.}\ B\ \text{sen.}\ C}$$

sustituyendo este valor en la expresion:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{1-\cos.\ a}{1+\cos.\ a}}\ \text{da:}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{\text{sen.}\ B\ \text{sen.}\ C-\cos.\ B\ \cos.\ C}{\text{sen.}\ B\ \text{sen.}\ C+\cos.\ B\ \cos.\ C}}=\sqrt{\frac{-\cos.\ (B+C)}{\cos.\ (B-C)}}$$

y por último

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a=+\sqrt{\frac{\cos.\ (180^\circ-B-C)}{\cos.\ (B-C)}}\ldots\ldots\ldots(16\tfrac{1}{2})$$

855.—Fórmulas de los triángulos rectiláteros.—Se dice que un triángulo esférico es *rectilátero* cuando uno de sus lados es de 90°.

Si nos imaginamos un triángulo de esta especie A B C en el que el lado $a=90°$, el triángulo suplementario A' B' C' será rectángulo en A. Aplicando á este triángulo las fórmulas (5) á (10),

$$\cos. a'=\cos. b' \cos. c'$$
$$\text{sen. } b'=\text{sen. } a' \text{ sen. } B'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cos. a'=\cot. B' \cot. C'$$

y sustituyendo en estas fórmulas los valores:

$$a'=180-A;\ b'=180-B;\ c'=180°-C;$$
$$A'=180°-a;\ B'=180°-b,\ \text{y } C'=180°-c$$

se obtendrán las siguientes fórmulas, correspondientes á un triángulo *rectilátero* que son:

$$\cos. A=-\cos. B \cos. C \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen. } B=\text{sen. } A \text{ sen. } b\\ \text{sen. } C=\text{sen. } A \text{ sen. } c\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots (18)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } B=-\text{tang. } A \cos. c\\ \text{tang. } C=-\text{tang. } A \cos. b\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots (19)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } B=\ \ \text{sen. } C \text{ tang. } b\\ \text{tang. } C=\ \ \text{sen. } B \text{ tang. } c\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots (20)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos. b=\cos. B \text{ sen. } c\\ \cos. c=\cos. C \text{ sen. } b\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots (21)$$

$$\cos. A=-\cot. b \cot. c \ldots\ldots\ldots (22)$$

A cuyas fórmulas se les puede hacer sufrir trasformaciones análogas á las que en el párrafo 854 hicimos experimentar á las de los triángulos rectángulos. Las fórmulas 17 á 22 pueden deducirse igualmente de las (1), (2), (3) y (4) haciendo en ellas $a=90°$

Uso de los ángulos auxiliares en la Trigonometría esférica.

856.—Las fórmulas generales (1) á (4) no son adaptables al uso de los logaritmos; pero pueden trasformarse, sirviéndose de un arco auxiliar, en otras que sean adecuadas para el empleo de estas magnitudes. En efecto, esas fórmulas son de la forma

$$P=M \cos. \alpha+N \text{ sen. } \alpha \ldots\ldots\ldots (A)$$

siendo α uno de los seis elementos del triángulo, y M, N, P representando funciones monomias de las líneas trigonométricas de tres elementos diversos de α. Si se designa por φ un ángulo auxiliar, tal que

$$\text{tang. } \varphi=\frac{N}{M} \ldots\ldots\ldots (B)$$

escogiéndose la tangente porque esta línea puede tener toda clase de valores, y se sustituye N por su valor M tang. φ en la fórmula (A), y por tang. φ, $\dfrac{\text{sen. } \varphi}{\cos. \varphi}$, se convertirá en

$$P \cos. \varphi=M \cos. (\alpha-\varphi) \ldots\ldots\ldots (C)$$

De lo expuesto resulta que introduciendo el arco auxiliar φ, la fórmula (A) puede ser reemplazada por el sistema de las fórmulas (B) y (C) calculables ambas por logaritmos.

Por ejemplo, la fórmula fundamental

$$\cos. a=\cos. b \cos. c+\text{sen. } b \text{ sen. } c \cos. A \ldots\ldots\ldots (1)$$

puede hacerse calculable por logaritmos por medio de un arco auxiliar.

Sacando cos. b como factor comun

$$\cos. a=\cos. b\ (\cos. c+\text{sen. } c \text{ tang. } b \cos. A)$$

introduciendo el arco auxiliar φ, haciendo

$$\cot. \varphi=\text{tang. } b \cos. A \ldots\ldots\ldots (D)$$

sustituyendo resulta:

$$\cos. a=\cos. b\left(\cos. c+\text{sen. } c\ \frac{\cos. \varphi}{\text{sen. } \varphi}\right)=\cos. b\left(\frac{\text{sen. } \varphi \cos. c+\text{sen. } c \cos. \varphi}{\text{sen. } \varphi}\right)$$

y por último

$$\cos. a=\frac{\cos. b}{\text{sen. } \varphi}\ \text{sen. } (\varphi+c) \ldots\ldots\ldots (E)$$

Fórmulas generales calculables por logaritmos.

857.—FÓRMULAS PARA DETERMINAR LOS ÁNGULOS EN FUNCION DE LOS LADOS.—Vamos á trasformar las fórmulas (1) para hacerlas adaptables al uso de los logaritmos, y por tanto propias para la resolucion de los problemas de la trigonometría esférica.

De la primera de las fórmulas (1)

$$\cos. a = \cos. b \cos. c + \operatorname{sen.} b \operatorname{sen.} c \operatorname{sen.} A$$

se obtiene:

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\operatorname{sen.} b \operatorname{sen.} c} \ldots\ldots [a]$$

sustituyendo este valor en la fórmula [770]

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{1 - \cos. A}{2}$$

se tiene:

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{1 - \dfrac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\operatorname{sen.} b \operatorname{sen.} c}}{2} = \frac{\operatorname{sen.} b \operatorname{sen.} c + \cos. b \cos. c - \cos. a}{2 \operatorname{sen.} b \operatorname{sen.} c}$$

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\cos. [b-c] - \cos. a}{2 \operatorname{sen.} b \operatorname{sen.} c} = \frac{\operatorname{sen.} \tfrac{1}{2} [b-c+a] \operatorname{sen.} \tfrac{1}{2} [a+c-b]}{\operatorname{sen.} b \operatorname{sen.} c}$$

haciendo, como en los triángulos rectilíneos,

$$a + b + c = 2\,p$$

restando de los dos miembros de esta ecuacion sucesivamente $2\,c$ y $2\,b$, se obtiene:

$$a+b-c = 2\,p - 2\,c, \qquad a-b+c = 2\,p - 2\,b$$

sustituyendo estos valores en el de $\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A$ y extrayendo raíz, resulta

$$\operatorname{sen.} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen.} [p-b] \operatorname{sen.} [p-c]}{\operatorname{sen.} b \operatorname{sen.} c}} \ldots\ldots (23)$$

Sustituyendo ahora el valor

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\operatorname{sen.} b \operatorname{sen.} c}$$

en la fórmula [770]

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{1 + \cos. A}{2}$$

y por el mismo procedimiento de cálculo se obtiene:

$$\cos. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen.} p \operatorname{sen.} [p-a]}{\operatorname{sen.} b \operatorname{sen.} c}} \ldots\ldots (24)$$

Dividiendo [23] por [24] resulta:

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen.} [p-b] \operatorname{sen.} [p-c]}{\operatorname{sen.} p \operatorname{sen.} [p-a]}} \ldots\ldots (25)$$

Dividiendo la (24) por la (23) resulta:

$$\cot. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen.} p \operatorname{sen.} [p-a]}{\operatorname{sen.} [p-b] \operatorname{sen.} [p-c]}} \ldots\ldots (26)$$

N. B.—En todas estas fórmulas, el radical debe tomarse con el signo más, en razon de que $A < 180°$ y de que las líneas trigonométricas de los ángulos agudos, $\tfrac{1}{2}$ A, son positivas.

858.—FÓRMULAS PARA DETERMINAR LOS LADOS EN FUNCION DE LOS ÁNGULOS.—De la fórmula (4)

$$\cos. A = -\cos. B \cos. C + \operatorname{sen.} B \operatorname{sen.} C \cos. a$$

se obtiene:

$$\cos. a = \frac{\cos. A + \cos. B \cos. C}{\operatorname{sen.} B \operatorname{sen.} C}$$

sustituyendo este valor en las expresiones:

$$\operatorname{sen.}^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{1 - \cos. a}{2} \quad \text{y} \quad \cos.^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{1 + \cos. a}{2}$$

y por medio de operaciones idénticas á las que hemos ejecutado en el párrafo anterior, se obtiene, haciendo:

$$P = \tfrac{1}{2} [A + B + C]$$

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}\, a = \sqrt{\frac{-\cos. P \cos. [P-A]}{\text{sen. } B \text{ sen. } C}} \;\ldots\ldots\ldots (27)$$

$$\cos. \tfrac{1}{2}\, a = \sqrt{\frac{\cos. [P-B] \cos. [P-C]}{\text{sen. } B \text{ sen. } C}} \;\ldots\ldots\ldots (28)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\, a = \sqrt{\frac{-\cos. P \cos. (P-A)}{\cos. (P-B) \cos. (P-C)}} \;\ldots\ldots\ldots (29)$$

$$\cot. \tfrac{1}{2}\, a = \sqrt{\frac{\cos. (P-B) \cos. (P-C)}{-\cos. P \cos. (P-A)}} \;\ldots\ldots\ldots (30)$$

Los valores de las expresiones anteriores, en las que cos. P está afectado del signo — dentro del radical, no son imaginarios, como á primera vista pudiera creerse, pues sabiendo que

$$A+B+C>2\times 90^\circ$$
$$A+B+C<6\times 90^\circ$$

resulta:

$$\tfrac{1}{2}(A+B+C)=P>90^\circ$$
$$P<3.90^\circ$$

y como el coseno en los arcos de 90 á 270° es negativo, resulta que — cos. P es una cantidad *positiva*, y por tanto serán reales los valores dados por las fórmulas precedentes.

Por medio del triángulo suplementario pueden deducirse estas cuatro fórmulas de las (23), (24), (25) y (26). Por vía de ejercicio de la fórmula

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\, A = \sqrt{\frac{\text{sen. } (p-b) \text{ sen. } (p-c)}{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-a)}} \;\ldots\ldots\ldots (25)$$

vamos á deducir las (29) y (30).

En el triángulo suplementario, tenemos:

$A=180^\circ-a'$	$a=180^\circ-A'$	$p-a=90^\circ-(P'-A')$
$B=180^\circ-b'$	$b=180^\circ-B'$	$p-b=90^\circ-(P'-B')$
$C=180^\circ-c'$	$c=180^\circ-C'$	$p-c=90^\circ-(P'-C')$
$P=270^\circ-p'$	$p=270^\circ-P'$	

sustituyendo estos valores en la fórmula (25), se tiene:

$$\text{tang. } (90^\circ-\tfrac{1}{2}\, a') = \sqrt{\frac{\text{sen. } [90^\circ-(P'-B')] \text{ sen. } [90^\circ-(P'-C')]}{\text{sen. } (270^\circ-P') \text{ sen. } [90^\circ-(P'-A')]}}$$

$$\cot. \tfrac{1}{2}\, a' = \sqrt{\frac{\cos. (P'-B') \cos. (P'-C')}{-\cos. P' \cos. (P'-A')}} \;\ldots\ldots\ldots (30)$$

ó

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\, a' = \sqrt{\frac{-\cos. P' \cos. (P'-A')}{\cos. (P'-B') \cos. (P'-C')}} \;\ldots\ldots\ldots (29)$$

Nos hemos limitado á establecer las fórmulas que dan un ángulo A en funcion de los lados, y las que dan un lado *a* en funcion de los ángulos; pero así como hemos determinado el ángulo A y su lado opuesto, bien sea procediendo sobre la respectiva fórmula fundamental, ó por simple permutacion de letras, pueden obtenerse cuatro fórmulas idénticas en el fondo á las (23) á (26) para determinar el ángulo B ó C, y cuatro fórmulas como las (27) á (30) para determinar los lados *b* y *c*. Por ejemplo:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\, B = \sqrt{\frac{\text{sen. } (p-a) \text{ sen. } (p-c)}{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-b)}}$$

es fórmula correspondiente á la (25) para el ángulo B, y

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\, c = \sqrt{\frac{-\cos. P \cos. (P-C)}{\cos. (P-A) \cos. (P-B)}}$$

es la correspondiente á la (29) para el lado *c*.

859.—Fórmulas para determinar los lados, en funcion de los ángulos y del exceso esférico.—Hemos visto que la suma de los tres ángulos A+B+C de un triángulo esférico, es mayor que 2 ángulos rectos y menor que 6. Ahora bien: *se llama exceso esférico la diferencia que hay entre la suma de los tres ángulos de un triángulo y 180°.*

Si representamos por ε este exceso, tendremos:

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$$

y como $\quad A + B + C = 2P$

$$\varepsilon = 2P - 180^\circ$$

de donde $\quad \tfrac{1}{2}\varepsilon = P - 90^\circ$

$$P = \frac{\varepsilon}{2} + 90^\circ$$

sustituyendo por P su valor en las ecuaciones (27), (28), (29) y (30), recordando que $\cos.\left(90^\circ + \frac{\varepsilon}{2}\right) = -\operatorname{sen.}\frac{\varepsilon}{2}$,

y que $\cos.\left(90^\circ + \frac{\varepsilon}{2} - A\right) = -\operatorname{sen.}\left(\frac{\varepsilon}{2} - A\right) = \operatorname{sen.}\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)$

se obtiene:

$$\operatorname{sen.}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\operatorname{sen.}\frac{1}{2}\varepsilon\ \operatorname{sen.}(A - \frac{1}{2}\varepsilon)}{\operatorname{sen.}B\ \operatorname{sen.}C}} \quad \ldots\ldots\ldots (31)$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\operatorname{sen.}(B - \frac{1}{2}\varepsilon)\ \operatorname{sen.}(C - \frac{1}{2}\varepsilon)}{\operatorname{sen.}B\ \operatorname{sen.}C}} \quad \ldots\ldots\ldots (32)$$

$$\operatorname{tang.}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\operatorname{sen.}\frac{1}{2}\varepsilon\ \operatorname{sen.}(A - \frac{1}{2}\varepsilon)}{\operatorname{sen.}(B - \frac{1}{2}\varepsilon)\ \operatorname{sen.}(C - \frac{1}{2}\varepsilon)}} \quad \ldots\ldots\ldots (33)$$

$$\cot.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\operatorname{sen.}(B - \frac{1}{2}\varepsilon)\ \operatorname{sen.}(C - \frac{1}{2}\varepsilon)}{\operatorname{sen.}\frac{1}{2}\varepsilon\ \operatorname{sen.}(A - \frac{1}{2}\varepsilon)}} \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

