personas competentes, sino que con el uso de ellas durante algunos años se han obtenido buenos resultados en la enseñanza.

Suplicamos á nuestros colegas, se sirvan reproducir el anterior certificado, en honor de una persona que, como el Sr. Contreras, coopera con empeño á la instruccion de la juventud.

(Diario Oficial, Octubre 26 de 1878).

Señores redactores de *La Libertad.*

Agradecerémos mucho á vdes. se sirvan publicar en su acreditado diario el certificado siguiente:

Los que suscriben, antiguos profesores de la Escuela Nacional de Agricultura y Veterinaria, certifican: que durante los años de 1875 y 1876, han dado la clase de primer curso de matemáticas siguiendo como obra de texto la del Sr. Ingeniero Manuel María Contreras, con notorio aprovechamiento de los alumnos, como consta por las calificaciones que obran en los libros respectivos de exámen. Como constancia extendemos el presente en México á 21 de Octubre de 1878.—*Manuel Cordero.—José C. Segura.—Vicente U. Alcaráz.*

Señores redactores de *La Libertad.*

Suplicamos encarecidamente á vdes. se sirvan insertar en su ilustrado diario el certificado adjunto:

Como directores de establecimientos de instruccion primaria y preparatoria en esta capital, certificamos: que en nuestros respectivos colegios y durante varios años se han adoptado como obras de texto para la enseñanza de matemáticas los tratados de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría escritos por el ingeniero Manuel María Contreras, y que con ellos se han obtenido buenos resultados en la instruccion y aprovechamiento de los discípulos.

México, Octubre 18 de 1878.—*Adrian Fournier*, director del Licéo Franco-Mexicano.—*Ricardo Rode*, socio director del Rode's English Boarding School.—*Emilio Katthain.—A. Bracho.—Emilio G. Baz*, director del instituto Anglo-Franco-Mexicano.—*M. Soriano.—José Saturnino Yarza*, director del colegio Hispano-Mexicano.

(La Libertad, Octubre 22 y 31 de 1878).

TRIGONOMETRIA RECTILINEA.

INTRODUCCION.

723.—Al ocuparnos en geometría de los triángulos, hemos visto que, por regla general, cuando se conocen tres de los elementos de un triángulo, pueden determinarse gráficamente los demás, y con ese motivo explicamos en qué casos la cuestion admite una ó varias resoluciones y cuándo es indeterminada. El objeto definitivo de la trigonometría rectilínea, es resolver analítica y numéricamente los mismos problemas y ademas determinar la superficie de un triángulo cuando se tienen los datos suficientes.

El procedimiento usado en trigonometría, tiene una gran superioridad sobre el que explicamos en geometría, por el empleo del análisis para el estudio y fundamento de las cuestiones, y porque resolviendo éstas aritméticamente, se puede alcanzar un grado de aproximacion mucho mayor que al hacerlo gráficamente.

Para resolver de un modo general el problema de que se ocupa la trigonometría, en el que comunmente hay tres incógnitas, se necesita conocer las relaciones que existen entre los lados, los ángulos y la superficie de un triángulo para establecer tres ecuaciones con cantidades diferentes en las que entren las incógnitas, y ademas se presten á una solucion aritmética fácil. De aquí nace naturalmente, la necesidad de estudiar á fondo las diversas relaciones que existen entre los elementos

de un triángulo cualquiera, y buscar el mejor modo de hacer entrar en los cálculos los ángulos.

En geometría hemos visto que á los ángulos se sustituyen los arcos del círculo que les son proporcionales; y en trigonometría, con la mira de facilitar las especulaciones, los arcos están representados por varias líneas rectas que con ellos tienen relaciones constantes, y las cuales se llaman líneas trigonométricas. De este modo, á la comparacion de los ángulos, se sustituye la de líneas rectas. Para comprender que este método es posible, basta reflexionar en que la magnitud de una cuerda, fija completamente el valor de un arco en un círculo dado. Ademas de la cuerda, hay otras líneas trigonométricas llamadas seno, tangente, etc., que pronto daremos á conocer; pero todas ellas, lo mismo que la cuerda, tienen una relacion fija con el arco, de modo que éste ó el ángulo pueden determinarse por una línea trigonométrica y recíprocamente. El método que hemos explicado para determinar la relacion del diámetro á la circunferencia, inscribiendo á ésta sucesivamente polígonos regulares de 4, 8, 16, etc. lados, y determinando el valor númerico de éstos, da una idea de la posibilidad de construir una tabla en la que se tenga la correspondencia entre los ángulos y las magnitudes de las cuerdas, y cuya tabla podría servir para pasar de los ángulos á sus cuerdas y recíprocamente. Si por otra parte se conocen las relaciones que ligan los lados y los ángulos de un triángulo, fácilmente se concibe que pueden llegarse á determinar en él, los lados por las cuerdas de sus ángulos y recíprocamente. Lo que decimos de la cuerda, es aplicable á las demas líneas trigonométricas que vienen á ser *magnitudes auxiliares*, para resolver el problema general de determinar unos por otros los elementos de un triángulo. Como acabamos de indicarlo, con el intermedio de las líneas trigonométricas, el problema se divide en dos partes distintas; una, que es la construccion de las tablas que expresan la correspondencia entre los valores de los arcos y sus líneas trigonométricas, puede hacerse préviamente una vez para siempre á fin de obtener el ángulo por la línea trigonométrica; y la otra, que lleva por mira determinar los elementos de un triángulo dado por medio de las relaciones que los ligan con las líneas trigonométricas de sus ángulos, hay necesidad de ejecutarla aritméticamente en cada caso práctico, pero con suma facilidad despues de construida la tabla de las líneas trigonométricas. Este procedimiento es análogo al de los logaritmos, en el que una vez para todas, se ha calculado una tabla representando los números en ella contenidos, por las diversas potencias de un número constante, y despues un problema numérico se resuelve ejecutando operaciones correlativas, pero mucho más sencillas con los logaritmos

préviamente calculados, y los cuales solo han servido de intermedio entre los datos y el resultado final del problema. El uso de las tablas de las líneas trigonométricas tiene, ademas, la ventaja de conducir desde luego á un valor numérico: objeto definitivo de las investigaciones trigonométricas.

