3° Como la secante es positiva en el 1° y 4° cuadrante y 2 = sec. 60° la secante igual á 2 corresponderá á los arcos de 60° y 360°—60 = 300° y á todos los que resulten de agregarles n. veces 360°.

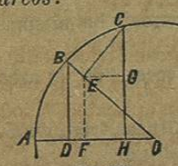
IX.—¿A qué arcos corresponden: 1° cotangente $= -\sqrt{3}$, y 2° cos. $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$?

1° Considerando los arcos positivos, teniendo presente que la cotangente es negativa en el 2° y 4° cuadrantes, que cot. 30° $= \sqrt{3}$ y que el período de la cotangente es el arco de 180°, resulta que los arcos á que pertenece cot. $= -\sqrt{3}$ serán: $x = -30° + n.\ 180°$. Los arcos negativos que tienen la misma cotangente, serán $-x = -30 - n.\ 180°$.

2° Los arcos á que pertenece cos. $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$ serán $\pm$ 45° y $\pm$ 315° = 360°—45 y todos los que resulten de agregarles $\pm$ n. 360°.

### Fórmulas generales de las líneas trigonométricas.

765.—Formulas relativas al seno y coseno de la suma de dos arcos.—*Conocidos los senos y cosenos de dos arcos* a *y* b, *se trata de determinar la expresion del seno y coseno de la suma y diferencia de estos arcos.*



(Fig. 360)

Sea AB = a (fig. 360) y BC = b; tendremos AC = a + b

BD = sen. a, D O = cos. a, C E = sen. b, E O = cos. b

C H = sen. (a + b), H O = cos. (a + b)

Por el punto E, pié del seno del arco C B, tiremos E F perpendicular á A O y E G paralela á este radio, y nos resultarán los triángulos E F O y E G C semejantes á B D O, el primero por ser E F paralela á B D y el segundo por ser los lados de E G C perpendiculares á los de B D O. De la inspeccion de la figura resulta:

C H = sen. (a + b) = E F + C G .....(A)
H O = cos. (a + b) = O F — E G .....(B)

Vamos á determinar los valores de las cuatro rectas, E F, C G, O F y E G, en funcion de los senos y cosenos de *a* y de *b*, á cuyo fin compararemos los triángulos E F O y E G C con su semejante B D O. Así, pues,



E F : E O :: B D : B O ó E F : cos. b :: sen. a : r, luego $EF = \frac{\text{sen. a cos. b}}{r}$

C G : C E :: D O : B O  C G : sen. b :: cos. a : r  $CG = \frac{\text{sen. b cos. a}}{r}$

O F : E O :: D O : B O  O F : cos. b :: cos. a : r  $OF = \frac{\text{cos. a cos. b}}{r}$

E G : C E :: B D : B O  E G : sen. b :: sen. a : r  $EG = \frac{\text{sen. a sen. b}}{r}$

Sustituyendo los valores de estas cuatro líneas en las ecuaciones (A) y (B), resulta:

$$\text{sen.}(a+b) = \frac{\text{sen. a cos. b} + \text{sen. b cos. a}}{r}$$

$$\cos.(a+b) = \frac{\text{cos. a cos. b} - \text{sen. a sen. b}}{r}$$

y haciendo r = 1, como anteriormente, á fin de simplificar nuestras fórmulas:

sen. (a + b) = sen. a cos. b + sen. b cos. a ...(12)
cos. (a + b) = cos. a cos. b — sen. a sen. b....(13)

Como las fórmulas que anteceden se han sacado geométricamente de una figura en la que se ha supuesto a + b < 90° y en la que los arcos son positivos, vamos á demostrar analíticamente que son aplicables á todos los casos cualesquiera que sean los valores de dichos arcos. Para llegar á esta conclusion general demostraremos: 1° que las expresadas fórmulas subsisten para todos los valores de *a* y de *b* comprendidos entre 0° y 90°; 2° que subsisten igualmente cuando á cualquiera de los arcos se le agrega 90°; 3° que son aplicables para todos los valores positivos de los arcos; y 4° que lo son igualmente para los valores negativos.

1°.—*Las fórmulas* (12) *y* (13) *subsisten para todos los valores de* a *y de* b *comprendidos entre* 0° *y* 90°.

Habiéndose establecido estas fórmulas para el caso en que a + b < 90°, vamos á suponer que se tenga:

a + b > 90°

Sean a' y b' los complementos respectivos de *a* y de *b*, tendremos:

$$a=90°-a'$$
$$b=90°-b'$$

Sumando estas ecuaciones: $a+b=180°-(a'+b')$. Así, pues, $(a+b)$ es suplemento de $(a'+b')$.

Despejando $\quad a'+b'=180°-(a+b)$

y como $(a+b)>90°$ se infiere $a'+b'<90°$, por lo cual las fórmulas (12) y (13) serán aplicables para los arcos a' y b'. Esto es,

$$\text{sen.}(a'+b')=\text{sen.}a'\ \cos.b'+\text{sen.}b'\ \cos.a'$$

y como el seno de un arco $(a'+b')$ es igual y del mismo signo que el de su suplemento $(a+b)$, y el seno de un arco es igual al coseno de su complemento y recíprocamente, sustituyendo en la última expresion, resulta:

$$\text{sen.}(a+b)=\cos.a\ \text{sen.}b+\cos.b\ \text{sen.}a$$

ordenando $\quad \text{sen.}(a+b)=\text{sen.}a\ \cos.b+\text{sen.}b\ \cos.a$

luego la fórmula (12) subsiste cuando $(a+b)>90°$ lo mismo que cuando era menor que 90°.