860.—FÓRMULAS DE DELAMBRE.—Si en la fórmula

$$\operatorname{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \operatorname{sen.}\frac{A}{2}\cos.\frac{B}{2} + \operatorname{sen.}\frac{B}{2}\cos.\frac{A}{2}$$

sustituimos por sen. $\frac{1}{2}$ A, cos. $\frac{1}{2}$ A, sus valores de las fórmulas (23) y (24), y sus correspondientes por sen. $\frac{1}{2}$ B y por cos. $\frac{1}{2}$ B, encontraremos:

$$\operatorname{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{sen.}(p-b)\ \operatorname{sen.}(p-c)}{\operatorname{sen.}b\ \operatorname{sen.}c}} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{sen.}p\ \operatorname{sen.}(p-b)}{\operatorname{sen.}a\ \operatorname{sen.}c}}$$

$$+ \sqrt{\frac{\operatorname{sen.}(p-a)\ \operatorname{sen.}(p-c)}{\operatorname{sen.}a\ \operatorname{sen.}c}} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{sen.}p\ \operatorname{sen.}(p-a)}{\operatorname{sen.}b\ \operatorname{sen.}c}}$$

ejecutando la multiplicacion:

$$\operatorname{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen.}(p-b)}{\operatorname{sen.}c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen.}p\ \operatorname{sen.}(p-c)}{\operatorname{sen.}a\ \operatorname{sen.}b}}$$

$$+ \frac{\operatorname{sen.}(p-a)}{\operatorname{sen.}c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen.}p\ \operatorname{sen.}(p-c)}{\operatorname{sen.}a\ \operatorname{sen.}b}}$$

como segun la fórmula correspondiente á la (24)

$$\cos.\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\operatorname{sen.}p\ \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen.}a\ \operatorname{sen.}b}}$$

sustituyendo se tiene:

$$\operatorname{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen.}(p-b)}{\operatorname{sen.}c}\cos.\tfrac{1}{2}C + \frac{\operatorname{sen.}(p-a)}{\operatorname{sen.}c}\cos.\tfrac{1}{2}C$$

$$\operatorname{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\cos.\frac{1}{2}C}{\operatorname{sen.}c}\left(\operatorname{sen.}(p-b) + \operatorname{sen.}(p-a)\right) \quad \ldots\ldots\ldots (a)$$

De acuerdo con la fórmula: [776 f (59)]

$$\operatorname{sen.}a + \operatorname{sen.}b = 2\operatorname{sen.}\tfrac{1}{2}(a+b)\cos.\tfrac{1}{2}(a-b)$$

$$\operatorname{sen.}(p-b) + \operatorname{sen.}(p-a) = 2\operatorname{sen.}\tfrac{1}{2}(2p-b-a)\cos.\tfrac{1}{2}(p-b-p+a)$$

$$= 2\operatorname{sen.}\tfrac{1}{2}(a+b+c-b-a)\cos.\tfrac{1}{2}(a-b)$$

$$= 2\operatorname{sen.}\tfrac{1}{2}c\cos.\tfrac{1}{2}(a-b)$$

sustituyendo en la ecuacion (a) este valor y el de

$$\operatorname{sen.}c = 2\operatorname{sen.}\tfrac{1}{2}c\cos.\tfrac{1}{2}c \qquad [770\ f\ (34)]$$

se tiene:

$$\operatorname{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\cos.\frac{1}{2}C}{2\operatorname{sen.}\frac{1}{2}c\cos.\frac{1}{2}c}\,2\operatorname{sen.}\tfrac{1}{2}c\cos.\tfrac{1}{2}(a-b)$$

$$\operatorname{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\cos.\frac{1}{2}C}{\cos.\frac{1}{2}c}\cos.\tfrac{1}{2}(a-b)$$

de donde por último:

$$\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(A+B)}{\cos. \frac{1}{2} C}=\frac{\cos. \frac{1}{2}(a-b)}{\cos. \frac{1}{2} c} \ldots\ldots\ldots (35)$$

Operaciones análogas hechas con las expresiones de sen. $\frac{1}{2}$ (A—B), cos. $\frac{1}{2}$ (A+B) y cos. $\frac{1}{2}$ (A—B) conducen á las siguientes fórmulas:

$$\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(A-B)}{\cos. \frac{1}{2} C}=\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen. } \frac{1}{2} c} \ldots\ldots\ldots (36)$$

$$\frac{\cos. \frac{1}{2}(A+B)}{\text{sen. } \frac{1}{2} C}=\frac{\cos. \frac{1}{2}(a+b)}{\cos. \frac{1}{2} c} \ldots\ldots\ldots (37)$$

$$\frac{\cos. \frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen. } \frac{1}{2} C}=\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(a+b)}{\text{sen. } \frac{1}{2} c} \ldots\ldots\ldots [38]$$

Estas fórmulas notables, que encierran los seis elementos del triángulo esférico, fueron descubiertas en 1807 por Delambre.

861.—ANALOGÍAS DE NEPER.—Si dividimos ordenadamente las fórmulas [35] y [37] obtendremos:

$$\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(A+B) \text{ sen. } \frac{1}{2} C}{\cos. \frac{1}{2}(A+B) \cos. \frac{1}{2} C}=\frac{\cos. \frac{1}{2}(a-b)}{\cos. \frac{1}{2}(a+b)}$$

de donde

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A+B)=\cot. \tfrac{1}{2} C \frac{\cos. \frac{1}{2}(a-b)}{\cos. \frac{1}{2}(a+b)} \ldots\ldots\ldots [39]$$

dividiendo la [36] por la [38] y despejando á tang. $\frac{1}{2}$ [A—B], resulta:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}[A-B]=\cot. \tfrac{1}{2} C \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}[a-b]}{\text{sen. } \frac{1}{2}[a+b]} \ldots\ldots\ldots [40]$$

Dividiendo la [38] por la [37] y despejando á tang. $\frac{1}{2}$ [a+b], resulta:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}[a+b]=\text{tang. } \tfrac{1}{2} c \frac{\cos. \frac{1}{2}[A-B]}{\cos. \frac{1}{2}[A+B]} \ldots\ldots\ldots [41]$$

Dividiendo la [36] por la [35] y despejando á tang. $\frac{1}{2}$ [a—b], resulta:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}[a-b]=\text{tang. } \tfrac{1}{2} c \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}[A-B]}{\text{sen. } \frac{1}{2}[A+B]} \ldots\ldots\ldots [42]$$

Las ecuaciones (39), (40), (41) y (42), son conocidas bajo el nombre de fórmulas ó analogías de Neper, cada una de las cuales contiene cinco de los elementos de un triángulo esférico.

Expresiones del exceso esférico.

862.—Vamos á dar á conocer algunas fórmulas en las que figura el exceso esférico, elemento importante en las aplicaciones de la trigonometría esférica para medir la superficie de un triángulo, y cuyas fórmulas servirán para calcularlo en los diferentes casos que haya necesidad de considerar.

863.—EXCESO ESFÉRICO EN FUNCION DE DOS LADOS Y DEL ÁNGULO QUE FORMAN.—Hemos encontrado (859, fórm. 34) que

$$\cot. \tfrac{1}{2} a=\sqrt{\frac{\text{sen. }(B-\frac{1}{2}\varepsilon) \text{ sen. }(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon \text{ sen. }(A-\frac{1}{2}\varepsilon)}}$$

y por tanto

$$\cot. \tfrac{1}{2} b=\sqrt{\frac{\text{sen. }[A-\frac{1}{2}\varepsilon] \text{ sen. }[C-\frac{1}{2}\varepsilon]}{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon \text{ sen. }[B-\frac{1}{2}\varepsilon]}}$$

Multiplicándolas y simplificando. queda:

$$\cot. \tfrac{1}{2} a \cot. \tfrac{1}{2} b=\frac{\text{sen. }[C-\frac{1}{2}\varepsilon]}{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon}$$

poniendo por seno [C—$\frac{1}{2}\varepsilon$] su desarrollo

$$\cot. \tfrac{1}{2} a \cot. \tfrac{1}{2} b=\frac{\text{sen. } C \cos. \frac{1}{2}\varepsilon-\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon \cos. C}{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon}=\text{sen. } C \cot. \tfrac{1}{2}\varepsilon-\cos. C$$

de donde

$$\cot. \tfrac{1}{2}\,\varepsilon = \frac{\cot. \tfrac{1}{2}\,a \cot. \tfrac{1}{2}\,b + \cos. C}{\text{sen. } C} \ldots\ldots\ldots (43)$$

865.—Fórmula del exceso esférico apropiada al uso de los logaritmos.—Puede obtenerse otra fórmula para el exceso esférico en funcion de tres lados *a, b, c* y un ángulo C, que sea calculable por logaritmos.

Sabemos que $\tfrac{1}{2}\,\varepsilon = \tfrac{1}{2}\,[A+B+C] - 90°$

luego $\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,\varepsilon = -\cos. \tfrac{1}{2}\,[A+B+C]$

ó bien

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,\varepsilon = \text{sen. } \tfrac{1}{2}\,[A-B]\ \text{sen. } \tfrac{1}{2}\,C - \cos. \tfrac{1}{2}\,[A+B] \cos. \tfrac{1}{2}\,C$$

sustituyendo por sen. $\tfrac{1}{2}$ [A+B] y por cos. $\tfrac{1}{2}$ [A+B] los valores que dan las fórmulas [35] y [37] de Delambre, resulta:

$$\text{sen.} \tfrac{1}{2}\,\varepsilon = \frac{\cos. \tfrac{1}{2}\,C \cos. \tfrac{1}{2}\,[a-b]}{\cos. \tfrac{1}{2}\,c}\ \text{sen.} \tfrac{1}{2}\,C - \frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,C \cos. \tfrac{1}{2}\,[a+b]}{\cos. \tfrac{1}{2}\,c} \cos. \tfrac{1}{2}\,C$$

$$\text{sen.} \tfrac{1}{2}\,\varepsilon = \frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,C \cos. \tfrac{1}{2}\,C\,[\cos. \tfrac{1}{2}\,(a-b) - \cos. \tfrac{1}{2}\,(a+b)]}{\cos. \tfrac{1}{2}\,c}$$

y por último

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,\varepsilon = \frac{\text{sen. } C}{\cos. \tfrac{1}{2}\,c}\ \text{sen. } \tfrac{1}{2}\,a\ \text{sen. } \tfrac{1}{2}\,b \ldots\ldots\ldots [44]$$

866.—Exceso esférico en funcion de los tres lados.—La fórmula de Delambre (35)

$$\frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,[A+B]}{\cos. \tfrac{1}{2}\,C} = \frac{\cos. \tfrac{1}{2}\,[a-b]}{\cos. \tfrac{1}{2}\,c}$$

puede ponerse bajo la forma:

$$\cos. \tfrac{1}{2}\,(a-b) : \text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(A+B) :: \cos. \tfrac{1}{2}\,c : \cos. \tfrac{1}{2}\,C$$

de la cual resulta: (225)

$$\frac{\cos. \tfrac{1}{2}\,(a-b) - \cos. \tfrac{1}{2}\,c}{\cos. \tfrac{1}{2}\,(a-b) + \cos. \tfrac{1}{2}\,c} = \frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(A+B) - \cos. \tfrac{1}{2}\,C}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(A+B) + \cos. \tfrac{1}{2}\,C} \ldots . (a)$$

Como $A+B+C-180° = \varepsilon$

$\tfrac{1}{2}\,(A+B) = 90° + \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon - C)$

y $\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(A+B) = \cos. \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon - C)$

sustituyendo este valor en (a) se tendrá:

$$\frac{\cos. \tfrac{1}{2}\,(a-b) - \cos. \tfrac{1}{2}\,c}{\cos. \tfrac{1}{2}\,(a-b) + \cos. \tfrac{1}{2}\,c} = \frac{\cos. \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon - C) - \cos. \tfrac{1}{2}\,C}{\cos. \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon - C) + \cos. \tfrac{1}{2}\,C}$$

poniendo por la diferencia y por la suma de los cosenos sus valores (776) resulta:

$$\frac{\text{sen. } \tfrac{1}{4}\,(a+c-b)\ \text{sen. } \tfrac{1}{4}\,(c+b-a)}{\cos. \tfrac{1}{4}\,(a+c-b) \cos. \tfrac{1}{4}\,(c+b-a)} = \frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{sen. } \tfrac{1}{4}\,\varepsilon}{\cos. \tfrac{1}{2}\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cos. \tfrac{1}{4}\,\varepsilon}$$

ó $$\text{tg. } \tfrac{1}{4}\,(a+c-b)\ \text{tg. } \tfrac{1}{4}\,(c+b-a) = \text{tg. } \tfrac{1}{2}\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{tg. } \tfrac{1}{4}\,\varepsilon \ldots\ldots (b)$$

De la fórmula de Delambre (37)

$$\frac{\cos. \tfrac{1}{2}\,(A+B)}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,C} = \frac{\cos. \tfrac{1}{2}\,(a+b)}{\cos. \tfrac{1}{2}\,c}$$

por operaciones análogas, se deduce la siguiente:

$$\text{tg. } \tfrac{1}{4}\,(a+b+c)\ \text{tg. } \tfrac{1}{4}\,(a+b-c) = \cot. \tfrac{1}{2}\,(C - \tfrac{1}{2}\,\varepsilon)\ \text{tg. } \tfrac{1}{4}\,\varepsilon \ldots\ldots\ldots (c)$$

Multiplicando (b) por (c) y poniendo por $a+b+c=2p$, resulta:

$$\text{tg.}^2\, \tfrac{1}{4}\,\varepsilon = \text{tg. } \tfrac{1}{2}\,p.\ \text{tg. } \tfrac{1}{2}\,(p-a)\ \text{tg. } \tfrac{1}{2}\,(p-b)\ \text{tg. } \tfrac{1}{2}\,(p-c)$$

y por último:

$$\text{tg. } \tfrac{1}{4}\,\varepsilon = \sqrt{\text{tg. } \tfrac{1}{2}\,p.\ \text{tg. } \tfrac{1}{2}\,(p-a)\ \text{tg. } \tfrac{1}{2}\,(p-b)\ \text{tg. } \tfrac{1}{2}\,(p-c)} \ldots\ldots\ldots (45)$$

fórmula notable que es debida á Simon l'Huillier.