Como en algunos casos, una línea trigonométrica es poco á propósito para representar un ángulo con la suficiente exactitud, hay necesidad de servirse de varias líneas trigonométricas; y como muchas veces hay ventaja en reemplazar las relaciones de unas líneas por las que existen entre otras, conviene en el estudio de la trigonometría, aumentar las líneas trigonométricas y dar un gran desarrollo á las investigaciones de las relaciones que existen entre las diversas líneas trigonométricas y sus más simples funciones, tanto por ser esto de notoria utilidad para poder resolver fácilmente las cuestiones en que entran magnitudes angulares y determinar los elementos desconocidos de un triángulo, como porque sirve de base á multitud de especulaciones teóricas y prácticas en las otras partes de las matemáticas.

Resulta, pues, que la trigonometría tiene que estudiar las relaciones geométricas que existen entre los lados y los ángulos de un triángulo, conocer las diferentes líneas rectas que pueden reemplazar á los ángulos y servir para fijar su magnitud, establecer el número necesario de líneas trigonométricas, conocer las relaciones que existen entre unas y otras, y construir tablas que fácilmente den los valores de los ángulos conociendo los de sus líneas trigonométricas y viceversa; teniendo la trigonometría por objeto definitivo la resolucion de los problemas en que entran magnitudes angulares y la determinacion de los elementos de un triángulo.

La resolucion de un triángulo y el conocimiento de las fórmulas trigonométricas, es de la mayor importancia en matemáticas, tanto por su inmediata aplicacion á los triángulos, cuanto porque pudiendo descomponerse un polígono cualquiera en triángulos, resulta que las cuestiones de poligonometría se reducen á problemas de trigonometría.

Creemos que lo expuesto es bastante para hacer comprender la siguiente definicion:

724.—*La trigonometría tiene por objeto resolver los problemas relativos á las magnitudes angulares, y determinar los elementos desconocidos de un triángulo.*

En un triángulo consideramos sus lados, sus ángulos y su superficie.

Resolver un triángulo es calcular los valores numéricos de sus elementos desconocidos, cuando para esto tenemos los datos suficientes.

El problema de que casi siempre se ocupa la trigonometría, es: conocidos tres de los elementos de un triángulo, determinar los demás.

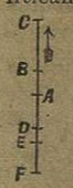
725.—Teniendo que figurar en nuestros cálculos los ángulos cuyos valores son proporcionales á los arcos, y debiendo reemplazarse para facilitar las investigaciones, los arcos por otras magnitudes auxiliares, llamadas líneas trigonométricas, que tienen relaciones fijas con los arcos y los ángulos, ántes de ocuparnos especialmente de las líneas trigonométricas daremos, en general, una idea de las funciones circulares.

Se llama funcion, toda expresion analítica que contiene dos cantidades variables, en la que el valor de una de ellas depende del que se asigne á la otra. Por ejemplo: la superficie del círculo es una funcion del radio; porque como hemos visto, estando representada la superficie del círculo por la expresion analítica

$$s=\pi r^2$$

á cada valor que tenga ó le demos al radio *r*, corresponderá otro determinado para la superficie *s* y recíprocamente. Son pues *r* y *s* cantidades variables, pero cuyos valores cambian correlativamente segun una ley cifrada en la fórmula $s=\pi r^2$

726.—Lineas negativas y positivas.—Hemos dejado indicado (268) que los signos + y — tienen la notable propiedad de indicar analíticamente la oposicion de sentido de que son susceptibles ciertas cantidades. Si sobre una línea recta ó curva F C (Fig. 345) consideramos como positivas las medidas tomadas arriba de A en la direccion indicada por la flecha, las medidas en sentido contrario se considerarán como negativas. Las magnitudes AB, y BC de 3 y de 7 milímetros, irán precedidas del signo +, y las AD, DE y EF respectivamente iguales á 5, 2 y 4 milímetros, estarán marcadas con el signo —. Si suponemos un móvil que partiendo del punto A subió 6 mm., en seguida bajó 10, luego subió 8, y por último bajó 7 mm., su distancia al punto de partida estará expresada por la ecuacion:



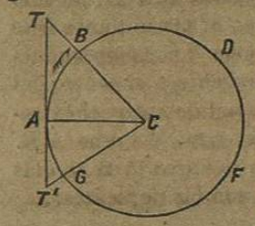
(Fig. 345)

$$x=+6-10+8-7$$

6 $$x=-3$$

lo que quiere decir que el móvil quedaba 3 mm. abajo de A por estar

el resultado precedido del signo —. Igualmente, si convenimos en considerar como positivas las distancias medidas á la derecha de un plano ó de una recta, serán negativas las medidas en direccion opuesta. Es de notar que el sentido en que se estimen los signos de las cantidades es enteramente arbitrario, pudiendo haberse considerado en el caso de nuestra figura como positivas las distancias tomadas abajo de A, en direccion contraria de la indicada por la flecha; pero entónces serían negativas las medidas hechas hácia arriba.