Siendo aplicable la fórmula (13) demostrada geométricamente para los arcos a' y b' tendremos:

$$\cos.(a'+b')=\cos.a'\ \cos.b'-\text{sen.}a'\ \text{sen.}b'$$

Como el coseno de un arco $(a'+b')$ es igual al coseno de su suplemento $(a+b)$ tomado con signo contrario, y el seno de un arco es igual al coseno de su complemento y recíprocamente, sustituyendo, resulta:

$$-\cos.(a+b)=\text{sen.}a\ \text{sen.}b-\cos.a\ \cos.b$$

cambiando signos $\quad \cos.(a+b)=\cos.a\ \cos.b-\text{sen.}a\ \text{sen.}b$

luego la fórmula (13) subsiste para el caso en que $(a+b)>90°$.

2º—*Las fórmulas* (12) *y* (13) *subsisten igualmente cuando á cualquiera de los arcos* a *ó* b *se le agrega* 90°.

Por la hipótesis, las fórmulas (12) y (13) siendo aplicables á los arcos *a* y *b*, se tiene:

$$\text{sen.}(a+b)=\text{sen.}a\ \cos.b+\text{sen.}b\ \cos.a$$
$$\cos.(a+b)=\cos.a\ \cos.b-\text{sen.}a\ \text{sen.}b$$



Si á uno de estos arcos, *a* por ejemplo, le agregamos 90°, tendremos:

$$a'=a+90°$$

de donde $\quad a=a'-90°$

Sustituyendo en las fórmulas anteriores, se tiene:

$$\text{sen.}(a'+b-90°)=\text{sen.}(a'-90°)\ \cos.b+\text{sen.}b\ \cos.(a'-90°)\ldots.(A)$$
$$\cos.(a'+b-90°)=\cos.(a'-90°)\ \cos.b-\text{sen.}(a'-90°)\ \text{sen}\ b\ldots.(B)$$

Fundándonos en que $\text{sen.}(-a)=-\text{sen.}a$ y en que $\cos.(-a)=\cos.a$, y en que $\text{sen}\ (90°-a)=\cos.a$ y en que $\cos.(90°-a)=\text{sen.}a$, tendremos:

$$\text{sen.}(a'+b-90°)=-\text{sen.}(90°-(a'+b))=-\cos.(a'+b)$$
$$\text{sen.}(a'-90°)=-\text{sen.}(90°-a')=-\cos.a'$$
$$\cos.(a'-90°)=\cos.(90°-a')=\text{sen.}a'$$
$$\cos.(a'+b-90°)=\cos.(90°-(a'+b))=\text{sen.}(a+b)$$

y sustituyendo se trasformará

la expresion (A) en $\quad -\cos.(a'+b)=-\cos.a'\ \cos.b+\text{sen.}b\ \text{sen.}a'$

cambiando signos: $\quad \cos.(a'+b)=\cos.a'\ \cos.b-\text{sen.}a'\ \text{sen.}b$

y la (B) en $\quad \text{sen.}(a'+b)=\text{sen.}a'\ \cos.b+\cos.a'\ \text{sen.}b$

luego las fórmulas (12) y (13) subsisten igualmente cuando á uno de los arcos *a* se le agrega 90°, y se trasforma en *a'*.

3º—*Las fórmulas* (12) *y* (13) *son aplicables para todos los valores positivos de los arcos* a *y* b.

Supongamos, en efecto, que los arcos positivos *a* y *b* contengan respectivamente el primero *m* cuadrantes y el segundo *n* cuadrantes, de modo que

$$a=m.90°+a'$$
$$b=n.90°+b'$$

Como a' y b' son ambos menores que 90°, para ellos serán aplicables las fórmulas (12) y (13), y se tendrá:

$$\text{sen.}(a'+b')=\text{sen.}a'\ \cos.b'+\text{sen.}b'\ \cos.a'$$
$$\cos.(a'+b')=\cos.a'\ \cos.b'-\text{sen.}a'\ \text{sen.}b'$$

Ahora bien: como segun el principio 3°, estas fórmulas subsisten si sucesivamente se agrega á a' ó b' una, dos, tres.... etc., veces, 90°, resulta que subsistirán para el caso en que *a'* se convierta en a'+m 90°=a y b' se cambie en b'+n 90°=b, en consecuencia las fórmulas (12) y (13) son aplicables á dos arcos positivos, cualquiera que sea su magnitud.