Si el triángulo es equilátero, como $p=\frac{3a}{2}$ y $p-a=p-b=p-c=\frac{2}{a}$ la fórmula se convierte en:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,\varepsilon=\sqrt{\text{tg. }\frac{3a}{4}\,\text{tg.}^{3}\tfrac{1}{4}a}$$

867.—Seno del exceso esférico en funcion de los tres lados.—Hemos determinado la fórmula

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,\varepsilon=\frac{\text{sen. } C}{\cos. \tfrac{1}{2}c}\,\text{sen. } \tfrac{1}{2}a \text{ sen. } \tfrac{1}{2}b \ldots\ldots\ldots(44)$$

Sustituirémos en la fórmula

$$\text{sen. } C=2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2}C \cos. \tfrac{1}{2}C$$

los valores de sen. $\frac{1}{2}$ C y de cos. $\frac{1}{2}$ C de las fórmulas (23) y (24) y obtendrémos:

$$\text{sen. } C=\frac{2}{\text{sen. } a \text{ sen. } b}\sqrt{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-a) \text{ sen. } (p-b) \text{ sen. } (p-c)}$$

sustituyendo los valores de sen. $a=2$ sen. $\frac{1}{2}a$ cos. $\frac{1}{2}a$, sen $b=2$ sen. $\frac{1}{2}b$ cos. $\frac{1}{2}b$, resulta:

$$\text{sen. } C=\frac{\sqrt{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-a) \text{ sen. } (p-b) \text{ sen. } (p-c)}}{2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2}a \cos. \tfrac{1}{2}a \text{ sen. } \tfrac{1}{2}b \cos. \tfrac{1}{2}b}$$

sustituyendo en la (44) y suprimiendo el factor comun sen. $\frac{1}{2}a$ sen. $\frac{1}{2}b$ finalmente resulta:

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,\varepsilon=\frac{\sqrt{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-a) \text{ sen. } (p-b) \text{ sen. } (p-c)}}{2 \cos. \tfrac{1}{2}a \cos. \tfrac{1}{2}b \cos. \tfrac{1}{2}c}\ldots.(45)$$

Resolucion de los triángulos rectángulos.

868.—Casos y fórmulas para resolver los triángulos rectángulos.—Ya hemos indicado que en los triángulos esféricos rectángulos no hay necesidad de ocuparse de su resolucion cuando están formados por dos ó por tres ángulos rectos (851). Cuando tienen un solo ángulo recto, siendo siempre conocido el elemento $A=90°$, para poder resolverlos, basta tener una relacion adecuada entre *tres* de las *cinco* cantidades a, b, c, B, C, de las cuales *dos* considerarémos como datos y una como incógnita. Ahora bien: el número de combinaciones que pueden hacerse con 5 cantidades tomadas de 2 en 2, son 10, conforme á la fórmula: (356).

$$C^{m}_{n}=\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\,2.\,3\ldots n}$$

$$\text{Sustituyendo } C^{5}_{2}=\frac{5.\,4}{2}=10 \text{ combinaciones.}$$

De estas 10 combinaciones resultan solamente seis casos diferentes:

1^er. caso: se conocen	*b c*			
2° caso:	,,	*a b*	ó	*a c*
3^er. caso:	,,	*b* C	ó	*c* B
4° caso:	,,	*b* B	ó	*c* C
5° caso:	,,	*a* B	ó	*a* C
6° caso:	,,	B C		

Para la resolucion de estos casos no hay más que aplicar la fórmula que contenga los elementos conocidos y aquel que se busca de las que dejamos demostradas (852 y 854) y son las siguientes:

Entre la hipotenusa y dos lados

$$\cos. a=\cos. b \cos. c \ldots\ldots\ldots(5)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } \tfrac{1}{2}c=+\sqrt{\text{tang. } \tfrac{1}{2}(a-b)\text{ tang. } \tfrac{1}{2}(a+b)}\\ \text{tang. } \tfrac{1}{2}b=+\sqrt{\text{tang. } \tfrac{1}{2}(a-c)\text{ tang. } \tfrac{1}{2}(a+c)}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(11)$$

Entre la hipotenusa, un lado y el ángulo opuesto

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen. } b=\text{sen. } a \text{ sen. } B\\ \text{sen. } c=\text{sen. } a \text{ sen. } C\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$\text{tang. } (45°+\tfrac{1}{2}a)=\pm\sqrt{\frac{\text{tang. } \tfrac{1}{2}(B+b)}{\text{tang. } \tfrac{1}{2}(B-b)}}=\pm\sqrt{\frac{\text{tang. } \tfrac{1}{2}(C+c)}{\text{tang. } \tfrac{1}{2}(C-c)}}\ldots.(12)$$

Entre la hipotenusa, un lado y el ángulo que forman

$$\left.\begin{aligned}\text{tang. } b&=\text{tang. } a \text{ cos. } C\\ \text{tang. } c&=\text{tang. } a \text{ cos. } B\end{aligned}\right\}\ldots\ldots..(7)$$

$$\left.\begin{aligned}\text{tang. } \tfrac{1}{2} C&=+\sqrt{\frac{\text{sen. }(a-b)}{\text{sen. }(a+b)}}\\ \text{tang. } \tfrac{1}{2} B&=+\sqrt{\frac{\text{sen. }(a-c)}{\text{sen. }(a+c)}}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots..(14)$$

Entre dos lados y un ángulo

$$\left.\begin{aligned}\text{tang. } b&=\text{sen. } c \text{ tang. } B\\ \text{tang. } c&=\text{sen. } b \text{ tang. } C\end{aligned}\right\}\ldots\ldots..(8)$$

$$\left.\begin{aligned}\text{tang. } (45^\circ+\tfrac{1}{2} c)&=\pm\sqrt{\frac{\text{sen. }(B+b)}{\text{sen. }(B-b)}}\\ \text{tang. } (45^\circ+\tfrac{1}{2} b)&=\pm\sqrt{\frac{\text{sen. }(C+c)}{\text{sen. }(C-c)}}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots..(15)$$

Entre dos ángulos y un lado.

$$\left.\begin{aligned}\text{cos. } B&=\text{cos. } b \text{ sen. } C\\ \text{cos. } C&=\text{cos. } c \text{ sen. } B\end{aligned}\right\}\ldots\ldots..(9)$$

$$\left.\begin{aligned}\text{tang. } (45^\circ+\tfrac{1}{2} C)&=\pm\sqrt{\text{cot. } \tfrac{1}{2}(B+b) \text{ cot. } \tfrac{1}{2}(B-b)}\\ \text{tang. } (45^\circ+\tfrac{1}{2} B)&=\pm\sqrt{\text{cot. } \tfrac{1}{2}(C+c) \text{ cot. } \tfrac{1}{2}(C-c)}\end{aligned}\right\}\ldots.(16)$$

Entre dos ángulos y la hipotenusa

$$\text{cos. } a=\text{cot. } B \text{ cot. } C\ldots\ldots..(11)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} a=+\sqrt{\frac{\text{cos. }(180^\circ-B-C)}{\text{cos. }(B-C)}}\ \Bigg\}\ldots.(16\tfrac{1}{2})$$

OBSERVACION.—Cuando se apliquen estas fórmulas para determinar uno de los elementos de un triángulo esférico, es preciso recordar que las hemos establecido suponiendo el radio de la esfera igual á la unidad, y para hacerlas homogéneas debe restituirse r, cuyo logaritmo en las tablas es 10. Si por ejemplo vamos á determinar el valor de la hipotenusa por medio de la fórmula (5)

$$\cos a=\cos b \cos c$$

debemos poner $\quad \cos a=\dfrac{\cos b \cos c}{r}$

Si vamos á determinar un lado por la fórmula (6)

$$\text{sen } b=\text{sen } a \text{ sen } B$$

debemos poner $\quad \text{sen } b=\dfrac{\text{sen } a \text{ sen } B}{r}$

y así en todas las demás fórmulas.

Nos ocuparemos en particular de la resolucion de cada caso.

869.—PRIMER CASO.—Conociendo los dos lados b, c, determinar la hipotenusa a y los ángulos B, C.

La fórmula (5) da $\quad \cos a=\cos b \cos c$

,, (8) $\quad \text{tang } B=\dfrac{\text{tang } b}{\text{sen } c}$

,, (8) $\quad \text{tang } C=\dfrac{\text{tang } c}{\text{sen } b}$

Repetimos que en las aplicaciones es preciso hacer homogéneas estas fórmulas introduciendo el factor r; y como las incógnitas a, B y C están dadas por el coseno y la tangente, no tienen más que un solo valor.

Cuando el valor de a, expresado por los cosenos de b y de c no se obtenga con suficiente aproximacion se calcularán primero B y C y se empleará la fórmula (10)

$$\cos a=\cot B \cot C.$$

870.—SEGUNDO CASO.—Dada la hipotenusa a y el lado b, se determinarán c, B y C por las fórmulas:

$$\cos c=\frac{\cos a}{\cos b} \qquad \operatorname{sen} B=\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} \qquad \cos C=\frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}$$

Pueden calcularse las incógnitas con más aproximacion por las fórmulas

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c=\pm\sqrt{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a+b)} \ldots\ldots\ldots (11)$$

$$\operatorname{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}B)=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b)}} \ldots\ldots\ldots (13)$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)}} \ldots\ldots\ldots (14)$$

Observacion.—Supuesto que $\operatorname{sen} B=\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}$, para que el problema sea posible, es necesario y basta que se tenga $\operatorname{sen} b<\operatorname{sen} a$, porque realizándose esta condicion el valor de sen B será menor que 1, y los valores de cos c y de cos C estarán comprendidos entre -1 y $+1$. La desigualdad de que se trata,

$$\operatorname{sen} b<\operatorname{sen} a$$

como es fácil convencerse con el exámen de una figura, exige que se tenga:

Cuando $a<90^\circ$ $\quad b<a$, ó bien $b>180^\circ-a$,
Cuando $a>90^\circ$ $\quad b>a$, ó bien $b<180^\circ-a$
Cuando $a=90^\circ$, necesariamente $\operatorname{sen} b<\operatorname{sen} a$.

Satisfecha la condicion de posibilidad, el problema no admite más que una sola resolucion aun cuando el ángulo B esté dado por su seno, por que B debe ser de la misma especie que el lado b conocido. (853) La misma consideracion permite fijar el signo con que debe tomarse el radical en la expresion de $\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}B)$.

871.—Tercer caso.—Conociendo un lado c y el ángulo adyacente B, se determinarán C, b y a por las siguientes fórmulas:

$$\cos C=\cos c \operatorname{sen} B \qquad \operatorname{tang} b=\operatorname{sen} c \operatorname{tang} B \qquad \operatorname{tang} a=\frac{\operatorname{tang} c}{\cos B}$$

Si es necesario tener mayor aproximacion que la que proporciona el logaritmo del coseno, se calculará el ángulo C por una de las fórmulas:

$$\cot C=\frac{\cos a}{\cot B} \qquad \operatorname{tang} C=\frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{sen} b}$$

El problema siempre es posible y no admite más que una sola resolucion.

872.—Cuarto caso.—Conociendo un lado b y el ángulo opuesto B se determinarán C, a y c por medio de las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{sen} C=\frac{\cos B}{\cos b} \qquad \operatorname{sen} a=\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} \qquad \operatorname{sen} c=\frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} B}$$

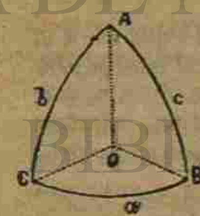
Si se quieren obtener las incógnitas por medio de las tangentes usaremos las expresiones:

$$\operatorname{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}C)=\pm\sqrt{\cot \tfrac{1}{2}(B+b) \cot \tfrac{1}{2}(B-b)} \ldots\ldots\ldots (16)$$

$$\operatorname{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}a)=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(B+b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(B-b)}} \ldots\ldots\ldots (12)$$

$$\operatorname{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}c)=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B+b)}{\operatorname{sen}(B-b)}} \ldots\ldots\ldots (15)$$

Cualquiera de los dos sistemas precedentes de fórmulas puede dar para cada incógnita dos valores suplementarios, y por tanto es necesario saber cuáles de estos valores son correlativos y deben tomarse juntamente:



(Fig. 397).

1° Si se tiene $\quad b=B$
resulta $\quad \operatorname{sen} C=\operatorname{sen} a=\operatorname{sen} c=1$
y por esto $\quad C=a=c=90^\circ$

y el triángulo será birectángulo, como puede observarse en la figura 397. En efecto para que sea $B=b$ es necesario que $A O B=c=90^\circ$
y que $C O B=a=90^\circ$

Ahora bien, siendo B O perpendicular á la vez á las rectas A O y C O lo será al plano A O C que las contiene, y por lo mismo cualquier plano B O C que pase por B O será perpendicular á A O C; luego $C=90°$

Supongamos pues b difrente de B.

2° Sea $b<90°$

Como los ángulos deben ser de la misma especie que los lados opuestos se debe tener para que el triángulo sea posible $B<90°$, y ademas $b<B$ para qus sea sen $a<1$ en la expresion sen $a=\frac{\text{sen } b}{\text{sen } B}$. Satisfechas estas condiciones, y siendo positivo cos b, la ecuacion cos a=cos b cos c muestra que a y c tienen que ser á la vez inferiores ó superiores á 90° y como ademas (853) el ángulo C debe ser de la misma especie que c resulta que las tres incógnitas a, c y C tendrán que ser juntamente obtusas ó á la vez agudas. En resúmen tendremos las dos resoluciones siguientes:

Primera $b<90°$, $B<90°$, $a>90°$, $c>90°$, $C>90°$

Segunda $b<90°$, $B<90°$, $a'=180°-a$, $c'=180°-c$, $C'=180°-C$

en la primera resolucion las tres incógnitas serán mayores que 90°, y en la segunda todas ellas serán menores.

3° Sea $b>90°$

Las condiciones de posibilidad del problema son: $B>90°$ y $b>B$, para que tratándose de arcos comprendidos entre 90° y 180° resulte $\frac{\text{sen } b}{\text{sen } B}=\text{sen } a<1$.

Una vez satisfechas estas condiciones siendo cos b negativo, la ecuacion cos a=cos b cos c muestra que a y c son uno superior y el otro inferior á 90°. Además como el ángulo C tiene que ser de la misma especie que c; resulta que cuando $a<90°$ tanto c como C serán obtusos, y que cuando $a>90°$ serán c y C agudos. En resúmen tendremos las dos resoluciones siguientes:

Primera $b>90°$, $B>90°$, $a<90°$, $c>90°$, $C>90°$

Segunda $b>90°$, $B>90°$, $a'=180°-a$, $c'=180°-c$ $C'=180°-C$.

(Fig. 398.)

Es fácil ver que exceptuando el caso de que b=B el problema admite dos resoluciones cuando el triángulo es posible. Supongamos en efecto que el triángulo A B C (fig. 398) rectángulo en A satisfaga la cuestion y prolongando los lados A B y B C hasta su interseccion en B' se formará un segundo triángulo A B' C que satisfaerá igualmente la cuestion.