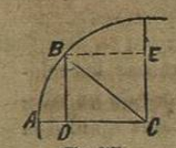


(Fig. 346)

En el círculo de la figura 346, si tomamos el punto A como orígen de las medidas hechas sobre la circunferencia y consideramos como positivos los arcos medidos en el sentido en que se mueven las manos de un reloj de A hácia B, D, F, G indicado por la flecha, será necesario reputar como negativos y preceder del signo — á los arcos, como AG, AGF tomados en direccion opuesta. En la misma figura, si convenimos en considerar como positiva la tangente AT tomada arriba de A, estimaremos como negativa la tangente A T' que se mide para abajo de A.

Líneas trigonométricas.

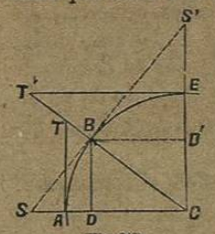
727. *Se llaman líneas trigonométricas á las rectas que tienen una dependencia constante con el arco, de tal manera, que conociendo una cualquiera de ellas, se puede determinar el arco á que corresponde y recíprocamente.*



(Fig. 347)

Por ejemplo: dado el arco A B, (fig. 347) la recta B D bajada desde uno de sus extremos B perpendicular al radio C A que pasa por el otro extremo A, es una línea trígonométrica que se llama *seno* del arco A B ó del ángulo B C A. Como al arco A B no puede corresponder mas que un solo *seno* B D, en el círculo cuyo radio es A C, resulta que hay una relacion fija entre la magnitud del arco y la de su seno. Si conocido el seno B D, quisiéramos gráficamente determinar la magnitud de su arco, en el punto C levantariamos una perpendicular E C igual al seno dado B D, y tirando por su extremo E una paralela á A C su interseccion

con la circunferencia determinaría el otro extremo del arco A B que tiene por seno á B D.



(Fig. 348)

728.—Diversas líneas trigonométricas.—Considerando el arco A B (fig. 348) acabamos de ver que la recta B D es su *seno*. *Tangente es la perpendicular* AT *levantada por uno de los extremos del arco, al radio que termina en este punto* A *hasta que encuentra al radio* C B *prolongado que pasa por el otro extremo.* Si por el punto B se tira la tangente B S, la parte S C comprendida entre el extremo S de la tangente y el centro del círculo se llama *secante.** La recta A D, comprendida entre el extremo A del arco y el pié D del seno, se llama *seno verso* del arco A B. En resúmen, *las líneas trigonométricas directas* del arco A B con las abreviaturas con que comunmente se les indica, son las siguientes:

B D=sen. A B
A T=tang. A B
S C=sec. A B
A D=sen. ver. A B

El complemento del arco A B es B E y conforme á las definiciones anteriores B D'=D C será el seno del arco B E, E T' será su tangente, S' C su secante, y E D' su seno verso; pero al seno del complemento de un arco se le llama *coseno*, á la tangente del complemento *cotangente*, á la secante del complemento *cosecante*, y al seno verso del complemento *coseno verso;* por lo cual *las líneas trigonométricas indirectas* del arco A B con las abreviaturas usadas, serán las siguientes:

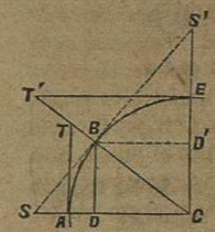
D C =cos. A B
E T'=cot. A B
S' C =cosec. A B
E D'=cos. ver. A B.

729.—Fórmulas fundamentales.—Vamos á determinar las relaciones que existen entre las diversas líneas trigonométricas de un mismo ángulo y el radio del círculo, que generalmente se toma igual á la unidad con el fin de simplificar las fórmulas.

Considerando el triángulo rectángulo B D C, (fig. 348) y en virtud

* Varios autores toman como secante la recta C T que es igual á S C por ser iguales los triángulos rectángulos S B C y T A C; no haciéndolo nosotros para evitar los inconvenientes que tal sistema presenta para fijar el signo de la secante.

de que el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos, se tiene:



(Fig. 348)

$$BC^2 = BD^2 + DC^2$$

sustituyendo los valores de esas rectas, representando por r el radio del círculo, y llamando a el arco A B, resulta:

$$r^2 = \text{sen}^2 a + \cos^2 a$$

Considerando el triángulo rectángulo S B C, se tiene:

$$SC^2 = BC^2 + BS^2$$

sustituyendo los valores de estas rectas y atendiendo á que por la igualdad de los triángulos S B C y T A C (384) B S=A T=tang.a, resulta:

$$\sec^2 a = r^2 + \text{tang}^2 a$$

Considerando el triángulo rectángulo S' B C, se tiene:

$$S'C^2 = CB^2 + BS'^2$$

Atendiendo á que por la igualdad de los triángulos S' B C y T' E C (384) B S'=E T'=cot a, y sustituyendo los valores de las otras rectas resulta:

$$\text{cosec}^2 a = r^2 + \cot^2 a.$$

Siendo B D paralela á T A, el triángulo B D C será semejante á T A C (514) y á su igual S B C. Comparando los lados homólogos de los dos primeros triángulos, se tiene:

$$AT : AC :: BD : DC$$

sustituyendo $\quad \text{tang.a} : r :: \text{sen.a} : \cos.a$

luego $\quad \text{tang.a} = \dfrac{r.\text{sen.a}}{\cos.a}$

Comparando los lados homólogos de los triángulos S B C y B D C, se tiene:

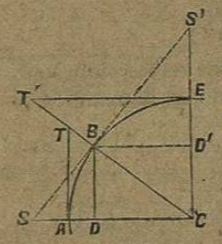
$$SC : BC :: BC : DC$$

sustituyendo $\quad \sec.a : r :: r : \cos.a$

de donde $\quad \sec.a = \dfrac{r^2}{\cos.a}$

Comparando los lados homólogos de los triángulos B D C y S' B C,

que son semejantes por ser rectángulos y tener el ángulo S'=B C D como complementos ambos del mismo ángulo B C S', se tiene:



(Fig. 348)

$$S'C : BC :: BC : BD$$

sustituyendo $\text{cosec.a} : r :: r : \text{sen.a}$

luego $$\text{cosec.a} = \frac{r^2}{\text{sen.a}}$$

Comparando los lados homólogos de los triángulos semejantes B D C y T' E C, se tiene:

$$T'E : EC :: DC : BD$$

sustituyendo $\text{cot.a} : r :: \text{cos.a} : \text{sen.a}$

luego $$\text{cot.a} = \frac{r.\text{cos.a}}{\text{sen. a}}$$

Por último, comparando los lados homólogos de los triángulos semejantes T' E C y T A C, se tiene:

$$T'E : EC :: AC : AT$$

sustituyendo $\text{cot.a} : r :: r : \text{tang.a}$

luego $$\text{cot.a} = \frac{r^2}{\text{tang.a}}$$

Como se habrá observado, para sacar las cinco últimas fórmulas, se ha comparado el triángulo de que forma parte la línea trigonométrica cuyo valor se busca, con el triángulo B D C en que entran el seno y coseno, excepto en el último caso que el triángulo de que forma parte la cotangente se comparó con aquel en que entra la tangente. Ademas, la primera razon la hemos formado siempre con la línea trigonométrica cuyo valor buscamos y el radio. La segunda razon, naturalmente quedará determinada por los lados homólogos.

Para determinar el seno verso, basta observar, que

$$AD = AC - DC$$

sustituyendo $\text{sen.ver.a} = r - \text{cos.a}$

Para determinar el coseno verso, observaremos, que

$$ED' = EC - CD'$$

y como C D'=B D sustituyendo, resulta:

$$\text{cos.ver.a} = r - \text{sen.a}$$

Para mejor fijar en la memoria de los alumnos las anteriores fórmulas, que son de muy frecuente uso, las pondremos á continuacion:

LIGA DE ESTUDIANTES NUEVOLEONESES
UNION, ESTUDIO Y PATRIA
MONTERREY, N. L.

$$r^2 = \text{sen}^2\text{a} + \text{cos}^2\text{a}$$

$$\text{sec}^2\text{a} = r^2 + \text{tang}^2\text{a}$$

$$\text{cosec}^2\text{a} = r^2 + \text{cot}^2\text{a}$$

$$\text{tang.a} = \frac{r.\text{sen.a}}{\text{cos.a}}$$

$$\text{sec.a} = \frac{r^2}{\text{cos.a}}$$

$$\text{cosec.a} = \frac{r^2}{\text{sen.a}}$$

$$\text{cot.a} = \frac{r.\text{cos.a}}{\text{sen.a}}$$

$$\text{cot.a} = \frac{r^2}{\text{tang.a}}$$

de esta se deduce: $$\text{tang.a} = \frac{r^2}{\text{cot.a}}$$

$$\text{sen.ver.a} = r - \text{cos.a}$$

$$\text{cos.ver.a} = r - \text{sen.a}$$

Hemos dicho que generalmente y con el fin de simplificar las fórmulas, se hace el radio del círculo al cual se refieren las líneas trigonométricas igual á la unidad. Si en las fórmulas anteriores introducimos la condicion de

$$r = 1$$

se trasformarán en las siguientes, que son las que más á menudo se usan:

$$1 = \text{sen}^2\text{a} + \text{cos}^2\text{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{sec}^2\text{a} = 1 + \text{tang}^2\text{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{cosec}^2\text{a} = 1 + \text{cot}^2\text{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\text{tang.a} = \frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\sec.a=\frac{1}{\cos.a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$\operatorname{cosec}.a=\frac{1}{\operatorname{sen}.a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$\cot.a=\frac{\cos.a}{\operatorname{sen}.a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

$$\cot.a=\frac{1}{\operatorname{tang}.a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

$$\operatorname{tang}.a=\frac{1}{\cot.a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

$$\operatorname{sen}.\operatorname{ver}.a=1-\cos.a\ldots\ldots\ldots(10)$$

$$\cos.\operatorname{ver}.a=1-\operatorname{sen}.a\ldots\ldots\ldots(11)$$

730.—Nociones sobre la homogeneidad.—En álgebra (241) explicamos lo que se entiende por grado de un término, y por expresiones homogéneas: ahora haremos notar, que al tratar algebráicamente una cuestion de geometría, cada literal, por regla general, representa una línea: de modo que *a* no puede introducirse en los cálculos, si no es refiriendo la magnitud de la línea que representa á la de otra que implícitamente se ha tomado por unidad, como el metro, la pulgada, etc., ó á la de otra línea *b* conocida. En el primer caso, *a* representa un número concreto de metros, pulgadas, etc.; y en el segundo, $\frac{a}{b}$ será un número abstracto, al cual se podrá sustituir la relacion de otras magnitudes *c*, y *d* á condicion de que se tenga la ecuacion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

No entrando en los cálculos sino expresiones homogéneas, como todas las operaciones y combinaciones que por las reglas del cálculo se ejecuten con ellas, como reduccion á un comun denominador, adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion á la misma potencia y extraccion de raíz del mismo grado, conducen á un resultado homogéneo; resulta que cuando no se ha tomado como unidad una de las líneas que entran en la cuestion, y cada una de ellas se representa por una literal, todas las expresiones del cálculo, sea en su orígen al establecer las ecuaciones fundamentales, sea en las intermedias ó en las definitivas, tendrán que ser homogéneas.