4°—*Las fórmulas* (12) *y* (13) *son tambien aplicables para cuando* a *y* b *son negativos.*

Supongamos que cualquiera de estos arcos, ó ambos sean negativos, y designemos por *m* y *n* números bastante grandes para que m.360°—a=a' y n.360°—b=b' dén los arcos *a'* y *b'* positivos. Para estos arcos serán aplicables las fórmulas, (12) y (13) y se tendrá:

sen.(a'+b')=sen.a' cos.b'+sen.b' cos.a'.....(12)

sustituyendo por a' y b' sus valores:

a'=m.360°—a y b'=n.360°—b

sen.[(m+n)360°—(a+b)]=sen.(m.360°—a)cos.(n.360°—b)
+sen.(n.360°—b)cos.(m.360°—a)

Recordando que sen.m.360°—a=—sen.a

y que cos.m.360°—a=+cos.a

tendremos:

—sen.(a+b)=—sen.a cos.b—sen.b cos.a

y cambiando signos resulta:

sen.(a+b)=sen.a cos.b+sen.b cos.a

que es la fórmula (12) aplicada á los arcos negativos *a* y *b*.

Ahora cos.(a'+b')=cos.a' cos.b'—sen.a' sen.b'....(13)

sustituyendo:

cos.[(m+n)360°—(a+b)]=cos.(m.360°—a)cos.(n.360°—b)
—sen.(m.360°—a)sen.(n.360°—b)

ó cos.(a+b)=cos.a cos.b—sen.a sen. b

que es la fórmula (13) aplicada á los arcos negativos.

En consecuencia, la generalidad de las fórmulas (12) y (13) queda completamente establecida.



De paso haremos notar, que como se habrá observado al tratar del 2° principio, la fórmula (13) puede deducirse de la (12) y recíprocamente reemplazando *a* por 90°+a, ó *b* por 90°+b.

766.—Seno y coseno de la diferencia de dos arcos.—Si en las fórmulas (12) y (13) reemplazamos +b por —b, y recordamos que sen.(—a)=—sen.a y que cos.(—a)=cos.a, tendremos:

sen.(a—b)=sen.a cos.b—sen.b cos.a.....(14)
cos.(a—b)=cos.a cos.b+sen.a sen.b.....(15)

767.—Seno y coseno de la suma y diferencia de varios arcos.—Si en la fórmula (12) reemplazamos el arco *b* por *b+c*, tendremos:

sen.(a+b+c)=sen.a cos.(b+c)+sen.(b+c)cos.a

poniendo por cos.(b+c) y sen.(b+c) sus valores conforme á las fórmulas (12) y (13) se tiene:

sen.(a+b+c)=sen.a(cos.b cos.c—sen.b sen.c)+(sen.b cos.c+sen.c cos.b)cos.a

sen.(a+b+c)=sen.a cos.b. cos.c+sen.b cos.a cos.c+sen.c cos.a cos.b —sen.a sen.b sen.c.....(16)

Si en esta fórmula reemplazáramos el arco *c* por *c+d*, fácilmente obtendriamos la expresion del sen.(a+b+c+d), y se concibe el procedimiento que habria que emplear para obtener el seno de la suma de un número cualquiera de arcos.

Ahora, si en la fórmula (13) reemplazamos *b* por *b+c*, tendremos:

cos.(a+b+c)+cos.a cos.(b+c)—sen.a sen.(b+c)

poniendo por cos.[b+c] y por sen.[b+c] sus valores, se tiene:

cos.[a+b+c]=cos.a [cos.b cos.c—sen.b sen.c]—sen.a [sen.b cos.c +sen.c cos.b]

cos.[a+b+c]=cos.a cos.b cos.c—cos.a sen.b sen.c—cos.b sen.a sen.c —cos.c sen.a sen.b.....[17]

Si en las fórmulas [16] y [17] cambiamos signos á los arcos *b* y *c*, resulta:

$$\text{sen.}[a-b-c]=\text{sen.}a\ \cos.b\ \cos.c-\text{sen.}b\ \cos.a\ \cos.c$$
$$-\text{sen.}c\ \cos.a\ \cos.b-\text{sen.}a\ \text{sen.}b\ \text{sen.}c\ \ldots\ldots\ [18]$$
$$\cos.[a-b-c]=\cos.a\ \cos.b\ \cos.c-\cos.a\ \text{sen.}b\ \text{sen.}c$$
$$+\cos.b\ \text{sen.}a\ \text{sen.}c+\cos.c\ \text{sen.}a\ \text{sen.}b\ldots\ldots\ [19]$$

De este modo pueden obtenerse las expresiones del seno y coseno de la diferencia entre un arco *a* y un número cualquiera *b, c, d*....

768.—Tangente y cotangente de la suma y la diferencia.—Hemos visto [729] que

$\text{tang.}a=\dfrac{\text{sen.}a}{\cos.a}$, luego

$$\text{tang.}[a+b]=\frac{\text{sen.}[a+b]}{\cos.[a+b]}$$

poniendo por sen.[a+b] y por cos.[a+b] sus valores [12] y [13]

$$\text{tang.}[a+b]=\frac{\text{sen.}a\ \cos.b+\text{sen.}b\ \cos.a}{\cos.a\ \cos.b-\text{sen.}a\ \text{sen.}b}$$

dividiendo todos los términos por *cos.a cos.b*, se tiene:

$$\text{tang.}[a+b]=\frac{\dfrac{\text{sen.}a\ \cos.b}{\cos.a\ \cos.b}+\dfrac{\text{sen.}b\ \cos.a}{\cos.a\ \cos.b}}{\dfrac{\cos.a\ \cos.b}{\cos.a\ \cos.b}-\dfrac{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}{\cos.a\ \cos.b}}$$

reduciendo, y teniendo presente que $\dfrac{\text{sen.}a}{\cos.a}=\text{tang.}a$, resulta:

$$\text{tang.}[a+b]=\frac{\text{tang.}a+\text{tang.}b}{1-\text{tang.}a\ \text{tang..}b}\ldots\ldots\ldots\ (20)$$