873.—Quinto caso.—Conociendo la hipotenusa a y el ángulo oblícuo B, se calcularán b, c y C por las fórmulas

$$\text{sen. } b=\text{sen. } a \text{ sen. } B, \quad \text{tang. } c=\text{tang. } a \cos. B, \quad \text{tang. } C=\frac{\cot. B}{\cos. a}$$

si el lado b quedase mal determinado por su seno, se calcularán primero c ó C y se obtendría en seguida b por una de las fórmulas

$$\text{tang. } b=\text{sen. } c \text{ tang. } B, \qquad \text{tang. } b=\text{tang. } a \cos. C$$

El problema siempre es posible y no admite más que una resolucion, porque la incógnita b y el ángulo dado B son á la vez inferioras ó superiores á 90°.

874.—Sexto caso.—Estando dados los dos ángulos oblícuos B y C se calcularán los tres lados a, b y c por las fórmulas

$$\cos. a=\cot. B \cot. C, \quad \cos. b=\frac{\cos. B}{\text{sen. } C}, \quad \cos. c=\frac{\cos. C}{\text{sen. } B}$$

ó mejor, para tener mas aproximacion, por las siguientes:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} a=+\sqrt{\frac{\cos. (180°-B-C)}{\cos. (B-C)}} \;\ldots\ldots\ldots (16\tfrac{1}{2})$$

$$\left.\begin{aligned} \text{tang. } \tfrac{1}{2} b &=+\sqrt{\text{tang.}\left(\frac{B+C}{2}-45°\right) \text{ tang.}\left(\frac{B-C}{2}+45°\right)} \\ \text{tang. } \tfrac{1}{2} c &= \sqrt{\text{tang.}\left(\frac{B+C}{2}-45°\right) \text{ tang.}\left(\frac{C-B}{2}+45°\right)} \end{aligned}\right\} (15\tfrac{1}{2})$$

Para que el problema sea posible es necesario y basta: 1° que $B+C$ esté comprendido entre 90° y 270°; 2° que la diferencia $B-C$ esté comprendida entre $-90°$ y $+90°$. Cuando estas condiciones están satisfechas, los valores son reales y el problema no admite mas que una sola resolucion.

875.—Observaciones.—Cuando alguno de los datos está comprendido entre 90° y 180° se sabe que los cosenos, las tangentes y las cotangentes de estos arcos son *negativas*, y para evitar el empleo de logaritmos de cantidades negativas, que son expresiones imaginarias, se buscan, segun lo hemos explicado en álgebra (337 IV), los logaritmos de las respectivas líneas trigonométricas como si fueran positivas, se ejecutan las operaciones indicadas, y despues de afectar el resultado conforme á las reglas del álgebra, del signo que le corresponda, se determina el cuadrante del arco á que pertenece.

Supongamos, por ejemplo, que se conozcan *b* y *c*, siendo

$$b>90° \qquad y \qquad c<90°;$$

los demas elementos del triángulo se calcularán por las fórmulas:

$$\cos. a=\cos. b \cos. c, \quad \text{tang.} B=\frac{\text{tang. } b}{\text{sen. } c}, \quad \text{tang. } C=\frac{\text{tang. } c}{\text{sen. } b}.$$

por ser negativas las líneas *cos. b* y *tang. b* resultarán negativas *cos. a* y *tang. B*, de lo que se deduce que debe ser:

$$a>90°, \qquad B>90°, \qquad y \qquad C<90°$$

cuyos resultados están de acuerdo con las condiciones demostradas (853); esto es, que debe ser $a>90°$ cuando *b* y *c*, ó cuando B y C sean de distinta especie, así como que el lado del ángulo recto *c* sea de la misma especie que el ángulo C opuesto.

Observaremos por último que cuando una de las incógnitas está determinada por el logaritmo de su seno ó de su coseno, y que se obtiene para el correspondiente logaritmo un número mayor que 10, esto es un indicio cierto de que el triángulo es imposible, y que existe alguna contradiccion en los datos, lo cual puede muy bien suceder.

876.—Problemas. I.—Sean $a=115°—17'—20''$
$B= 98°—28'—30''$

se buscan *b*, *c*, C.

Las fórmulas para determinarlos son:

$$\text{sen.} b=\text{sen.} a \ \text{sen.} B, \quad \text{tang.} c=\text{tang.} a \cos. B, \quad \cot. C=\frac{\cos. a}{\cot. B}$$

pero como *a* y $B>90°$, en las tablas no encontraremos sino los suplementos de sus valóres.

$a'=180°—a=64°—42'—40''$ suplemento de *a*.
$B'=180°—B=81°—31'—30''$,, de B.

1° log. sen.a'= 9·956 2479
,, sen.B'= 9·995 2315
— ,, r =—10'
,, sen.b'= 9·951 4794
b'= 63°—25'— 3''·5
como B>90° b =116°—34'—56''·5

2° log. tang.a'= 10·325 6344
,, cos. B'= 9·186 4322
— ,, r =—10
,, tang.c = 9·494 0666
siendo positiva c= 17°—19'—28''·6

3° log cos a' = 9·630 6135
Comp log cot B'= 10·826 7993
,, cot C = 10·457 4128
siendo posit. C = 19°-13'-45''·2

Verificacion.

cos *a'*=cos *b'* cos *c*
log cos b'= 9·650 7772
,, cos c = 9·979 8364
9·630 6136
a'= 64°—42'—40''
siendo neg. a =115°—17'—20''

Como $a>90°$ debe tenerse $b>90°$ y $c<90°$; ademas $B>90°$ y $C<90°$.

II. Sean $b=56°—37'—40''$
$B=84°—29'—50''$

Se buscan a, c, C.

Las fórmulas que hay que emplear son:

$$\text{sen. } a=\frac{r \text{ sen. } b}{\text{sen. } B}, \quad \text{sen. } c=\frac{r \text{ tang. } b}{\text{tang. } B}, \quad \text{sen. } C=\frac{r \cos. B}{\cos. b}$$

1° log sen b =9·921 7461
Comp log sen B=0·002 0061
log sen a =9·923 7522
a= 57°— 1'—58''
ó *a*=122°—58'— 2''

2° log tang b= 10·181 3235
Comp log tang B= 8·983 7975
log sen c= 9·165 1210
c= 8°-24'-36''
ó bien c=171°-35'-24''

3° log cos B= 8·981 7915
Comp log cos b= 0·259 5774
log sen C= 9·241 3689
C= 10°—2'—22''
ó bien C=169°-57'—38''

Verificacion.

cos *a*=cos *b* cos *c*
log cos *b*= 9·740 4226
,, cos *c*= 9·995 3046
,, cos *a*= 9·735 7272
a= 57°- 1'-58''
ó a=122°-58'- 2''

El problema admite dos resoluciones:

1ª	a= 57°— 1'—58"	A= 90°
	b= 56°—37'—40"	B= 84°—29'—50"
	c= 8°—24'—36"	C= 10°— 2'—22"
2ª	a=122°—58'— 2"	A= 90°
	b= 56 —37'—40	B= 84 —29 —50
	c=171 —35 —24	C=169 —57 —38

Resolucion de los triángulos rectiláteros.

877.—Casos y fórmulas para resolver los triángulos rectiláteros.—Aun cuando la resolucion de un triángulo rectilátero puede reducirse siempre á la de otro rectángulo haciendo uso del triángulo suplementario, pondremos en seguida las fórmulas que hemos demostrado (855) y que conviene aplicar en cada uno de los seis casos que pueden presentarse, limitándonos á esta indicacion en razon de que las observaciones y discusion á que dan lugar son las mismas que hemos hecho con motivo de los triángulos rectángulos.

El lado de 90° lo representaremos por a y el ángulo opuesto por A.

Primer caso.—Conociendo A y B, se calcularán C, b y c por las fórmulas:

$$\cos.C=-\frac{\cos.\ A}{\cos.\ B},\quad \text{sen.}b=\frac{\text{sen.}\ B}{\text{sen.}\ A},\quad \cos.\ c=-\frac{\text{tang.}B}{\text{tang.}A}$$

Segundo caso.—Conociendo B y C, se calcularán A, b y c por las fórmulas:

$$\cos.A=-\cos.B\cos.C,\quad \text{tang.}b=\frac{\text{tang.}B}{\text{sen.}C},\quad \text{tang.}c=\frac{\text{tang.}C}{\text{sen.}B}$$

Tercer caso.—Conociendo A, y b, se calcularán c, B y C por las fórmulas:

$$\text{sen.}B=\text{sen.}A\ \text{sen.}b,\quad \text{tang.}C=-\text{tang.}A\cos.b,\quad \text{tang.}C=-\frac{\cot.b}{\cos.A}$$

Cuarto caso.—Conociendo b y B, se calcularán c, A y C por las fórmulas:

$$\text{sen.}\ A=\frac{\text{sen.}\ B}{\text{sen.}\ b},\quad \text{sen.}\ C=\frac{\text{tang.}B}{\text{tang.}b},\quad \text{sen.}\ c=\frac{\cos.\ b}{\cos.\ B}$$

Quinto caso.—Conociendo B y c, se calcularán b, A y C por las fórmulas:

$$\cos.b=\cos.B\ \text{sen.}c,\quad \text{tang.}A=-\frac{\text{tang.}B}{\cos.\ c},\quad \text{tang.}c=\text{sen.}B\ \text{tang.}c$$

Sexto caso.—Conociendo b y c, se calcularán A, B y C por las fórmulas:

$$\cos.A=-\cot.b\cot.c,\quad \cos.B=\frac{\cos.\ b}{\text{sen.}\ c},\quad \cos.C=\frac{\cos.\ c}{\text{sen.}\ b}$$

Resolucion de los triángulos oblicuángulos.

878.—El problema general que tiene por objeto, dados *tres* de los seis elementos a, b, c, A, B, C de un triángulo esférico, determinar los otros tres, exige que se tenga una relacion entre cuatro de estos elementos, lo cual da origen á seis casos esencialmente distintos; pero como por la consideracion del triángulo suplementario tres de ellos pueden reducirse á los otros tres, en rigor bastaría considerar tres casos. Sin embargo, por claridad y para mayor ejercicio trataremos los seis casos siguientes:

1° Dados tres lados, determinar los ángulos.
2° Dados tres ángulos, determinar los lados.
3° Dados dos lados y el ángulo que forman, determinar los demas elementos.
4° Dados dos ángulos y el lado adyacente, determinar los demas elementos.
5° Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, determinar los demas elementos.
6° Dados dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos, determinar los demas elementos.

879.—Primer caso.—Dados los tres lados, se determinarán los ángulos por medio de las fórmulas (25) que hemos demostrado (857) y son:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. }(p-b)\text{ sen. }(p-c)}{\text{sen. } p \text{ sen. }(p-a)}} \;\ldots\ldots\ldots (25)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\text{sen. }(p-a)\text{ sen. }(p-c)}{\text{sen. } p \text{ sen. }(p-b)}}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\text{sen. }(p-a)\text{ sen. }(p-b)}{\text{sen. } p \text{ sen. }(p-c)}}$$

en las que $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$

Para que el problema sea posible debe tenerse:

$$a+b+c<360^\circ; \qquad a<b+c, \qquad a>b-c.$$

880.—Segundo caso.—Dados los tres ángulos, se determinarán los lados por las fórmulas (33) que hemos demostrado (859) y son:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon \text{ sen. }(A-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen. }(B-\frac{1}{2}\varepsilon)\text{ sen. }(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}} \;\ldots\ldots\ldots (33)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon \text{ sen. }(B-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen. }(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\text{ sen. }(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon \text{ sen. }(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen. }(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\text{ sen. }(B-\frac{1}{2}\varepsilon)}}$$

En las que $\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}(A+B+C)-90^\circ$

Para que el problema sea posible debe tenerse:

$$\varepsilon<360^\circ, \qquad A>\tfrac{1}{2}\varepsilon, \qquad B>\tfrac{1}{2}\varepsilon, \qquad C>\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

881.—Tercer caso.—Conociendo dos lados a, b y el ángulo C que forman, se determinarán A, B y c, de la manera que sigue:

Las fórmulas ó analogías de Neper, (861) dan:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A+B) = \text{cot. } \tfrac{1}{2} C \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(a+b)} \;\ldots\ldots\ldots (39)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A-B) = \text{cot. } \tfrac{1}{2} C \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(a+b)} \;\ldots\ldots\ldots [40]$$

Una vez conocida la mitad de la suma $\frac{1}{2}(A+B)$ por la fórmula (39) y $\frac{1}{2}(A-B)$ por la fórmula (40) el ángulo mayor, que será el que esté opuesto al lado mayor, será igual á la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia, y el ángulo menor será igual á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia. Conocidos los ángulos A y B, el lado c se calcula por la fórmula que se considere mas adecuada de las cuatro siguientes:

$$\text{sen. } c = \frac{\text{sen. C sen. a}}{\text{sen. A}}, \qquad \text{sen. } c = \frac{\text{sen. C sen. b}}{\text{sen. B}}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(a+b) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} c \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(A+B)} \;\ldots\ldots\ldots (41)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(a-b) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} c \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(A+B)} \;\ldots\ldots\ldots (42)$$

Este problema siempre es posible con tal que cada uno de los datos esté comprendido entre 0° y 180°.

882.—Cuarto caso.—Dados dos ángulos A, B y el lado adyacente c, determinar a, b y C.

Las fórmulas de Neper (861) dan:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(a+b) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} c \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(A+B)} \;\ldots\ldots\ldots (41)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(a-b) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} c \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(A+B)} \;\ldots\ldots\ldots (42)$$

Determinadas las tangentes por las fórmulas (41) y (42) se conocerán los arcos, y conciendo la mitad de la suma y de la diferencia de los lados, el mayor, que es el opuesto al ángulo mayor, será igual á la suma de los valores dados por estas fórmulas, y el menor á su diferencia. Una vez conocidos a y b se calculará C por alguna de las siguientes fórmulas:

$$\text{sen. } C = \frac{\text{sen. } c \text{ sen. } A}{\text{sen. } a}, \qquad \text{sen. } C = \frac{\text{sen. } c \text{ sen. } B}{\text{sen. } b}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A+B) = \text{cot. } \tfrac{1}{2} C \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(a+b)} \dots\dots\dots (39)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A-B) = \text{cot. } \tfrac{1}{2} C \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(a+b)} \dots\dots\dots (40)$$

Es posible este problema cuando cada uno de los datos está comprendido entre 0° y 180°.

883.—Quinto caso.—Dados dos lados a, b y el ángulo A opuesto á uno de ellos, determinar B, C y c.