Para plantear un problema valiéndonos de las relaciones geométri-

cas que forman parte del enunciado, no podemos hacerlo sino de dos maneras: estableciendo proporciones, ó ecuaciones. En el primer caso, siendo homogéneos los términos de las respectivas razones, lo serán los miembros de las ecuaciones que de ellas resulten, sea dividiendo cada antecedente por su consecuente, ó formando é igualando los productos de extremos y medios. Si se forma una ecuacion, habrá que expresar la igualdad de extensiones lineales por medio de términos de una dimension, ó la equivalencia de valores superficiales de dos dimensiones como x^2, ab, ó de volúmen indicados por términos de tres dimensiones como r^3, abc.

Estando las ecuaciones fundamentales de un problema formadas de términos homogéneos, como todas las operaciones que con ellos se hagan, tienen que ser iguales para que no se altere la ecuacion, se infiere que cuando se ha representado por una letra cada una de las líneas que entran en un problema, las expresiones todas del cálculo serán homogéneas.

Al contrario, cuando por simplificar los cálculos y las fórmulas finales, alguna de las líneas que forman parte de la cuestion, se ha tomado por unidad, el resultado podrá dejar de ser homogéneo, en razon de que siendo las diversas potencias de 1 iguales á 1, el *grado* de cada uno de los términos en que entra esta línea puede resultar disminuido una ó varias unidades.

Por ejemplo: en las fórmulas todas que hemos sacado representando el radio por r, y las demás líneas de la figura por sus respectivas anotaciones, sea fundándonos en que el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos, que es una expresion de equivalencia de superficies, ó en la comparacion de triángulos semejantes, hemos obtenido resultados homogéneos, tales como

$$r^2=\operatorname{sen}^2a+\cos^2a$$

$$\sec^2a=r^2+\operatorname{tang}^2a$$

$$\operatorname{tang}.a=\frac{r.\operatorname{sen}.a}{\cos.a}$$

$$\cot.a=\frac{r^2}{\operatorname{tang}.a}$$

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

pero cuando hemos tomado el radio del círculo igual á la unidad, estas mismas fórmulas se han trasformado en

$$1 = \text{sen}^2 a + \cos^2 a$$

$$\sec^2 a = 1 + \text{tang}^2 a$$

$$\text{tang.a} = \frac{\text{sen.a}}{\cos.a}$$

$$\cot.a = \frac{1}{\text{tang.a}}$$

cuyas expresiones no son ya homogéneas.

Sin embargo, como en este último caso se sabe cuál es la línea del problema que se ha tomado igual á la unidad, basta multiplicar los términos por una potencia adecuada de esa línea, que en nuestro ejemplo ha sido r, para tener desde luego las fórmulas que se habrian obtenido sin hacer esa simplificacion.

Así, pues, en lo de adelante para facilitar los cálculos supondremos el radio igual á 1, y cuando sea necesario restituiremos el valor de r suprimido, multiplicando por una potencia adecuada de r los términos que lo necesiten, para hacer todos los de nuestras fórmulas de igual grado.

Repetiremos que el grado de un término de la forma entera se estima por el número de sus factores literales; que el de una fraccion se determina restando las dimensiones del denominador de las del numerador; y que en un radical hay que dividir por el índice del radical el grado de la expresion que está dentro del signo. Sin embargo, debemos advertir que algunas veces al estimar las dimensiones de un término, no se llevan en cuenta algunos factores aun cuando sean literales. Esto se hace *cuando alguna literal está representando un coeficiente numérico.* Por ejemplo, si x=n.a representa un arco múltiplo de a, como n está en lugar del coeficiente 1, 2, 3.... la expresion x=n.a será homogénea, aunque aparentemente el 2° miembro tenga dos dimensiones. Esta observacion es igualmente aplicable al caso en que una línea trigonométrica venga á hacer el oficio de coeficiente. Por ejemplo: sen.30°=½, y si en una expresion representamos 30° por m, sen.m no deberá considerarse como factor, porque está en lugar del conficiente ½; pero por regla general, las líneas trigonométricas representan líneas, y las expresiones en que entran deben ser homogéneas por indicar resultados de operaciones idénticas hechas con términos del mismo grado.

731.—Problemas.—I.—*Determinar todas las líneas trigonométricas en funcion del seno.*

De la fórmula (1) n° 729 resulta $\cos.a = \sqrt{1 - \text{sen}^2 a}$

„ (4) „ $\text{tang.a} = \frac{\text{sen.a}}{\cos.a} = \frac{\text{sen.a}}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 a}}$

„ (7) „ $\cot.a = \frac{\cos.a}{\text{sen.a}} = \frac{\sqrt{1 - \text{sen}^2 a}}{\text{sen.a}}$

„ (5) „ $\sec.a = \frac{1}{\cos.a} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 a}}$

„ (6) „ $\text{cosec.a} = \frac{1}{\text{sen.a}}$

„ (10) „ $\text{sen.ver.a} = 1 - \sqrt{1 - \text{sen}^2 a}$

„ (11) „ $\text{cos.ver.a} = 1 - \text{sen.a}$

II.—*Determinar todas las líneas trigonométricas en funcion del coseno.*

De la fórmula (1) n° 729 resulta: $\text{sen.a} = \sqrt{1 - \cos^2 a}$

„ (4) „ $\text{tang.a} = \frac{\text{sen.a}}{\cos.a} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a}}{\cos.a}$

„ (7) „ $\cot.a = \frac{\cos.a}{\text{sen.a}} = \frac{\cos.a}{\sqrt{1 - \cos^2 a}}$

„ (5) „ $\sec.a = \frac{1}{\cos.a}$

„ (6) „ $\text{cosec.a} = \frac{1}{\text{sen.a}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 a}}$