Si en esta expresion cambiamos +b por —b, y recordamos que tang.[—b]=—tang.b, se tiene:

$$\text{tang.}[a-b]=\frac{\text{tang.}a-\text{tang.}b}{1+\text{tang.}a\ \text{tang.}b}\ldots\ [21]$$

Si en la fórmula [20] reemplazamos el arco *b* por *b+c*, tendremos:



$$\text{tang.}[a+b+c]=\frac{\text{tang.}a+\text{tang.}[b+c]}{1-\text{tang.}a\ \text{tang.}[b+c]}$$

poniendo por tang.[b+c] su valor

$$\text{tang.}[a+b+c]=\frac{\text{tang.}a+\dfrac{\text{tang.}b+\text{tang.}c}{1-\text{tang.}b\ \text{tang.}c}}{1-\text{tang.}a\dfrac{\text{tang.}b+\text{tang.}c}{1-\text{tang.}b\ \text{tang.}c}}$$

incorporando el entero al quebrado, tanto en el numerador como en el denominador

$$\text{tang.}[a+b+c]=\frac{\dfrac{\text{tang.}a-\text{tang.}a\ \text{tang.}b\ \text{tang.}c+\text{tang.}b+\text{tang.}c}{1-\text{tang.}b\ \text{tang.}c}}{\dfrac{1-\text{tang.}b\ \text{tang.}c-\text{tang.}a\ \text{tang.}b-\text{tang.}a\ \text{tang.}c}{1-\text{tang.}b\ \text{tang.}c}}$$

multiplicando el numerador y el denominador por (1—*tang.b tang.c*) y ordenando los términos resulta:

$$\text{tang.}\ (a+b+c)=\frac{\text{tang.}a+\text{tang.}b+\text{tang.}c-\text{tang.}a\ \text{tang.}b\ \text{tang.}c}{1-\text{tang.}a\ \text{tang.}b-\text{tang.}a\ \text{tang.}c-\text{tang.}b\ \text{tang.}c}\ (22)$$

Si cambiamos los signos á los arcos *b* y *c*, sus tangentes serán negativas y tendremos:

$$\text{tang.}\ (a-b-c)=\frac{\text{tang.}a-\text{tang.}b-\text{tang.}c-\text{tang.}a\ \text{tang.}b\ \text{tang.}c}{1+\text{tang.}a\ \text{tang.}b+\text{tang.}a\ \text{tang.}c-\text{tang.}b\ \text{tang.}c}\ (23)$$

Se comprende que empleando el mismo procedimiento obtendriamos las expresiones de tang.(a+b+c+d+...) y tang.(a—b—c—d—....)

Como $\cot.a=\dfrac{\cos.a}{\text{sen.}a}$, tendremos:

$$\cot.(a+b)=\frac{\cos.\ (a+b)}{\text{sen.}\ (a+b)}=\frac{\cos.a\ \cos.b-\text{sen.}a\ \text{sen.}b}{\text{sen.}a\ \cos.b+\text{sen.}b\ \cos.a}$$

dividiendo todos los términos por sen.a sen.b

$$\cot.\ (a+b)=\frac{\dfrac{\cos.a\ \cos.b}{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}-\dfrac{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}}{\dfrac{\text{sen.}a\ \cos.b}{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}+\dfrac{\text{sen.}b\ \cos.a}{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}}$$

reduciendo, y en virtud de que $\frac{\cos.a}{\text{sen}.a}=\cot.a$, resulta:

$$\cot.\ (a+b)=\frac{\cot.a\ \cot.b-1}{\cot.b+\cot.a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(24)$$

Si se reemplaza $+b$ por $-b$, y se tiene presente que $\cot.(-a)=-\cot.a$, se tiene:

$$\cot.\ (a-b)=\frac{-\cot.a\ \cot.b-1}{-\cot.b+\cot.a}$$

cambiando signos al numerador y al denominador, resulta:

$$\cot.\ (a-b)=\frac{\cot.a\ \cot.b+1}{\cot.b-\cot.a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(25)$$

Empleando el mismo procedimiento que con la tangente, se pueden fácilmente determinar las expresiones de $\cot.(a+b+c)$, $\cot.(a-b-c)$, $\cot.\ (a\pm b\pm c\pm d\ldots.)$

769.—Fórmulas de los arcos múltiplos.—Si en la expresion

$$\text{sen}.\ (a+b)=\text{sen}.a\ \cos.b+\text{sen}.b\ \cos.a$$

hacemos $b=a$, resultará:

$$\text{sen}.\ 2\ a=2\ \text{sen}.a\ \cos.a\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(26)$$

Si en la expresion:

$$\cos.\ (a+b)=\cos.a\ \cos.b-\text{sen}.a\ \text{sen}.b$$

hacemos $b=a$, resultará:

$$\cos.\ 2\ a=\cos^2a-\text{sen}^2a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(27)$$