La fórmula $$\frac{\text{sen. } a}{\text{sen. } A} = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B} \dots\dots\dots (2)$$

da $$\text{sen. } B = \frac{\text{sen. } b \text{ sen. } A}{\text{sen. } a} \dots\dots\dots (d)$$

Estando determinado B por un seno, por regla general podremos aceptar dos valores y despues de conocer B, determinaremos C sustituyendo el valor de ese ángulo y los de los datos en una de las fórmulas de Neper (39) ó (40) y despejando á cot. $\frac{1}{2}$ C, se tiene:

$$\text{cot.} \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(A+B) \text{ cos.} \frac{1}{2}(a+b)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(A-B) \text{ sen.} \frac{1}{2}(a+b)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(a-b)} \dots (e)$$

Para determinar á c nos valdremos de la fórmula (41) ó de la (42) de Neper y despejando á tang. $\frac{1}{2}$ c, se tiene:

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(a+b) \text{ cos.} \frac{1}{2}(A+B)}{\text{cos.} \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(a-b) \text{ sen.} \frac{1}{2}(A+B)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(A-B)} \dots (f)$$

Para que el triángulo sea posible es necesario que con los datos del problema se obtenga: 1° sen. B igual ó menor que 1, supuesto que el valor máximo que puede tener el seno de un arco es el radio; 2° si b>a debe tenerse B>A y si b<a debe tenerse B<A, supuesto que el mayor lado tiene que estar opuesto al mayor ángulo; y 3° los valores de cot.$\frac{1}{2}$ C y de tang.$\frac{1}{2}$ c tienen que ser positivos en razon de que debien-

do ser C y c menores que 180°, tanto $\frac{1}{2}$ C como $\frac{1}{2}$ c serán menores que 90°, y de que las cotangentes y las tangentes en el primer cuadrante, son positivas.

Así, pues, cuando con los datos del problema resulte sen. B>1 el triángulo es imposible. Cuando sen. B=1, será B=90° y el triángulo será rectángulo en B. Cuando resulte sen. B<1, como el mismo seno corresponde á dos ángulos suplementarios, podremos tomar para B el valor que se encuentre en las tablas ó su suplemento, y para saber si podemos aceptar uno solo de estos dos valores de B, los dos, ó ninguno de ellos, bastará examinar si solo uno de esos valores, si los dos, ó ninguno de ellos satisfacen á la condicion de que si b<a, resulte B<A; y que si b>a, resulte B>A. Así pues, la comparacion de los valores de B con los de los datos a, b y A nos hará conocer si es posible el problema, y en caso de serlo si admite una sola ó dos resoluciones.

884.—Sexto caso.—Dados dos ángulos A, B y el lado a, opuesto á uno de ellos, determinar C, c y b.

De la fórmula (2) se deduce:

$$\text{sen. } b = \frac{\text{sen. } B \text{ sen. } a}{\text{sen. } A} \dots\dots\dots [g]$$

Estando determinado b por un seno, por regla general podremos aceptar dos valores, y una vez conocido el lado b se determinará c y C por las fórmulas:

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(a+b) \text{ cos.} \frac{1}{2}(A+B)}{\text{cos.} \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(a-b) \text{ sen.} \frac{1}{2}(A+B)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(A-B)} \dots (f)$$

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(A+B) \text{ cos.} \frac{1}{2}(a+b)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(A-B) \text{ sen.} \frac{1}{2}(a+b)}{\text{sen.} \frac{1}{2}(a-b)} \dots (e)$$

Para que el triángulo sea posible se necesita que sen. b<1 ó =1, que si B>A resulte b>a, ó recíprocamente que si B<A resulte b<a y que tanto tang. $\frac{1}{2}$ c, como cot. $\frac{1}{2}$ C sean positivas. La comparacion de los valores de los resultados con estas condiciones hará conocer, lo mismo que en el quinto caso, si es posible el problema y si admite una ó dos soluciones.

885.—Discusion del quinto caso.—De lo que precede resulta que los dos últimos casos son los únicos que pueden tener dos resoluciones; pero que no siempre las admiten, y aun cuando las fórmulas que se refieren á estos casos son bastantes para dar á conocer los elementos desconocidos del triángulo, y por la comparacion de los valores de los resultados con los de los datos siempre puede determinarse las soluciones que admite el problema, nos parece conveniente ocuparnos de su discusion; limitándola al quinto caso, porque siendo muy semejante al sexto, todo lo que digamos del uno puede aplicarse al otro con modificaciones que fácilmente hará el lector, con una poca de reflexion.

En el quinto caso hemos visto (883) que conocidos los elementos a, b y A se determinan B, C y c por las fórmulas (d), (e) y (f).

Si b=a la fórmula

$$\text{sen. B}=\frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. a}}\ldots\ldots\ldots(d)$$

da $\qquad$ B=A

y sustituyendo estos valores en las fórmulas (e) y (f) se trasforman en

$$\cot.\tfrac{1}{2}\,C=\text{tang. A cos. a} \qquad \text{tang.}\tfrac{1}{2}\,c=\text{tang.a cos. A}$$

Se ve pues, que cuando $b=a$ no hay mas que *un solo triángulo*, que resuelve la cuestion; mas para que sea posible es necesario que tanto cot. $\frac{1}{2}$ C, como tang. $\frac{1}{2}$ c sean positivas, á causa de que $\frac{1}{2}$ C y $\frac{1}{2}$ c son menores que 90°, lo cual á su vez exige que tang. A y que cos. a, así como tang. a y cos. A tengan el mismo signo, esto es, que a y el ángulo opuesto A sean á la vez mayores ó menores que 90°.

Pasemos á ocuparnos del caso general:

Ya hemos dicho que para que la cuestion sea posible

$$\text{sen. B}=\frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen.a}}$$

debe ser igual ó menor que 1; y que si b<a debe tenerse B<A, y que si b>a debe tenerse B>A.

Ahora bien, como el ángulo B está dado por su seno y sabemos que el mismo seno corresponde á dos ángulos suplementarios, por regla general habrá dos valores de B que satisfacen la ecuacion

$$\text{sen. B}=\frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. a}}$$

uno, dado por las tablas, *menor* que 90° que llamaremos n, y otro N=180°—n mayor que 90°; pero teniendo presente que en todo trián-

gulo al mayor lado está opuesto el mayor ángulo, esto es, sabiendo que cuando $b>a$ los valores de B han de ser forzosamente mayores que el ángulo conocido A, y que cuando $b<a$ los valores de B han de ser menores que A: comparando los valores n y N con los de los datos, se podrá decidir fácilmente si pueden aceptarse los dos valores, uno solo, ó ninguno de ellos, y por tanto si el problema admite dos soluciones, una sola ó ninguna.

Suponiendo que los elementos conocidos del triángulo sean A, b y a, con el objeto de ordenar nuestra discusion consideraremos que cada uno de estos datos sea sucesivamente *menor, igual y mayor* que 90° y determinarémos en cada combinacion si pueden tenerse dos soluciones, una ó ninguna.

1° Sea $\qquad$ A<90 y b<90°

y supongamos sucesivamente que a sea menor, igual y mayor que b.

Si a<b debe tenerse precisamente B>A.

La fórmula $\quad \text{sen. B}=\dfrac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. a}}$ por ser el factor $\dfrac{\text{sen. b}}{\text{sen. a}}>1$

da á conocer B, ó su valor de las tablas

n>A y con mayor razon será el ángulo obtuso
N>A, por consiguiente habrá *dos soluciones.*

Si a=b debe tenerse B=A.

En este caso debiendo ser los dos valores de B menores 90°, supuesto que A es agudo, no podrá aceptarse el ángulo obtuso N, y por tanto el problema no tendrá mas de *una solucion.*

Si a>b debe tenerse B<A.

Podrá suceder que

$$a+b<180°,\ \text{que}\ a+b=180°\ \text{ó que a+b>180°}.$$

En el 1$^{\text{er.}}$ caso, b<180°—a y recordando que b es agudo, será sen.b<sen. a, y la fórmula

$$\text{sen. B}=\frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. a}} \text{ por ser } \frac{\text{sen. b}}{\text{sen. a}}<1$$

dará n<A valor aceptable, por ser compatible con la condicion B<A.

En cuanto á N siendo obtuso seria mayor que A y por tanto inadmisible. El problema solo tiene *una resolucion*.

En el 2° caso cuando $b=180°—a$ será sen. b=sen. a y la fórmula

$$\text{sen. } B=\frac{\text{sen. } b \text{ sen. } A}{\text{sen. } a} \quad \text{por ser} \quad \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } a}=1$$

dará $n=A$, cuyo valor es inadmisible, supuesto que al ser $a>b$, debe tenerse $B<A$.

El valor N con mayor razon será inadmisible, y por tanto el problema no admite *ninguna resolucion*.

En el 3^er caso cuando $b>180°—a$, será sen. $b>$sen. a y la fórmula

$$\text{sen. } B=\frac{\text{sen. } b \text{ sen. } A}{\text{sen. } a} \quad \text{por ser} \quad \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } a}>1$$

dará $n>A$ valor inadmisible á causa de la condicion de que $B<A$ y siendo $N>n$ con más razon será inadmisible N, por lo cual el problema no admitirá *ninguna resolucion*.

En resúmen:

$$A<90°,\quad b<90° \begin{cases} a<b \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{dos soluciones.} \\ a=b \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{una} \;,, \\ a>b \begin{cases} a+b<180° \ldots\ldots & \text{una} \;,, \\ a+b=180° \ldots\ldots & \text{ninguna} \;,, \\ a+b>180° \ldots\ldots & \text{ninguna} \;,, \end{cases} \end{cases}$$

2° Siendo siempre $A<90°$ sea $b=90°$

y supongamos sucesivamente que a sea menor, igual y mayor que b.
Si $a<b$ debe tenerse $B>A$.

Por ser sen.b=1 y sen.a menor que 1, tendremos $\frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } a}>1$

y la fórmula $\text{sen.}B=\frac{\text{sen. } b \text{ sen. } A}{\text{sen. } a}$ dará para B por el valor de las tablas

$n>A$, resultado compatible con la condicion $B>A$, y con más razon lo será el de N. El problema admite pues, *dos soluciones*.

Si $a=b$, debe tenerse $B=A$.

Como $A<90°$, debia ser B agudo lo cual es inadmisible en razon de que siendo los lados a y b de 90° los planos que los contienen serán perpendiculares al tercer lado c y por tanto los ángulos A y B tendrian que ser rectos. El problema no admite *ninguna resolucion*.

Si $a>b$, debe tenerse $B<A$

$$\text{La fórmula sen } B=\frac{\text{sen } b \text{ sen } A}{\text{sen } a}$$

$$\text{por ser} \frac{\text{sen } b}{\text{sen } a}=\frac{1}{1—x}>1 \text{ daria}$$

$n>A$ y con más razon $N>A$, resultados que son incompatibles con la condicion que $B<A$; por lo cual el problema no admite *ninguna resolucion*.

3° Sea $A<90°$ y $b>90°$

y supongamos sucesivamente que a sea menor, igual y mayor que b.
Si $a<b$, debe tenerse $B>A$.
Podrá suceder que

$a+b<180°$, que $a+b=180°$, ó que $a+b>180°$

En el 1^er caso; siendo b obtuso tendrá que ser a agudo y como $b<180°—a$ será sen $b>$sen a. Entónces la fórmula

$$\text{sen } B=\frac{\text{sen } b \text{ sen } A}{\text{sen } a} \text{ por ser el factor } \frac{\text{sen } b}{\text{sen } a}>1 \text{ da}$$

$n>A$ y con más razon $N>A$, resultados ambos compatibles con la condicion de que $B>A$; por lo cual el problema admite *dos soluciones*.

En el 2° caso, siendo $a+b=180°$, se tiene que $b=180°—a$, ó sen b=sen a.

$$\text{La fórmula sen } B=\frac{\text{sen } b \text{ sen } A}{\text{sen } a} \text{ da}$$

$n=A$ resultado inadmisible, porque debe obtenerse $B>A$. $N>A$ será admisible, y el problema admitirá *una solucion*.

En el 3er caso, siendo $a+b>180°$, ó $b>180°-a$. En razon de ser b obtuso se tendrá $\text{sen}\ b<\text{sen}\ a$, y la fórmula

$$\text{sen}\ B=\frac{\text{sen}\ b\ \text{sen}\ A}{\text{sen}\ a},\ \text{dará}$$

$n<A$ resultado incompatible con la condicion $B>A$; pero como puede aceptarse el de $N>A$, el problema admitirá *una solucion.*

Si $a=b$ debe tenerse $B=A$.

Con estas condiciones hemos demostrado al principio de esta discusion que para que el triángulo sea posible es indispensable que los lados y los ángulos opuestos sean de la misma especie y como $b>90°$ *el ángulo* B *deberá ser obtuso.* Por otra parte siendo $A<90°$ y $B=A$, *debe ser el ángulo* B *agudo.* Estos valores de B contradictorios nos prueban que el problema no admite *ninguna solucion.*

Si $a>b$ debe tenerse $B<A$.

Como a y b serán obtusos, tendrémos $\text{sen}\ b>\text{sen}\ a$ y la fórmula.

$$\text{sen}\ B=\frac{\text{sen}\ b\ \text{sen}\ A}{\text{sen}\ a}\ \text{daria}$$

$n>A$ y con más razon $N>A$; resultados incompatibles con la condicion $B<A$; por lo cual el problema no admite *ninguna solucion.*

Las hipótesis relativas cuando $A=90°$ y cuando $A>90°$ se discuten de una manera semejante y los resultados de esas discusiones vamos á consignarlos en la siguiente tabla.

886.—**Tabla de la discusion del quinto caso.**

				Soluciones.
$A<90°$	$b<90°$	$a<b$		dos
		$a=b$		una
		$a>b$	$a+b<180°$	una
			$a+b=180°$	ninguna
			$a+b>180°$	ninguna
	$b=90°$	$a<b$		dos
		$a=b$		ninguna
		$a>b$		ninguna
	$b>90°$	$a<b$	$a+b<180°$	dos
			$a+b=180°$	una
			$a+b>180°$	una
		$a=b$		ninguna
		$a>b$		ninguna
$A=90°$	$b<90°$	$a=$ ó $<b$		ninguna
		$a>b$	y $a+b<180°$	una
		$a>b$	y $a+b=$ ó $>180°$	ninguna
	$b=90°$	$a=b$		una infinidad
		$a<$ ó $>b$		ninguna
	$b>90°$	$a<b$	y $a+b=$ ó $<180°$	ninguna
		$a<b$	y $a+b>180°$	una
		$a=$ ó $>b$		ninguna

SOLUCIONES.

$A>90^\circ$	$b<90^\circ$	$a=b$ ó $<b$	ninguna
		$a>b$ y $a+b=$ ó $<180^\circ$	una
		$a>b$ y $a+b>180^\circ$	dos
	$b=90^\circ$	$a=$ ó $<b$	ninguna
		$a>b$	dos
	$b>90^\circ$	$a<b$ y $a+b=$ ó $<180^\circ$	ninguna
		$a<b$ y $a+b>180^\circ$	una
		$a=b$	una
		$a>b$	dos

887. De todos los casos consignados en la tabla anterior merece una particular atencion el único susceptible de una *infinidad* de soluciones y es cuando $A=90^\circ$, $b=90^\circ$ y $a=b$

Siendo $a=b$ deberá tenerse $B=A$ y como $A=90^\circ$ tambien será $B=90^\circ$ y el triángulo será birectángulo y birectilátero.