„ (10) „ $\text{sen.ver.a} = 1 - \cos.a$

„ (11) „ $\text{cos.ver.a} = 1 - \sqrt{1 - \cos^2 a}$

III.—*Determinar todas las líneas trigonométricas en funcion de la tangente.*

Hemos visto que

$$\cot.a=\frac{1}{\text{tang.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

$$\sec^2a=1+\text{tang}^2a\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

luego $\sec.a=\sqrt{1+\text{tang}^2a}$

$$\text{cosec}^2a=1+\cot^2a\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

luego $\text{cosec.a}=\sqrt{1+\frac{1}{\text{tang}^2a}}=\frac{\sqrt{1+\text{tang}^2a}}{\text{tang.a}}$

$$\text{cosec.a}=\frac{1}{\text{sen.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

luego $\text{sen.a}=\frac{1}{\text{cosec.a}}=\frac{\text{tang.a}}{\sqrt{1+\text{tang}^2a}}$

$$\text{sen.a}=\frac{1}{\text{cos.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

luego $\text{cos.a}=\frac{1}{\text{sec.a}}=\frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}^2a}}$

$$\text{sen.ver.a}=1-\text{cos.a}=1-\frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}^2a}}$$

$$\text{cos.ver.a}=1-\text{sen.a}=1-\frac{\text{tang.a}}{\sqrt{1+\text{tang}^2a}}$$

IV.—*Determinar el valor de la tangente en funcion de cada una de las otras líneas trigonométricas.*

En funcion del seno:

$$\text{tang.a}=\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}}=\frac{\text{sen.a}}{\sqrt{1-\text{sen}^2a}}\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

Del coseno: $\text{tang.a}=\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2a}}{\text{cos.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$

De la cotangente: $\text{tang.a}=\frac{1}{\cot.a}$

De la secante: como, $\sec^2a=1+\text{tang}^2a$

se tiene: $\text{tang.a}=\sqrt{\sec^2a-1}$

De la cosecante: $\text{tang.a}=\frac{1}{\cot.a}=\frac{1}{\sqrt{\text{cosec}^2a-1}}$

Del seno verso: como, $\text{sen.ver.a}=1-\text{cos.a}$

se tiene: $\text{cos.a}=1-\text{sen.ver.a}$

sustituyendo en (b) $\text{tang.a}=\frac{\sqrt{1-\cos^2a}}{\text{cos.a}}$

resulta $\text{tang.a}=\frac{\sqrt{1-(1-\text{sen.ver.a})^2}}{1-\text{sen.ver.a}}$

Del coseno verso: como, $\text{cos.ver.a}=1-\text{sen.a}$

se tiene: $\text{sen.a}=1-\text{cos.ver.a}$

sustituyendo en (a) $\text{tang.a}=\frac{\text{sen.a}}{\sqrt{1-\text{sen}^2a}}$

resulta: $\text{tang.a}=\frac{1-\text{cos.ver.a}}{\sqrt{1-(1-\text{cos.ver.a})^2}}$

V.—*Determinar el valor del seno en funcion de cada una de las otras líneas trigonométricas.*

Al resolver los cuatro problemas anteriores, hemos hallado ya el valor del seno en funcion del coseno y de la tangente, cuyos valores son:

$$\text{sen.a}=\sqrt{1-\cos^2a}$$

$$\text{sen.a}=\frac{\text{tang.a}}{\sqrt{1+\text{tang}^2a}}$$

Para tenerlo en funcion de la *cotangente*, sabemos que: (fórmulas 6 y 3)

$$\text{sen.a}=\frac{1}{\text{cosec.a}}\text{ y }\text{cosec}^2a=1+\cot^2a$$

luego $\text{sen.a}=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2a}}$

Para determinarlo en funcion de la *secante*

$$\sec.a=\frac{1}{\cos.a}=\frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2a}}$$

elevando al cuadrado y quitando los denominadores:

$$\sec^2a-\sec^2a.\text{sen}^2a=1$$

despejando á sen^2a y extrayendo raíz, resulta:

$$\text{sen}.a=\frac{\sqrt{\sec^2a-1}}{\sec.a}$$

Para la *cosecante* tenemos:

$$\text{cosec}.a=\frac{1}{\text{sen}.a}$$

luego $$\text{sen}.a=\frac{1}{\text{cosec}.a}$$

Para el seno verso tenemos:

$$\text{sen.ver}.a=1-\cos.a=1-\sqrt{1-\text{sen}^2a}$$

de donde $$\sqrt{1-\text{sen}^2a}=1-\text{sen.ver}.a$$

elevando al cuadrado $$1-\text{sen}^2a=(1-\text{sen.ver}.a)^2$$

$$\text{sen}^2a=1-(1-\text{sen.ver}.a)^2$$

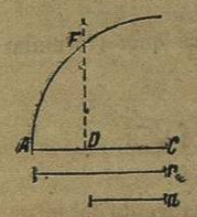
$$\text{sen}.a=\sqrt{1-(1-\text{sen.ver}.a)^2}$$

Para el coseno verso tenemos:

$$\cos.\text{ver}.a=1-\text{sen}.a$$

de la que $$\text{sen}.a=1-\cos.\text{ver}.a$$

VI.—*Construir gráficamente un arco dada la longitud del radio, y la de su coseno.*



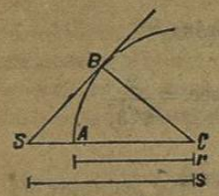
(Fig. 349)

Sea r (fig. 349) la longitud del radio, *a* la de su coseno. Haciendo centro en C y con un radio A C=r se trazará un arco de magnitud indefinida. Sobre el radio y desde el centro hácia A se llevará una parte C D igual al coseno *a*. En el punto D levantarémos una perpendicular y su interseccion con el arco determinará la magnitud del A F buscado.