Para obtener sen.3 a haremos en la expresion (12) de sen. (a+b), $b=2\,a$, y tendremos:

$$\text{sen}.\ 3\ a=\text{sen}.a\ \cos.\ 2\ a+\text{sen}.\ 2\ a\ \cos.a$$

sustituyendo por sen.2 a y por cos.2 a sus valores (26) y (27):

$$\begin{aligned}\text{sen}.\ 3\ a&=\text{sen}.a\ (\cos^2a-\text{sen}^2a)+2\ \text{sen}.a.\cos.a.\cos.a\\&=\text{sen}.a\ \cos^2a-\text{sen}^3a+2\ \text{sen}.a\ \cos^2a=3\ \text{sen}.a\ \cos^2a-\text{sen}^3a\\&=3\ \text{sen}.a\ (1-\text{sen}^2a)-\text{sen}^3a\end{aligned}$$



$$\text{sen}.\ 3\ a=3\ \text{sen}.a-4\ \text{sen}^3a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(28)$$

Para obtener cos.3 a, en la expresion (13) de cos. (a+b) haremos b=2 a, y tendremos:

$$\cos.3\ a=\cos.a\ \cos.2\ a-\text{sen}.a\ \text{sen}.2\ a$$

Sustituyendo por sen.2 a y por cos.2 a sus valores, se tiene:

$$\begin{aligned}\cos.3\ a&=\cos.a\ (\cos^2a-\text{sen}^2a)-\text{sen}.a\ 2\ \text{sen}.a\ \cos.a\\&=\cos^3a-\cos.a\ \text{sen}^2a-2\ \text{sen}^2a\ \cos.a\\&=\cos^3a-3\ \cos.a\ \text{sen}^2a=\cos^3a-3\ \cos.a\ (1-\cos^2a)\end{aligned}$$

$$\cos.3\ a=4\ \cos^3a-3\ \cos.a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(29)$$

Ampliando este procedimiento pueden obtenerse las fórmulas de los senos y cosenos de los arcos 4 a, 5 a, etc.

Si en la expresion (20)

$$\text{tang}.\ (a+b)=\frac{\text{tang}.a+\text{tang}.b}{1-\text{tang}.a\text{tang}.b}$$

hacemos $b=a$, se tiene

$$\text{tang}.\ 2\ a=\frac{2\ \text{tang}.a}{1-\text{tang}^2a}\ldots\ldots\ldots(30)$$

Si en la misma expresion (20) hacemos $b=2\ a$, tendremos:

$$\text{tang}.\ 3\ a=\frac{\text{tang}.\ a+\text{tang}.\ 2\ a}{1-\text{tang}.a\ \text{tang}.2\ a}=\frac{\text{tang}.a+\dfrac{2\ \text{tang}.a}{1-\text{tang}^2a}}{1-\text{tang}.a\dfrac{2\ \text{tang}.a}{1-\text{tang}^2a}}$$

reduciendo los enteros á la forma de los quebrados que los acompañan, y suprimiendo despues el denominador $1-\text{tang}^2a$, que es comun á los dos términos del quebrado, resulta:

$$\text{tang}.\ 3\ a=\frac{3\ \text{tang}.a-\text{tang}^3a}{1-3\ \text{tang}^2a}\ldots\ldots\ldots\ldots(31)$$

Si en la fórmula (24)

$$\cot.\ (a+b)=\frac{\cot.a\ \cot.b-1}{\cot.b+\cot.a}$$

hacemos $b=a$, se tiene:

$$\cot.\ 2\ a=\frac{\cot^2a-1}{2\ \cot.a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(32)$$

Dividiendo todos los términos de esta expresion por *cot.a*, se le puede dar otra forma en que suele usarse:

$$\cot.\ 2\ a = \tfrac{1}{2}\ (\cot.a - \tan g.a)$$

Si en la expresion (31) sustituimos por las tangentes sus valores en funcion de la cotangente,

$$\tan g.a = \frac{1}{\cot.a}$$

tendremos:

$$\frac{1}{\cot.\ 3\ a} = \frac{\dfrac{3}{\cot.a} - \dfrac{1}{\cot^3 a}}{1 - \dfrac{3}{\cot^2 a}} = \frac{\dfrac{3\ \cot^2 a}{\cot^3 a} - \dfrac{1}{\cot^3 a}}{\dfrac{\cot^3 a}{\cot^3 a} - \dfrac{3\ \cot.a}{\cot^3 a}}$$

ó

$$\frac{1}{\cot.\ 3\ a} = \frac{3\ \cot^2 a - 1}{\cot^3 a - 3\ \cot.a}$$

luego

$$\cot.\ 3\ a = \frac{\cot^3 a - 3\ \cot.a}{3\ \cot^2 a - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

770.—Formulas de los arcos de la mitad.—Para determinar el seno de un arco en funcion del seno y coseno de la mitad, si en la expresion (26)

$$\text{sen.}\ 2\ a = 2\ \text{sen.}a\ \cos.a$$

reemplazamos el arco *a* por $\frac{1}{2}\ a$, tendrémos:

$$\text{sen.}a = 2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ a\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