Sustituyendo en las fórmulas (e) y (f) párrafo 883

$$\cot. \tfrac{1}{2} C=\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B) \operatorname{sen.} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen.} \frac{1}{2}(a-b)}$$

(Fig. 399.)

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c=\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b) \operatorname{sen.} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}$$

los valores $A=B=a=b=90^\circ$ resulta:

$$\cot \tfrac{1}{2} C=\frac{0}{0}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c=\frac{0}{0}$$

Estas expresiones, que son el signo de la indeterminacion, indican que C y c pueden tener una infinidad de valores. En efecto, es fácil ver en la figura adjunta que siendo $A=B=90^\circ$ y los arcos $a=b=90^\circ$ satisfacen el problema los triángulos A B C, A C P, A C D, B C P, P C D y otra infinidad.

888.—Resúmen de la Discusion.—Los resultados anteriores quedan compendiados en las siguientes reglas:

1ª *Hay una infinidad de soluciones, cuando* $a=b=A=90^\circ$

2ª *Hay dos triángulos que resuelven el problema, cuando a y A son á la vez mayores ó menores que 90°.*

3ª *Hay una solucion cuando a está comprendido entre b y 180°—b. Tambien, cuando a es igual á uno de estos valores; pero si además* $b=90^\circ$, *ó* $A=b>90^\circ$ *no habrá ninguna solucion. Tampoco la habrá en los demás casos, y cuando* $A<90^\circ$, $b<90^\circ$ *y* $a=180^\circ-b$; *y si* $A<90^\circ$, $b>90^\circ$ *y* $a=b$.

889.—Aplicaciones.—I. Conociendo los tres lados a, b y c determinar los tres ángulos.

$$\text{Datos}\begin{cases} a=131^\circ-47'-20'' \\ b=103-18-40 \\ c=\ 49-32-20 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2p&=284-38-20 \\ p&=142-19-10 \\ p-a&=\ 10-31-50 \\ p-b&=\ 39-\ 0-30 \\ p-c&=\ 92-46-50 \end{aligned}$$

Cálculo del ángulo A

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b) \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}}$$

log sen $(p-b)$	$=\bar{1}'798\ 9498$	
log sen $(p-c)$	$=\bar{1}'999\ 4884$	$\bar{1}'798\ 4382$
log sen p	$=\bar{1}'786\ 2249$	
log sen $(p-a)$	$=\bar{1}'261\ 8808$	$\bar{1}'048\ 1057$
log tang² $\frac{1}{2}$ A		$0'750\ 3325$
log tang $\frac{1}{2}$ A		$0'375\ 1663$

$\frac{1}{2}A=67^\circ-8'-34''33$

$A=134-17-\ 8'66$

Cálculo del ángulo B.

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-b)}}$$

$$\begin{array}{lll}
\log\operatorname{sen}(p-a) & =\bar{1}'261\ 8808 & \\
\log\operatorname{sen}(p-c) & =\bar{1}'999\ 4884 & \bar{1}'261\ 3692 \\
\log\operatorname{sen}p & =\bar{1}'786\ 2249 & \\
\log\operatorname{sen}(p-b) & =\bar{1}'798\ 9498 & \bar{1}'585\ 1747 \\
 & & \bar{1}'676\ 1945 \\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B & & \bar{1}'838\ 0973 \\
\tfrac{1}{2}B & =34^\circ-33'-33''{}'57 & \\
B & =69-7-7'14 &
\end{array}$$

Cálculo del ángulo C.

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-c)}}$$

$$\begin{array}{lll}
\log\operatorname{sen}(p-a) & =\bar{1}'261\ 8808 & \\
\log\operatorname{sen}(p-b) & =\bar{1}'798\ 9498 & \bar{1}'060\ 8306 \\
\log\operatorname{sen}p & =\bar{1}'786\ 2249 & \\
\log\operatorname{sen}(p-c) & =\bar{1}'999\ 4884 & \bar{1}'785\ 7133 \\
 & & \bar{1}'275\ 1173 \\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C & & \bar{1}'637\ 5587 \\
\tfrac{1}{2}C & =23^\circ-27'-51'' & \\
C & =46-55-42 &
\end{array}$$

Comprobacion por el cálculo del exceso esférico.

La fórmula correspondiente para determinar el exceso esférico en funcion de los tres lados es

$$\operatorname{tang.}\tfrac{1}{4}\varepsilon=\sqrt{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}p\ \tan\tfrac{1}{2}(p-a)\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(p-b)\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(p-c)}\ldots(45)$$

$$\begin{array}{ll}
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}p & =0'466\ 9751 \\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(p-a) & =\bar{2}'964\ 5236 \\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(p-b) & =\bar{1}'549\ 2490 \\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(p-c) & =0'021\ 0845 \\
 & \ \ \bar{1}'001\ 8322 \\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\varepsilon & =\bar{1}'500\ 9161 \\
\tfrac{1}{4}\varepsilon & =17^\circ-34'-49''{}'43 \\
\varepsilon & =70^\circ-19'-57''{}'72
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
 & A=134^\circ-17'-8''66 \\
 & B=\ 69-7-7'14 \\
 & C=\ 46-55-42'00 \\
 & 250-19-57'80 \\
 & -180^\circ \\
\text{Exceso} & 70-19-57'80 \\
\varepsilon & 70-19-57.72 \\
\text{Error} & 0^\circ-0'-0''08
\end{array}$$

II.—Dados dos lados a, b y el ángulo C que forman determinar A, B y c.

$$\text{Datos}\begin{cases} a=50^\circ-10'-30'' \\ b=76-35-36 \\ C=34-15-2'76 \end{cases}\qquad
\begin{array}{l}
\tfrac{1}{2}(a+b)=63^\circ-23'-3'' \\
\tfrac{1}{2}(a-b)=13-12-33 \\
\tfrac{1}{2}C\quad=17-7-31.38
\end{array}$$

Cálculo de los ángulos A y B

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B)=\cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos\tfrac{1}{2}(a+b)}$$

$$\begin{array}{ll}
\log\cot\tfrac{1}{2}C & =0'511\ 2728 \\
\log\cos\tfrac{1}{2}(a-b) & =\bar{1}'988\ 3548 \\
 & \ \ 0'499\ 6276 \\
\log\cos\tfrac{1}{2}(a+b) & =\bar{1}'651\ 2840 \\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B) & =0'848\ 3436 \\
\tfrac{1}{2}(A+B) & =81^\circ-55'-46''.66
\end{array}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B)=\cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a+b)}$$

$$\begin{array}{ll}
\log\cot\tfrac{1}{2}C & =0'511\ 2728 \\
\log\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a-b) & =\bar{1}'358\ 8988 \\
 & \ \ \bar{1}'870\ 1716 \\
\log\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a+b) & =\bar{1}'951\ 3523 \\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B) & =\bar{1}'918\ 8193 \\
\tfrac{1}{2}(A-B) & =39^\circ-40'-33'.22
\end{array}$$

$$A=\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(A-B)=\ 42^\circ-15'-13''.44$$
$$B=\tfrac{1}{2}(A+B)+\tfrac{1}{2}(A-B)=121-36-19.88$$

El ángulo *c* se calcula por las fórmulas

$\operatorname{sen} c=\dfrac{\operatorname{sen} C \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A}$	$\operatorname{sen} c=\dfrac{\operatorname{sen} C \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}$
log sen C = $\bar{1}$'750 3664	log sen C = $\bar{1}$'750 3664
log sen a = $\bar{1}$'885 3636	log sen b = $\bar{1}$'988 0008
$\bar{1}$'635 7300	$\bar{1}$'738 3672
log sen A = $\bar{1}$'827 6374	log sen B = $\bar{1}$'930 2747
log sen c = $\bar{1}$'808 0926	log sen c = $\bar{1}$'808 0925
c = 40°—0'—10"	c = 40°—0'—10"

Comprobacion por el cálculo del exceso esférico.

La fórmula correspondiente es:

$$\cot \tfrac{1}{2}\varepsilon=\frac{\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b+\cos C}{\operatorname{sen} C} \dots\dots (43)$$

que puede trasformarse en

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varepsilon=\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a \operatorname{tang} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} C}{1+\operatorname{tang} \frac{1}{2} a \operatorname{tang} \frac{1}{2} b \cos C}$$

log tang ½ b...... $\bar{1}$'897 4390	log tang ½ b.... $\bar{1}$'897 4390
log tang ½ a...... $\bar{1}$'670 4019	log tang ½ a.... $\bar{1}$'670 4019
log sen C........... $\bar{1}$'750 3664	log cos C......... $\bar{1}$'917 2861
log numerador...... $\bar{1}$'318 2073	log 0'305 582..... $\bar{1}$'485 1270
log denominador.... 0'115 8042	1'305 582 = denominador
log tang ½ ε ...... $\bar{1}$'202 4031	
½ ε = 9°—3'—18"·03	A = 42°—15'—13"44
ε = 18 —6 —36 '06	B = 121 —36 —19'88
	C = 34 —15 — 2'76
	198 — 6 —36'08
	—180
	Exceso 18 — 6 —36'08
	ε 18 — 6 —36'06
	Error 0 — 0 — 0'02

III.—Dado un lado *a* y los ángulos adyacentes B y C, calcular los demas elementos.

Datos	a = 113°—2'—56."6	½ (B+C) = 72°—33'—55·"4
	B = 75 —0 —51. 6	½ (B—C) = 2 —26 —56· 2
	C = 70 —6 —59. 2	½ a = 56 —31 —28· 3

Cálculos de los lados *b* y *c*.

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(b+c)=\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a \, \frac{\cos \frac{1}{2}(B-C)}{\cos \frac{1}{2}(B+C)}$$

log tang ½ a................ 0'179 6211
log cos ½ (B—C)........... 9'999 6031
10'179 2242
log cos ½ (B+C).......... 9·476 5667
log tang ½ (b+c)............ 0'702 6575
½ (b+c) = 78°—46'— 59"73

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(b-c)=\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a \, \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(B-C)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(B+C)}$$

log tang ½ a............... 0'179 6211
log sen ½ (B—C)........... 8'630 7243
8'810 3454
log sen ½ (B+C)........... 9'979 5755
log tang ½ (b—c)............ 8'830 7699
½ (b—c) = 3°—52'—28."66
b = ½ (b+c) + ½ (b—c) = 82°—39'—28."39
c = ½ (b+c) — ½ (b—c) = 74 —54 —31. 07

El ángulo A se calculará por la fórmula

$$\operatorname{sen} A=\frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$$

log sen a................9'963 8681
log sen C................9'973 3061
9'937 1742
log sen c................9'984 7576
log sen A................9'952 4166

$A=116^\circ-20'-2.''11$. Como $a>b$, debe ser $A>B$ y se toma el ángulo obtuso.

Comprobacion del cálculo por el del exceso esférico. La fórmula correspondiente es:

$$\text{sen } \tfrac{1}{2}\, \varepsilon=\frac{\text{sen } \frac{1}{2}\, a \text{ sen } \frac{1}{2}\, b \text{ sen } C}{\cos \frac{1}{2}\, c}$$

$\frac{1}{2}\,a=56^\circ-31'-28.''3$	$\log \text{sen } \frac{1}{2}\,a=9{,}921\ 2296$	$A=116^\circ-20'-2.''1$
$\frac{1}{2}\,b=41-19-44.2$	$\log \text{sen } \frac{1}{2}\,b=9{,}819\ 7946$	$B=75-0-51.6$
$C=70-6-59.2$	$\log \text{sen } C=9{,}973\ 3061$	$C=70-6-59.2$
	$9{,}714\ 3303$	$261-27-52.9$
$\frac{1}{2}\,c=37-27-15.54$	$\log \cos \frac{1}{2}\,c=9{,}899\ 7321$	-180
	$\log \text{sen } \frac{1}{2}\,\varepsilon=9{,}814\ 5982$	$81-27-52.9$
	$\frac{1}{2}\,\varepsilon=40^\circ-43'-56.''51$	$\varepsilon=81-27-53{,}02$
	$\varepsilon=81-27-53.02$	Error $0-0-0{,}12$

Superficie de un triángulo esférico.

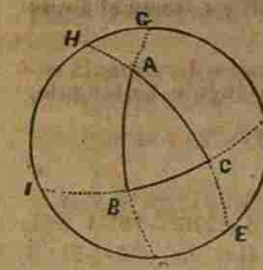
890.—FÓRMULA PARA CALCULAR LA SUPERFICIE DE UN TRIÁNGULO ESFÉRICO.—Imaginémonos una esfera dividida por el círculo máximo H D E G en dos hemisferios, uno superior A H D E G, y otro inferior A' H D E G y que dos círculos máximos A D A' G y A E A' H se cortan en los puntos A y A' (fig. 400.)

(Fig. 400.)

Vamos á demostrar que *la suma de la superficie de los triángulos* A D E *y* A H G *formados en el hemisferio superior por los semicírculos* H A E *y* D A G *es equivalente á la del huso* A D A' E A.

El triángulo H A G es igual al D A' E por tener un ángulo igual formado por lados respectivamente iguales. El ángulo A=A' porque ambos están formados por los mismos planos. El lado A H=A' E porque uno y otro son suplementos de A E, y A G=A' D por suplementos de A D. Por tanto si al triángulo A D E agregamos los triangulos iguales A H G y A' D E, resulta:

sup. A D E+sup. A H G=sup. huso A D A' E A



(Fig. 401.)

Para determinar la expresion de la superficie de un triángulo esférico, consideraremos en la figura 401 el triángulo A B C. Si prolongamos sus lados hasta el círculo máximo D E F G H I que limita un hemisferio, y expresamos la equivalencia que hay entre la superficie de los triángulos y la de los husos formados en los tres ángulos del triángulo tendremos:

A D E+H A G=huso cuyo áng. es A
B F G+B D I=huso cuyo áng. es B
C H I+C E F=huso cuyo áng. es C

sumando ordenadamente estas ecuaciones vemos que la suma de los primeros miembros dan la superficie del hemisferio más dos veces la superficie del triángulo A B C que llamaremos *s*. En consecuencia tendrémos.

$$\tfrac{1}{2} \text{ sup esfera}+2\, s=\text{huso } A+\text{huso } B+\text{huso } C \ldots\ldots\ldots (1)$$

Considerando que el huso es una parte de la superficie de la esfera cuyo valor depende del número de grados del ángulo del huso, su superficie puede determinarse por la proporcion:

$$360^\circ : A^\circ :: 4\, \pi\, r^2 : \text{sup. huso } A=\frac{4\, \pi\, r^2\, A}{360}$$

sustituyendo los valores respectivos en la ecuacion (1) resulta:

$$\tfrac{1}{2}\, 4\, \pi\, r^2+2s=\frac{4\, \pi\, r^2\, A}{360}+\frac{4\, \pi\, r^2\, B}{360}+\frac{4\, \pi\, r^2\, C}{360}$$

$$2\, s=\frac{4\, \pi\, r^2}{360}(A+B+C)-2\, \pi\, r^2$$

$$s=\frac{2\pi\, r^2}{360}(A+B+C)-\pi\, r^2=\pi\, r^2\left(\frac{A+B+C}{180}-1\right)$$

y por último $$s=\pi\, r^2\left(\frac{A+B+C-180^\circ}{180}\right)$$

Ahora como el exceso esférico $\varepsilon=A+B+C-180^\circ$ tendremos:

$$s=\pi\, r^2\times\frac{\varepsilon}{180} \ldots\ldots\ldots\ldots [47].$$

que es la fórmula que generalmente se usa para calcular la superficie de un triángulo esférico.