Al resolver este problema hemos prescindido de los signos que pueden tener el arco y el coseno,

porque todavía no hemos explicado los signos de las líneas trigonométricas.

VII.—*Dada la magnitud r del radio* (fig. 350) *y la s de la secante, determinar gráficamente el ángulo á que corresponde.*



(Fig. 350)

Tómese A C=r: trácese un arco de círculo indefinido: prolónguese el radio C A y tomando C S=s, desde el punto S tírese la tangente S B, cuyo punto de contacto determinará el ángulo B C A buscado.

La determinacion del punto B se hace con más exactitud gráficamente valiéndose del seno ó del coseno, porque estas líneas cortan el arco próximamente en una direccion perpendicular, mientras que el punto de contacto, por finas que sean las líneas, se confunde en mayor extension con la circunferencia.

VIII.—*Determinar el valor de todas las líneas trigonométricas del arco de 30°.*

Si el arco A B (fig. 351) es de 30°, B D será el seno de este arco. Prolongando B D hasta B' por ser el radio C A perpendicular á la cuerda B B' la dividirá en dos partes iguales así como al arco B A B' (475), por consiguiente el arco B A B' será de 60°, su cuerda B B' igual al radio (497), y el seno B D de 30° igual á la mitad del radio. Se vé, pues, que el seno de un arco cualquiera es igual á la mitad de la cuerda del arco duplo, y en el caso de ser el arco de 30° siendo el radio 1 tendrémos

$$\text{sen. } 30°=\tfrac{1}{2}$$

$$\cos. 30°=\sqrt{1-\text{sen}^2 30°}=\sqrt{1-\tfrac{1}{4}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{tang.}30°=\frac{\text{sen.}30°}{\cos.30°}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\cot.30°=\frac{1}{\text{tang. }30°}=1\div\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$$\sec. 30°=\frac{1}{\cos. 30}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\tfrac{2}{3}\sqrt{3}$$

Se ve, pues, que la secante de 30° es doble de la tangente del mismo arco

$$\text{cosec.}30^\circ = \frac{1}{\text{sen. }30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\text{sen.ver.}30^\circ = 1 - \cos.30^\circ = 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos.\text{ver.}30^\circ = 1 - \text{sen.}30^\circ = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

En resúmen, *las líneas trigonométricas de* 30° serán:

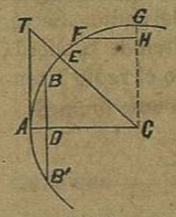
$$\text{sen.}30^\circ = \tfrac{1}{2},\ \cos. = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ \text{tang.} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \text{cot.} = \sqrt{3},\ \text{sec.} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\text{cosec.} = 2, \qquad \text{sen.ver.} = 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ \cos.\text{ver.} = \tfrac{1}{2}$$

Tomando como base que $\cos.60^\circ = \frac{1}{2}$ y siguiendo el mismo procedimiento se determinarían con facilidad los valores de todas las líneas trigonométricas del arco de 60°; pero supuesto que las líneas directas de un arco son iguales á las indirectas de su complemento, tendrémos que *las líneas trigonométricas de* 60° serán:

$$\text{sen.}60^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ \cos. = \tfrac{1}{2},\ \text{tang.} = \sqrt{3},\ \text{cot.} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \text{sec.} = 2$$

$$\text{cosec.}60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}},\ \text{sen.ver.} = \tfrac{1}{2},\ \text{y } \cos.\text{ver.} = 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$



(Fig. 351)

IX.—*Determinar las líneas trigonométricas del arco de* 45° (fig. 351).—Siendo el arco E A de 45° medida del ángulo E C A, el triángulo rectángulo T A C, de que hace parte la tangente, será isósceles, supuesto que los ángulos T y T C A, valdrán cada uno 45°. En consecuencia, T A = A C luego:

$$\text{tang.}45^\circ = 1$$

$$\text{sec.}45^\circ = \sqrt{1 + \text{tang}^2 45^\circ} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\text{sec.a} = \frac{1}{\cos.\text{a}} \qquad \text{ó } \cos.\text{a} = \frac{1}{\text{sec.a}}$$

luego $\cos.45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\text{sen.}45^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 45} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{cot.}45^\circ = \frac{1}{\text{tang.}45^\circ} = 1$$

$$\text{cosec.}45^\circ = \frac{1}{\text{sen.}45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\text{sen.ver.}45^\circ = 1 - \cos.45^\circ = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos.\text{ver.}45^\circ = 1 - \text{sen.}45^\circ = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

En resúmen, *para el arco de* 45° *las líneas trigonométricas serán:*

$$\text{sen.}45^\circ = \cos. = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{tang.}45^\circ = \text{cot.} = 1, \quad \text{sec.}45^\circ = \text{cosec.} = \sqrt{2}$$

$$\text{sen.ver.}45^\circ = \cos.\text{ver.} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

X.—*Construir un ángulo de 30, de 45 y 60 grados.*

Para construir el ángulo de 30° nos bastará tomar una recta igual á la mitad del radio, la cual nos representará el *seno* del arco buscado, y el problema se convierte en este otro: conocido el radio y el seno, determinar el arco, cuya resolucion hemos indicado (727).

Si el ángulo que trata de construirse es de 45°, tomaremos la tangente ó la cotangente de la misma magnitud que el radio.

Por último, si el ángulo que trata de construirse es de 60°, tomarémos su coseno igual á la mitad del radio, y procederémos como en el problema VI.

Valores correlativos entre los arcos y sus líneas trígonométricas.