Para determinar el coseno en funcion del seno y coseno de la mitad de un arco, si en la fórmula (27)

$$\cos.\ 2\ a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$

reemplazamos el arco *a* por $\frac{1}{2}\ a$, tendrémos:

$$\cos.a = \cos^2 \tfrac{1}{2}\ a - \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

Por otra parte (729) $1 = \text{sen}^2 \frac{1}{2}\ a + \cos^2 \frac{1}{2}\ a$

Con el objeto de eliminar $\cos^2 \frac{1}{2}\ a$, que tiene el mismo signo en estas ecuaciones, restarémos de la última ecuacion la (35) y se tiene:

$$1 - \cos.a = 2\ \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}\ a$$



de la que resulta:

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ a = \sqrt{\frac{1 - \cos.a}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Para eliminar $\text{sen}^2 \frac{1}{2}\ a$, que tiene signos diferentes en las mismas ecuaciones, las sumarémos, y se tiene:

$$1 + \cos.a = 2\ \cos^2 \tfrac{1}{2}\ a$$

de la que resulta: $\cos.\ \frac{1}{2}\ a = \sqrt{\dfrac{1 + \cos.a}{2}}$ .....(37)

Estando expresados el seno y coseno de la mitad por un radical de 2° grado, implícitamente precedido del signo ±, cada una de estas líneas tiene dos valores iguales y de signo contrario, habiéndonos resultado ambas en funcion del coseno de *a*. La razon de esto es, que todo coseno corresponde á dos arcos [738] que podemos representar por el arco n.360° + a y n.360° — a, en cuyas expresiones *n* es un número entero cualquiera que puede ser nulo. De consiguiente, si se busca sen $\frac{1}{2}$ a ó cos $\frac{1}{2}$ a en funcion de cos.a, el cálculo debe dar al mismo tiempo los senos así como los cosenos de las mitades de todos los arcos comprendidos en las expresiones n.360° + a y n.360° — a, es decir, que se deben tener todos los valores comprendidos en

$$\text{sen.}\left(\frac{\text{n. } 360^\circ \pm a}{2}\right) \text{ ó en } \cos.\left(\frac{\text{n. } 360^\circ \pm a}{2}\right)$$

En la práctica, cuando se conoce el valor numérico del arco *a* ó por lo menos el cuadrante en que termina, valiéndonos de los valores correlativos del seno y coseno, siempre es fácil determinar el signo que debe tomarse. Por ejemplo, si $a < 90^\circ$, que es el caso mas comun, $\frac{a}{2} < 45$, y como el seno y coseno de un arco menor que 90° son positivos, tomarémos para sen. $\frac{1}{2}$ a y cos. $\frac{1}{2}$ a el signo + del radical. Esto es, nuestras fórmulas, $\text{sen}\ \frac{1}{2}\ a = \sqrt{\dfrac{1 - \cos.a}{2}}$ y $\cos\ \frac{1}{2}\ a = \sqrt{\dfrac{1 + \cos.a}{2}}$ son las adecuadas para el caso en que el arco *a* sea menor que 90°.

Considerando el triángulo rectángulo formado por el radio, el seno y el coseno, si el ángulo del centro es menor que 45°, el ángulo formado por el radio y el seno será mayor que 45°, y como al ángulo mayor está opuesto el mayor lado, resulta que para arcos menores que 45° el coseno es mayor que el seno.

En las fórmulas obtenidas, el seno y coseno de la mitad están en funcion de cos.a. Si se quieren determinar en funcion del seno procederemos como sigue. Se sabe que

$$1=\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\,a+\cos^2\tfrac{1}{2}\,a$$
$$\text{sen.}a=2\ \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\,a\ \cos\tfrac{1}{2}\,a$$

Si se suman estas dos ecuaciones, se tiene:

$$1+\text{sen.}a=\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\,a+2\ \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\,a\ \cos\tfrac{1}{2}\,a+\cos^2\tfrac{1}{2}\,a=(\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\,a+\cos.\tfrac{1}{2}\,a)^2\ldots[A]$$

Si se restan las mismas ecuaciones, se tiene:

$$1-\text{sen.}a=\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\,a-2\ \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\,a\ \cos\tfrac{1}{2}\,a+\cos^2\tfrac{1}{2}\,a=(\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\,a-\cos.\tfrac{1}{2}\,a)^2\ldots[B]$$

Extrayendo raiz á las ecuaciones [A] y [B] resulta:

$$\sqrt{1+\text{sen.}a}=\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\,a+\cos.\tfrac{1}{2}a$$
$$\sqrt{1-\text{sen.}a}=\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,a-\cos.\ \tfrac{1}{2}\,a$$

Conociendo la suma y la diferencia de sen. $\frac{1}{2}$ a y cos $\frac{1}{2}$ a, la mayor de estas cantidades será igual á la mitad de la suma más la mitad de la diferencia, y la menor á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia (226 V) Así, pues:

Cuando sen $\frac{1}{2}$ a>cos.$\frac{1}{2}$ a.. $\begin{cases}\text{sen.}\tfrac{1}{2}\,a=\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen.}a}+\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen.}a}\\ \cos.\tfrac{1}{2}\,a=\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen.}a}-\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen.}a}\end{cases}$

Cuando sen $\frac{1}{2}$ a<cos.$\frac{1}{2}$ a.. $\begin{cases}\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,a=\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen.}a}-\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen.}a}\\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,a=\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen.}a}+\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen.}a}\end{cases}$

Estas expresiones pueden reasumirse en las dos siguientes:

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,a=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen.}a}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen.}a}\ \ldots\ldots(38)$$
$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\,a=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen.}a}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen.}a}\ \ldots\ldots(39)$$

Cuyos signos se determinarán conociendo el valor del arco *a* y sabiendo si el seno de $\frac{1}{2}$ a es mayor ó menor que cos. $\frac{1}{2}$ a, segun acabamos de explicarlo.