891.—Casos particulares.—1° Cuando el triángulo rectángulo, A=90° y la fórmula [47] se convierte en

$$s=\pi r^2\left(\frac{B+C-90°}{180}\right)$$

2° Cuando el triángulo es equiángulo

$$\varepsilon=A+B+C-180=3\ A-180$$

y la fórmula (47) tomará la forma

$$s=\pi\ r^2\left(\frac{3\ A-180}{180}\right)$$

En este caso

si $A=90°,\ s=\pi\ r^2\left(\frac{270-180}{180}\right)=\frac{1}{2}\ \pi\ r^2=\frac{1}{8}$ sup. de la esfera.

Si $A=120°,\ s=\pi\ r^2\left(\frac{360-180}{180}\right)=\pi\ r^2=$sup. de un círculo máximo$=\frac{1}{4}$ sup. de la esfera.

3° Si se busca la superficie del triángulo polar de A B C

En la fórmula

$$s=\pi\ r^2\left(\frac{A+B+C-180}{180}\right)$$

sustituyendo los valores $A=180-a',\quad B=180-b',\quad C=180-c'$

se tendrá $s=\pi\ r^2\left(\frac{360-(a'+b'+c')}{180}\right)$

haciendo: $a'+b'+c'=2p'$

resulta: $s=\pi\ r^2\left(\frac{360-2p'}{180}\right)$

Cuando $a'=b'=c'=90°\quad s=\pi\ r^2\left(\frac{360-270}{180}\right)=\frac{1}{8}$ sup. de la esfera

892.—Aplicaciones.—I. Calcular la superficie de un triángulo esférico conocidos sus tres lados.

a=131°—47'—20"
b=103 —18 —40
c= 49 —32 —20 El radio=1

Hemos visto § 889 aplicacion I que con estos datos

$$\varepsilon=70°-19'-57''\ '72$$

sustituyendo en la fórmula (47) se tiene:

$$s=3'141\ 593\ \frac{70°-19'-57''\ '72}{180}$$

haciendo la division $\frac{70°-19'-57''\ '72}{180}=0'390\ 73707$

y por tanto

$$s=3'141\ 593\times0'390\ 73707=1\overset{\text{m. cd.}}{'227}\ 5166$$

II. Calcular la superficie de un triángulo esférico, conociendo sus tres ángulos: A=140°, B=92° y C=68° y sabiendo que el diámetro de la esfera es de 30 piés

En este caso $\varepsilon=140°+92+68-180=120°$

y la fórmula (47) se convierte en

$$s=3'141\ 593\times15^2\times\frac{2}{3}=471\overset{\text{piés cd.}}{'23895}.$$

III. Calcular la superficie de un triángulo equiángulo, siendo el radio de la esfera de 10 metros y cada ángulo de 120°

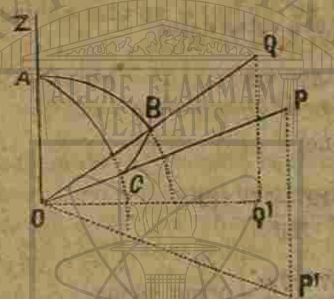
$$\varepsilon=A+B+C-180°=180°$$

y la fórmula $s=\pi\ r^2\frac{\varepsilon}{180}=3'141\ 593\times100$

da s=314'1593 metros cuadrados.

Aplicaciones de la trigonometría esférica.

893.—Reducir un ángulo al horizonte.—Conociendo el ángulo P O Q (fig. 402) de dos rectas O P y O Q, que no están en un plano horizontal, y el ángulo que cada una de ellas forma con la vertical O Z, se trata de encontrar el ángulo P' O Q' formado por las respectivas proyecciones de esas rectas sobre el plano horizontal.



(Fig. 402)

Las rectas O P, O Q y O Z forman un ángulo triedro cuyas tres caras P O Q, P O Z y Q O Z se conocen. El ángulo P' O Q' está formado por las rectas O P' y O Q' perpendiculares ambas á la recta O Z en razon de que esta es perpendicular al plano horizontal P' O Q'. En consecuencia el ángulo que se busca es la medida del ángulo diedro opuesto á la cara P O Q. Si suponemos una esfera cuyo centro es O y cuyo radio sea la unidad, esta esfera cortada por el triedro en O determinará el triángulo esférico A B C cuyos lados B C, A C y A B, son respectivamente la medida de los ángulos conocidos P O Q, P O Z y QOZ y el ángulo A, que tiene por medida P'O Q', es el que se busca.

El problema está reducido pues á determinar el valor de un ángulo de un triángulo esférico en el que se conocen los tres lados, lo cual se obtiene aplicando la fórmula (25)

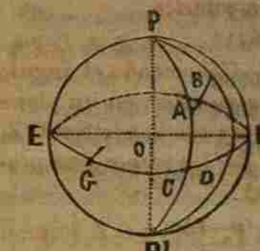
$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. }(p-b)\text{ sen. }(p-c)}{\text{sen. } p \text{ sen. }(p-a)}}$$

en la que $$p = \tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

894.—*Conocidas las coordenadas geográficas de dos puntos, determinar la distancia que los separa.*

Sea (fig. 403) P P' el eje del mundo que pasa por sus polos, E E' el ecuador, G el orígen de las longitudes, A y B los puntos cuyas coordenadas se conocen, y son:

B D=latitud de B=l
G D=longitud de B=L
A C=latitud de A=l'
G C=longitud de A=L'



(Fig. 403)

En el triángulo esférico P B A se conocen P B=90°—l, P A=90°—l' y el ángulo B P A cuya medida es el arco C D=L—L'. Así pues el problema se reduce á determinar el lado A B conociendo dos lados y el ángulo que forman. (881) Una vez obtenido el lado A B en grados y fracciones de grado se determinará su longitud l en metros ó en otra unidad lineal por medio de la fórmula

$$l = \frac{\pi r}{180} . \text{ A B}$$

en la que r es la longitud del radio de la tierra. Como πr representa la magnitud de la semicircunferencia de un circulo máximo y sabemos que todo el meridiano tiene 40.000,000 de metros, πr=20000 kilómetros, y sustituyendo en la fórmula anterior se tiene:

$$l^{km} = \frac{1000}{9} . \text{ A B}$$

Sea como aplicacion determinar la distancia de México á Tehuantepec, cuyas coordenadas son con poca diferencia

$$\text{México} \begin{cases} \text{lat.} = 19°—26'—00'' \\ \text{long.} = 99°— \ 6'—45'' \end{cases} \quad \text{Tehuantepec} \begin{cases} \text{lat.} = 16°—21'—16'' \\ \text{long.} = 95°—19'—44'' \end{cases}$$

Los datos del triángulo que tenemos que resolver son:

b=90°—(19°—26'—00")=70°—34'— 0"
a=90°—(16°—20'—16")=73°—39'—44"
C=3°—47'—1" diferencia de las longitudes.

Las fórmulas para determinar A y B son:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A+B) = \text{cot. } \tfrac{1}{2} C \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(a+b)}$$

a= 73°—39'—44"	
b= 70°—34'— 0"	
a+b=144°—13'—44"	½ (a+b)=72°— 6'—52"
a—b= 3°— 5'—44"	½ (a—b)= 1°—32'—52"
C= 3°—47'— 1"	½ C = 1°—53'—30'5

log. cot. $\frac{1}{2}$ C........	1'481 0883
log. cos. $\frac{1}{2}$ (a—b)....	9'999 8415
	11'480 9298
log. cos. $\frac{1}{2}$ (a+b)....	9'487 3034
log. tang. $\frac{1}{2}$ (A+B)..	1'993 6264
$\frac{1}{2}$ (A+B)..	89°—25'—6'' ·92

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A-B)=\text{cot. } \tfrac{1}{2}C \, \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(a+b)}$$

log. cot. $\frac{1}{2}$ C........	1'481 0883
log. sen. $\frac{1}{2}$ (a—b)....	8'431 5330
	9'912 6213
log. sen. $\frac{1}{2}$ (a+b)....	9'978 4873
log. tang. $\frac{1}{2}$ (A—B)...	9'934 1340
$\frac{1}{2}$ (A—B)...	40°—40'—18'' ·35

$$A=\tfrac{1}{2}(A+B)+\tfrac{1}{2}(A-B)=130^\circ-5'-25''\cdot 27$$
$$B=\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(A-B)=48^\circ-44'-48''\cdot 57$$

Para calcular el valor de c haremos uso de las fórmulas:

$$\text{sen. } c=\frac{\text{sen. C sen. a}}{\text{sen. A}}$$

log. sen. C........	8'819 4682
log. sen. a	9'982 0993
	18'801 5675
log. sen. A........	9'883 6784
log. sen. c.........	8'917 8891

$c=4°—44'—52''·73$

$$\text{sen. } c=\frac{\text{sen. C sen. b}}{\text{sen. B}}$$

log. sen. C........	8'819 4682
log. sen. b.........	9'974 5252
	18'793 9934
log. sen. B........	9'876 1043
log. sen. c.........	8'917 8891

$c=4°—44'—52''·73$

Una vez conocido el lado c en grados, podemos determinar su magnitud en kilómetros por medio de la fórmula:

$$l=\frac{1000}{9}\times c$$

sustituyendo: $$l=\frac{1000\times 4'74798}{9}=527'775 \text{ km.}$$

895.—*Conociendo las coordenadas de tres puntos situados en la superficie de la esfera, calcular la superficie del triángulo que tiene por vértice esos tres puntos.*

Conforme á lo explicado en el párrafo anterior se determinará en grados la magnitud de los arcos que separan un punto de otro, y una vez conocidos los tres lados del triángulo esférico, bastará calcular su superficie en funcion de los lados para resolver el problema. (892 I)

Tabla de las principales fórmulas usadas en Trigonometría esférica.

Longitud del arco a° en unidades lineales:

$$l=\frac{\pi\, r\, a^\circ}{180}$$

Triángulo esférico:

$$a<b+c$$
$$a>b-c$$
$$a+b+c<360$$
$$a<180$$
$$A+B+C>2 \text{ rectos}$$
$$A+B+C<6 \text{ rectos}$$

si $a=b$ tendremos: $A=B$
si $a>b$ tendremos: $A>B$

Triángulo suplementario:

$$a'=180^\circ-A \qquad A'=180^\circ-a$$
$$b'=180^\circ-B \qquad B'=180^\circ-b$$
$$c'=180^\circ-C \qquad C'=180^\circ-c$$

Relacion entre tres lados y un ángulo.

$$\left.\begin{array}{l}\cos. a=\cos. b \cos. c+\text{sen. } b \text{ sen. } c \cos. A\\ \cos. b=\cos. a \cos. c+\text{sen. } a \text{ sen. } c \cos. B\\ \cos. c=\cos. a \cos. b+\text{sen. } a \text{ sen. } b \cos. C\end{array}\right\}\ldots\ldots(1)$$

Relacion entre dos lados y los ángulos opuestos.

$$\frac{\text{sen. a}}{\text{sen. A}}=\frac{\text{sen. b}}{\text{sen. B}}=\frac{\text{sen. c}}{\text{sen. C}}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Relacion entre dos lados, el ángulo que forma y el ángulo opuesto á uno de ellos.

$$\left.\begin{array}{l}\text{cot.a sen.b}-\text{cot.A sen.C}=\text{cos.b cos.C}\\ \text{cot.b sen.a}-\text{cot.B sen.C}=\text{cos.a cos.C}\\ \text{cot.b sen.c}-\text{cot.B sen.A}=\text{cos.c cos.A}\\ \text{cot.c sen.b}-\text{cot.C sen.A}=\text{cos.b cos.A}\\ \text{cot.c sen.a}-\text{cot.C sen.B}=\text{cos.a cos.B}\\ \text{cot.a sen.c}-\text{cot.A sen.B}=\text{cos.c cos.B}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(3)$$

Relacion entre un lado y los tres ángulos

$$\left.\begin{array}{l}\text{cos.A}=-\text{cos.B cos.C}+\text{sen.B sen.C cos.a}\\ \text{cos.B}=-\text{cos.A cos.C}+\text{sen.A sen.C cos.b}\\ \text{cos.C}=-\text{cos.A cos.B}+\text{sen.A sen.B cos.c}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(4)$$

Fórmulas de los triángulos rectángulos.