732.—Vamos á examinar los diversos valores que pueden tomar las líneas trigonométricas cuando se hace variar el arco á que pertenecen desde 0° hasta $+\infty$ y desde 0° hasta $-\infty$, considerando sus signos, sus magnitudes y los valores que les son correlativos en arcos menores que 90°.

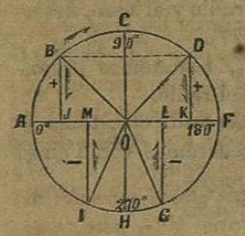
Para facilitar la inteligencia de este importante punto, que servirá de fundamento no solo á las especulaciones de la trigonometría sino tambien á otros ramos de las matemáticas, considerarémos, sucesiva-

mente, cada una de las líneas trigonométricas observando sus variaciones al pasar el arco por sus diversas magnitudes.

733.—Valores correlativos del seno.—Si en la fig. 352, tomamos el punto A como orígen de los arcos, considerando como positivos los medidos en el sentido A B C.... indicado por la flecha, (que es en el que se mueven las manitas de un reloj), y negativos los arcos medidos en direccion opuesta, al moverse el lado B O girando al rededor del punto O, segun se verifique en un sentido ó en otro, engendrará el punto B todos los arcos positivos comprendidos entre 0° y el ∞ ó los negativos entre 0° y —∞.

Ya hemos visto que el seno del ángulo A O B se determina bajando desde el extremo B, la perpendicular B J al otro lado, así es que consideramos como positivos los senos medidos en el sentido de B á J, de arriba para abajo, y reputarémos como negativos, los que se midan en sentido contrario. El radio del círculo lo seguirémos considerando igual á la unidad.

Si el punto B coincidiera con A, el arco sería nulo y el valor de la perpendicular B J, ó del seno tambien lo sería. Luego el seno de 0° es cero. Al ir aumentando el ángulo en el primer cuadrante entre A y C, el seno B J continuará siendo positivo é irá creciendo hasta llegar á ser igual á 1 cuando el arco A C es de 90°.



(Fig. 352)

Al pasar al 2° cuadrante el lado móvil del ángulo, y tomar una posicion cualquiera como O D, el seno D K decrece; pero como el sentido de la perpendicular es el mismo que entre 0 y 90°, el seno sigue siendo positivo. Al llegar á coincidir el lado móvil con O F, el ángulo y el arco tendrán el valor de 180° y el seno será nulo. Así, pues, en el 2° cuadrante, el seno decrece de + 1 á 0 siendo siempre positivo, é igual á 0 cuando el arco vale 180°.

Al pasar el lado móvil del ángulo al tercer cuadrante, como el sentido en que se baja la perpendicular G L es contrario á aquel en que se ha bajado en los dos primeros cuadrantes, resulta que el seno es negativo y va creciendo desde 0 hasta — 1, teniendo este último valor, cuando el ángulo es de 270°.

Si el lado móvil pasa de H, el seno I M en el cuarto cuadrante es negativo y va decreciendo desde — 1 hasta 0 cuando el arco llega al valor de 360°.

Si el ángulo continúa creciendo en el mismo sentido, el seno vuelve

á tomar los valores y signos que tuvo en los ángulos que son el exceso sobre 360°. Otro tanto sucederá si el ángulo se compone de cualquier múltiplo de 360° más un arco menor que la circunferencia. Resulta, pues, que si á un ángulo se le agrega 360°, 2×360°, 3×360°.... el seno no cambia de signo ni de valor, y como se llama *amplitud del período de una línea trigonométrica, el arco que puede añadirse una ó varias veces al arco á que corresponde la línea trigonométrica sin que ésta cambie de valor ni de signo*, 360° grados será la amplitud del período del seno.

734.—Consideremos ahora los arcos negativos, para lo cual tendrémos que suponer que, el punto móvil del ángulo, gira en la direccion A I H G.... Vemos que en el primer cuadrante negativo — A H, el seno es negativo lo mismo que en el segundo — H F, creciendo y decreciendo lo mismo que en los dos primeros cuadrantes positivos. En el tercero y cuarto cuadrantes negativos, F C y C A, el seno es positivo, esto es, tiene signo contrario al que tenia cuando el arco era positivo, y crece y decrece lo mismo que cuando considerábamos el tercero y cuarto cuadrantes positivos. En resúmen, cuando el arco es negativo, el seno es el mismo que corresponde al arco positivo, pero tiene signo contrario, lo cual se cifra en la siguiente ecuacion:

$$\text{sen.}(-a) = -\text{sen.}a$$

735.—Véamos qué relacion existe entre los senos de los *arcos suplementarios*. El seno del ángulo A O D es D K. El suplemento de A O D es D O F. El arco D F=A B, por ser arcos del mismo círculo comprendidos entre paralelas, y como el seno de A B, que es B J=D K, por lados opuestos del paralelógramo D J, se infiere que *el seno de un ángulo es igual y del mismo signo que el de su suplemento.*

De la inspeccion de la figura, resulta igualmente que el seno del arco A C F G=180°+F G es el mismo que el del arco F G, pero tomado con signo contrario. Si seguimos agregando al arco 180°, el seno va teniendo el mismo valor absoluto, pero alternativamente cambia de signo. En consecuencia, llamando á un arco cualquiera *a*, se tiene que:

$$\text{sen.}a = \text{sen.}(180° - a)$$

y

$$\text{sen.}a = -\text{sen.}(180° + a)$$

736.—Haremos notar, que cuando el radio del círculo se ha tomado igual á la unidad, todos los valores que puede adquirir el seno, están comprendidos entre + 1 y — 1 cuyos límites no puede sobrepasar. Para alcanzar estos límites, basta que el ángulo cambie 180°, pasando de