Hipotenusa y dos lados:

$$\text{cos.a}=\text{cos.b cos.c}\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Hipotenusa, un lado y el ángulo opuesto:

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen. b}=\text{sen. a sen. B}\\ \text{sen. c}=\text{sen. a sen. C}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(6)$$

Hipotenusa, un lado y el ángulo que forman:

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. b}=\text{tang. a cos. C}\\ \text{tang. c}=\text{tang. a cos. B}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(7)$$

Dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. b}=\text{sen. c tang. B}\\ \text{tang. c}=\text{sen. b tang. C}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(8)$$

Dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{cos. B}=\text{cos. b sen. C}\\ \text{cos. C}=\text{cos. c sen. B}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(9)$$

La hipotenusa y los dos ángulos:

$$\text{cos. a}=\text{cot. B cot. C}\ldots\ldots\ldots(10)$$

La hipotenusa y los dos lados:

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. }\tfrac{1}{2}\text{ c}=+\sqrt{\text{tang. }\tfrac{1}{2}\text{ (a}-\text{b) tang. }\tfrac{1}{2}\text{ (a+b)}}\\ \text{tang. }\tfrac{1}{2}\text{ b}=+\sqrt{\text{tang. }\tfrac{1}{2}\text{ (a}-\text{c) tang. }\tfrac{1}{2}\text{ (a+c)}}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(11)$$

La hipotenusa, un lado y el ángulo opuesto:

$$\text{tang. }(45^\circ+\tfrac{1}{2}\text{ a})=\pm\sqrt{\frac{\text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{ (B+b)}}{\text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{ (B}-\text{b)}}}=\pm\sqrt{\frac{\text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{ (C+c)}}{\text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{ (C}-\text{c)}}}\ldots\ldots\ldots(12)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. }(45^\circ+\tfrac{1}{2}\text{ B})=\pm\sqrt{\dfrac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}\text{ (a+b)}}{\text{tang. }\tfrac{1}{2}\text{ (a}-\text{b)}}}\\ \text{tang. }(45^\circ+\tfrac{1}{2}\text{ C})=\pm\sqrt{\dfrac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}\text{ (a+c)}}{\text{tang. }\tfrac{1}{2}\text{ (a}-\text{c)}}}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(13)$$

La hipotenusa, un lado y el ángulo que forman:

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. }\tfrac{1}{2}\text{ C}=+\sqrt{\dfrac{\text{sen. (a}-\text{b)}}{\text{sen. (a+b)}}}\\ \text{tang. }\tfrac{1}{2}\text{ B}=+\sqrt{\dfrac{\text{sen. (a}-\text{c)}}{\text{sen. (a+c)}}}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(14)$$

Dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang.}\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\,c)=\pm\sqrt{\dfrac{\text{sen.}\,(B+b)}{\text{sen.}\,(B-b)}}\\[2ex] \text{tang.}\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\,b)=\pm\sqrt{\dfrac{\text{sen.}\,(C+c)}{\text{sen.}\,(C-c)}}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(15)$$

Dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,b=+\sqrt{\text{tang.}\left(45^\circ+\dfrac{B-C}{2}\right)\ \text{tang.}\left(\dfrac{B+C}{2}-45^\circ\right)}\\[2ex] \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,c=+\sqrt{\text{tang.}\left(45^\circ-\dfrac{B-C}{2}\right)\ \text{tang.}\left(\dfrac{B+C}{2}-45^\circ\right)}\end{array}\right\}(15\tfrac{1}{2})$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang.}\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\,C)=\pm\sqrt{\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,(B+b)\ \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,(B-b)}\\ \text{tang.}\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\,B)=\pm\sqrt{\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,(C+c)\ \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,(C-c)}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(16)$$

La hipotenusa y los dos ángulos:

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,a=+\sqrt{\dfrac{\text{cos.}\,(180^\circ-B-C)}{\text{cos.}\,(B-C)}}\ldots\ldots\ldots(16\tfrac{1}{2})$$

Triángulos rectiláteros:

$$\text{cos.}\,A=-\text{cos.}\,B\ \text{cos.}\,C\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen.}\,B=\text{sen.}\,A\ \text{sen.}\,b\\ \text{sen.}\,C=\text{sen.}\,A\ \text{sen.}\,c\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(18)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang.}\,B=-\text{tang.}\,A\ \text{cos.}\,c\\ \text{tang.}\,C=-\text{tang.}\,A\ \text{cos.}\,b\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(19)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang.}\,B=\ \text{sen.}\,C\ \text{tang.}\,b\\ \text{tang.}\,C=\ \text{sen.}\,B\ \text{tang.}\,c\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(20)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{cos.}\,b=\text{cos.}\,B\ \text{sen.}\,c\\ \text{cos.}\,c=\text{cos.}\,C\ \text{sen.}\,b\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(21)$$

$$\text{cos.}\,A=-\text{cot.}\,b\ \text{cot.}\,c\ldots\ldots\ldots(22)$$

Angulos auxiliares:

$$P=M\ \text{cos.}\,\alpha+N\ \text{sen.}\,\alpha\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

$$\text{tang.}\,\varphi=\frac{N}{M}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(B)$$

$$P\ \text{cos.}\,\varphi=M\ \text{cos.}\,(\alpha-\varphi)\ldots\ldots\ldots\ldots(C)$$

Los ángulos en funcion de los lados:

$$p=\tfrac{1}{2}\,(a+b+c)$$

$$\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{\text{sen.}\,(p-b)\ \text{sen.}\,(p-c)}{\text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c}}\ldots\ldots\ldots(23)$$

$$\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{\text{sen.}\,p\ \text{sen.}\,(p-a)}{\text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c}}\ldots\ldots\ldots(24)$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{\text{sen.}\,(p-b)\ \text{sen.}\,(p-c)}{\text{sen.}\,p\ \text{sen.}\,(p-a)}}\ldots\ldots\ldots(25)$$

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{\text{sen.}\,p\ \text{sen.}\,(p-a)}{\text{sen.}\,(p-b)\ \text{sen.}\,(p-c)}}\ldots\ldots\ldots(26)$$

Los lados en funcion de los ángulos:

$$P=\tfrac{1}{2}\,(A+B+C)$$

$$\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{-\text{cos.}\,P\ \text{cos.}\,(P-A)}{\text{sen.}\,B\ \text{sen.}\,C}}\ldots\ldots\ldots(27)$$

$$\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{\text{cos.}\,(P-B)\ \text{cos.}\,(P-C)}{\text{sen.}\,B\ \text{sen.}\,C}}\ldots\ldots\ldots(28)$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{-\text{cos.}\,P\ \text{cos.}\,(P-A)}{\text{cos.}\,(P-B)\ \text{cos.}\,(P-C)}}\ldots\ldots\ldots(29)$$

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{\text{cos.}\,(P-B)\ \text{cos.}\,(P-C)}{-\text{cos.}\,P\ \text{cos.}\,(P-A)}}\ldots\ldots\ldots(30)$$

Id del exceso esférico: $\varepsilon = A + B + C - 180^\circ = 2P - 180^\circ$

$\frac{1}{2}\varepsilon = P - 90^\circ$

$P = \frac{1}{2}\varepsilon + 90^\circ$

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\tfrac{1}{2}\varepsilon\ \text{sen.}(A - \tfrac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen.}B\ \text{sen.}C}} \ldots\ldots\ldots (31)$$

$$\cos.\ \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\ (B - \tfrac{1}{2}\varepsilon)\ \text{sen.}\ (C - \tfrac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen.}\ B\ \text{sen.}\ C}} \ldots\ldots\ldots (32)$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\tfrac{1}{2}\varepsilon\ \text{sen.}\ (A - \tfrac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen.}(B - \tfrac{1}{2}\varepsilon)\ \text{sen.}(C - \tfrac{1}{2}\varepsilon)}} \ldots\ldots (33)$$

$$\cot.\ \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\ (B - \tfrac{1}{2}\varepsilon)\ \text{sen.}\ (C - \tfrac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\varepsilon\ \text{sen.}\ (A - \tfrac{1}{2}\varepsilon)}} \ldots\ldots\ldots (34)$$

Fórmulas de Delambre:

$$\frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(A+B)}{\cos.\ \tfrac{1}{2}C} = \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos.\ \tfrac{1}{2}c} \ldots\ldots\ldots (35)$$

$$\frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(A-B)}{\cos.\ \tfrac{1}{2}C} = \frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}c} \ldots\ldots\ldots (36)$$

$$\frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}C} = \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}(a+b)}{\cos.\ \tfrac{1}{2}c} \ldots\ldots\ldots (37)$$

$$\frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}C} = \frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}c} \ldots\ldots\ldots [38]$$

Analogías de Neper:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A+B) = \cot.\ \tfrac{1}{2}C\ \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos.\ \tfrac{1}{2}(a+b)} \ldots\ldots [39]$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}[A-B] = \cot.\ \tfrac{1}{2}C\ \frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}[a-b]}{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}[a+b]} \ldots\ldots [40]$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}[a+b] = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}c\ \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}[A-B]}{\cos.\ \tfrac{1}{2}[A+B]} \ldots\ldots [41]$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(a-b) = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}c\ \frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(A+B)} \ldots\ldots (42)$$

Exceso esférico en funcion de dos lados y el ángulo que forman:

$$\cot.\ \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\cot.\ \tfrac{1}{2}a\ \cot.\ \tfrac{1}{2}b + \cos.\ C}{\text{sen.}\ C} \ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

Id en funcion de tres lados y un ángulo:

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\text{sen.}\ C}{\cos.\ \tfrac{1}{2}c}\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}a\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}b \ldots\ldots\ldots (44)$$

Id en funcion de los tres lados:

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{4}\varepsilon = \sqrt{\text{tg.}\tfrac{1}{2}p\ \text{tg.}\tfrac{1}{2}(p-a)\ \text{tg.}\tfrac{1}{2}(p-b)\ \text{tg.}\tfrac{1}{2}(p-c)} \ldots\ldots\ldots (45)$$

En el triángulo equilátero:

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{4}\varepsilon = \sqrt{\text{tg.}\ \frac{3a}{4}\ \text{tg.}^3\ \tfrac{1}{4}a}$$

Exceso esférico en funcion de los tres lados:

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\sqrt{\text{sen.}\ p\ \text{sen.}\ (p-a)\ \text{sen.}\ (p-b)\ \text{sen.}\ (p-c)}}{2\cos.\ \tfrac{1}{2}a\ \cos.\ \tfrac{1}{2}b\ \cos.\ \tfrac{1}{2}c} \ldots\ldots\ldots (46)$$

Resolucion de los triángulos oblicuángulos.

I. Conociendo a, b y c

$$p = \tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{sen.}\ (p-b)\ \text{sen.}\ (p-c)}{\text{sen.}\ p\ \text{sen.}\ (p-a)}}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{sen.}\ (p-a)\ \text{sen.}\ (p-c)}{\text{sen.}\ p\ \text{sen.}\ (p-b)}}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\text{sen.}\ (p-a)\ \text{sen.}\ (p-b)}{\text{sen.}\ p\ \text{sen.}\ (p-c)}}$$

Es necesario tener: $a+b+c < 360^\circ$; $a < b+c$; $a > b-c$.

II. Conociendo A, B y C

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon=\tfrac{1}{2}(A+B+C)-90^\circ$$

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{\text{sen. }\tfrac{1}{2}\varepsilon\ \text{sen. }(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen. }(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\ \text{sen. }(C-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}}$$

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,b=\sqrt{\frac{\text{sen. }\tfrac{1}{2}\varepsilon\ \text{sen. }(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen. }(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\ \text{sen. }(C-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}}$$

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,c=\sqrt{\frac{\text{sen. }\tfrac{1}{2}\varepsilon\ \text{sen. }(C-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen. }(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\ \text{sen. }(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}}$$

Es necesario tener: $\varepsilon<360^\circ$ $\quad$ A, B y $C>\tfrac{1}{2}\varepsilon$

III. Conociendo *a*, *b* y C

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}(A+B)=\text{cot. }\tfrac{1}{2}C\,\frac{\text{cos. }\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{cos. }\tfrac{1}{2}(a+b)}\ldots\ldots(39)$$

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}(A-B)=\text{cot. }\tfrac{1}{2}C\,\frac{\text{sen. }\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{sen. }\tfrac{1}{2}(a+b)}\ldots\ldots[40]$$

Si $a>b$ $\quad$ $A=\tfrac{1}{2}(A+B)+\tfrac{1}{2}(A-B)$
$B=\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(A-B)$

$$\text{sen. }c=\frac{\text{sen. }C\ \text{sen. }a}{\text{sen. }A}=\frac{\text{sen. }C\ \text{sen. }b}{\text{sen. }B},$$

ó bien $\quad\text{tang. }\tfrac{1}{2}c=\dfrac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}(a+b)\ \text{cos. }\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{cos. }\tfrac{1}{2}(A-B)}$

Es necesario que $\quad$ a, b y $C<180^\circ$

IV. Conociendo A, B y *c*

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}(a+b)=\text{tang. }\tfrac{1}{2}c\,\frac{\text{cos. }\tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{cos. }\tfrac{1}{2}(A+B)}\ldots\ldots(41)$$

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}(a-b)=\text{tang. }\tfrac{1}{2}c\,\frac{\text{sen. }\tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{sen. }\tfrac{1}{2}(A+B)}\ldots\ldots(42)$$

Si $A>B$ $\quad$ $a=\tfrac{1}{2}(a+b)+\tfrac{1}{2}(a-b)$
$b=\tfrac{1}{2}(a+b)-\tfrac{1}{2}(a-b)$

$$\text{sen. }C=\frac{\text{sen. }c\ \text{sen. }A}{\text{sen. }a}=\frac{\text{sen. }c\ \text{sen. }B}{\text{sen. }b}$$

$$\text{cot. }\tfrac{1}{2}C=\frac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{cos. }\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{cos. }\tfrac{1}{2}(a-b)}$$

Es necesario que $\quad$ A, B y $c<180^\circ$

V. Conociendo *a*, *b* y B

$$\text{sen. }B=\frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. a}},$$

$$\text{cot. }\tfrac{1}{2}C=\frac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{cos. }\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{cos. }\tfrac{1}{2}(a-b)}=\frac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}(A-B)\ \text{sen. }\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{sen. }\tfrac{1}{2}(a-b)}$$

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}c=\frac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}(a+b)\ \text{cos. }\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{cos. }\tfrac{1}{2}(A-B)}=\frac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}(a-b)\ \text{sen. }\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{sen. }\tfrac{1}{2}(A-B)}$$

Para saber si el problema es posible ó si tiene una ó dos resoluciones, debe tenerse sen. B igual ó menor que 1, cot. $\tfrac{1}{2}$ C y tang. $\tfrac{1}{2}$ c han de ser positivas; cuando $b>a$ ha de ser $B>A$ y cuando $b<a$ ha de ser $B<A$.

VI. Conociendo A, B y *a*

$$\text{sen. }b=\frac{\text{sen. B sen. a}}{\text{sen. A}}$$

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}c=\frac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}(a+b)\ \text{cos. }\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{cos. }\tfrac{1}{2}(A-B)}=\frac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}(a-b)\ \text{sen. }\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{sen. }\tfrac{1}{2}(A-B)}$$

$$\text{cot. }\tfrac{1}{2}C=\frac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{cos. }\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{cos. }\tfrac{1}{2}(a-b)}=\frac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}(A-B)\ \text{sen. }\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{sen. }\tfrac{1}{2}(a-b)}$$

Para saber si el problema es posible ó si tiene una ó dos soluciones, debe tenerse sen. *b* igual ó menor que 1; tang. $\tfrac{1}{2}$ *c* y cot. $\tfrac{1}{2}$ C positivas; cuando $B>A$ ha de ser $b>a$, y cuando $B<A$ ha de ser $b<a$.

Superficie de un triángulo esférico:

$$\varepsilon=A+B+C-180^\circ$$

$$s=\pi\,r^2\times\frac{\varepsilon}{180}\ldots\ldots(47)$$

FIN.

ÍNDICE.

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

Páginas.

POLIGONOMETRÍA.

TABLAS.

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA.

DEFINICIONES Y PROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS.

RELACIONES ENTRE LOS ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO ESFÉRICO.

Páginas.

FÓRMULAS RELATIVAS Á LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

FÓRMULAS GENERALES CALCULABLES POR LOGARITMOS.

EXPRESIONES DEL EXCESO ESFÉRICO.

RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

Páginas.