771.—Tangente de la mitad.—Fundándonos en la expresion [4] (729) $\text{tang.}a=\frac{\text{sen.}a}{\cos.a}$, tenemos:



$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a=\frac{\text{sen}\ \frac{1}{2}\,a}{\cos\ \frac{1}{2}\,a}$$

Reemplazando por sen. $\frac{1}{2}$ a y por cos. $\frac{1}{2}$ a sus valores [36] y [37] y reduciendo resulta:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{1-\cos.a}{1+\cos.a}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(40)$$

á esta expresion se le suele dar otras formas. Multiplicando los dos términos dentro del radical por (1+cos.a), se tiene:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{(1-\cos\,a)\ (1+\cos.a)}{(1+\cos.a)^2}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2a}}{1+\cos.a}=\frac{\sqrt{\text{sen}^2a}}{1+\cos.a}$$

luego:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a=\frac{\text{sen.}a}{1+\cos.a}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(41)$$

Si los términos del quebrado de la expresion (40) se multiplican por (1—cos.a), resulta:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a=\frac{1-\cos.a}{\text{sen.}a}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(42)$$

Si se quiere determinar el valor de tang. $\frac{1}{2}$ a en funcion de *tang.a*, procederémos como sigue:

La expresion (30) dá: $\text{tang.}\ 2a=\frac{2\ \text{tang.}a}{1-\text{tang}^2a}$

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

Reemplazando el arco a por $\frac{1}{2}$ a, resulta:

$$\text{tang.}a=\frac{2\ \text{tang.}\ \frac{1}{2}\,a}{1-\text{tang}^2\frac{1}{2}\,a}$$

se trata, pues, de despejar á tang. $\frac{1}{2}$ a de esta ecuacion. Quitando el denominador, se tiene:

$$\text{tang.}a-\text{tang.}a\ \text{tang}^2\tfrac{1}{2}\,a=2\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a$$

trasladando y dividiendo todos los términos por tang.a, resulta:

$$1=\text{tang}^2\ \tfrac{1}{2}\,a+\frac{2}{\text{tang.}a}\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a$$

Despejando á tang. $\frac{1}{2}$ a en esta ecuacion mixta de segundo grado resulta:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a=\frac{-1}{\text{tang.}a}\pm\sqrt{\frac{1}{\text{tang}^2a}+1}$$

incorporando el entero al quebrado dentro del radical y sacando fuera de éste el denominador, se tiene definitivamente:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,a = -\frac{1}{\text{tang.a}} \pm \frac{1}{\text{tang.a}}\sqrt{1+\text{tang}^2\text{a}} \ldots\ldots\ldots (43)$$

De esta expresion, resultan dos valores para tang. $\frac{1}{2}$ a segun sea el signo que se tome del radical, lo cual procede de que como hemos visto (745) toda tangente corresponde igualmente al arco $a$ y á $180° + a$ siendo como es $180°$ la amplitud del período de la tangente; pero cuando se conoce el valor del arco $a$ ó por lo menos el cuadrante en que termina, desde luego puede determinarse el signo que debe adoptarse para tang. $\frac{1}{2}$ a. Por ejemplo, si $a < 90°$, tang. $\frac{1}{2}$ a, lo mismo que tang. a serán positivas y la fórmula correspondiente debe ser en este caso:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,a = -\frac{1}{\text{tang.a}} + \frac{1}{\text{tang.a}}\sqrt{1+\text{tang}^2\text{a}}$$

772.—Cotangente de la mitad.—Siendo el valor de $\text{cot.a} = \frac{\text{cos.a}}{\text{sen.a}}$,

se tiene $$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\,a = \frac{\cos \frac{1}{2}\,a}{\text{sen } \frac{1}{2}\,a}$$

reemplazando por cos. $\frac{1}{2}$ a y sen $\frac{1}{2}$ a sus valores (37) y (36) y reduciendo, resulta:

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{1+\text{cos. a}}{1-\text{cos. a}}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (44)$$

si se multiplican los dos términos del quebrado por [ 1 + cos. a ], resulta:

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\,a = \frac{1+\text{cos.a}}{\text{sen.a}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

y si se multiplican por [1—cos.a], se tendrá:

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\,a = \frac{\text{sen.a}}{1-\text{cos.a}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (46)$$

Si se quiere el valor de cot. $\frac{1}{2}$ a en funcion de cot. a, procederémos como sigue:

Fórmula (32) $$\text{cot. } 2\,a = \frac{\text{cot}^2\text{a}-1}{2\ \text{cot.a}}$$



reemplazando el arco a por $\frac{1}{2}$ a, se tiene:

$$\text{cot. } a = \frac{\text{cot.}^2\,\frac{1}{2}\,a-1}{2\ \text{cot. } \frac{1}{2}\,a}$$

quitando el denominador: $2\ \text{cot.a cot. } \frac{1}{2}\,a = \text{cot}^2\,\frac{1}{2}\,a - 1$

trasladando: $1 = \text{cot}^2\,\frac{1}{2}\,a - 2\ \text{cot.a cot. } \frac{1}{2}\,a$

despejando á cot. $\frac{1}{2}$ a de esta ecuacion mixta de segundo grado, resulta:

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\,a = \text{cot.a} \pm \sqrt{\text{cot}^2\text{a}+1} \ldots\ldots\ldots\ldots (47)$$

Despues de haber tratado de las fórmulas relativas á la suma y diferencia de los arcos, de las de los arcos múltiplos y de los arcos de la mitad, vamos á establecer otras expresiones que fácilmente se deducen de estas fórmulas.

773.—Expresiones del cuadrado de algunas lineas.— Hemos visto que

$$\text{cos.2 a} = \text{cos}^2\text{a} - \text{sen}^2\text{a} \ldots \text{fórmula (18)}$$

reemplazando por $\text{cos}^2\text{a}$ su valor: $1 - \text{sen}^2\text{a}$, se tiene:

$$\text{cos.2 a} = 1 - 2\ \text{sen}^2\text{a}$$

despejando á $$\text{sen}^2\text{a} = \frac{1-\text{cos. 2 a}}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

si se sustituye el valor de $\text{sen}^2\text{a} = 1 - \text{cos}^2\text{a}$ en la misma fórmula (18), se tiene:

$$\text{cos. 2 a} = \text{cos}^2\text{a} - 1 + \text{cos}^2\text{a} = 2\ \text{cos}^2\text{a} - 1$$

despejando á $$\text{cos}^2\text{a} = \frac{1+\text{cos. 2 a}}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (49)$$

Dividiendo la (48) por la (49) y en virtud de que $\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}} = \text{tang.a}$, resulta:

$$\text{tang}^2\text{a} = \frac{1-\text{cos. 2 a}}{1+\text{cos. 2 a}} \ldots\ldots\ldots\ldots (50)$$

Dividiendo la (49) por la (48), y en razon de que $\cot.a = \frac{\cos.a}{\text{sen}.a}$, se tiene:

$$\cot^2 a = \frac{1+\cos.\ 2\ a}{1-\cos.\ 2\ a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

Hemos visto (729) que

$$\text{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a$$
$$\text{sen}^2 b = 1 - \cos^2 b$$

restando estas ecuaciones, miembro á miembro, resulta:

$$\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

774.—Relaciones del seno y coseno de la suma al seno y coseno de la diferencia.—En el número 765 hemos demostrado las siguientes expresiones:

fórmula (12) $\text{sen}.(a+b) = \text{sen}.a\ \cos.b + \text{sen}.b\ \cos.a$
(14) $\text{sen}.(a-b) = \text{sen}.a\ \cos.b - \text{sen}.b\ \cos.a$
(13) $\cos.(a+b) = \cos.a\ \cos.b - \text{sen}.a\ \text{sen}.b$
(15) $\cos.(a-b) = \cos.a\ \cos.b + \text{sen}.a\ \text{sen}.b$

Dividiendo la ecuacion (12) por la (14), se tiene:

$$\frac{\text{sen}.(a+b)}{\text{sen}.(a-b)} = \frac{\text{sen}.a\ \cos.b + \text{sen}.b\ \cos.a}{\text{sen}.a\ \cos.b - \text{sen}.b\ \cos.a}$$

dividiendo los términos del quebrado del 2º miembro por *cos.a cos.b*, resulta:

$$\frac{\text{sen}.(a+b)}{\text{sen}.(a-b)} = \frac{\text{tang}.a + \text{tang}.b}{\text{tang}.a - \text{tang}.b} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

Si se dividen miembro á miembro la ecuacion (13) por la (15), se tiene:

$$\frac{\cos.(a+b)}{\cos.(a-b)} = \frac{\cos.a\ \cos.b - \text{sen}.a\ \text{sen}.b}{\cos.a\ \cos.b + \text{sen}.a\ \text{sen}.b}$$

dividiendo los términos del quebrado del 2º miembro por *cos.a sen.b*, resulta:

$$\frac{\cos.(a+b)}{\cos.(a-b)} = \frac{\cot.b - \text{tang}.a}{\cot.b + \text{tang}.a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$



775.—Productos de los senos y cosenos.—Considerando las fórmulas (12) y (14), tenemos:

$$\text{sen}.[a+b] = \text{sen}.a\ \cos.b + \text{sen}.b\ \cos.a$$
$$\text{sen}.[a-b] = \text{sen}.a\ \cos.b - \text{sen}.b\ \cos.a$$

Combinando estas fórmulas por adicion y sustraccion, se tiene.

$$\text{sen}.[a+b] + \text{sen}.[a-b] = 2\ \text{sen}.a\ \cos.b$$
$$\text{sen}.[a+b] - \text{sen}.[a-b] = 2\ \text{sen}.b\ \cos.a$$

De las que resulta:

$$\text{sen}.a\ \cos.b = \tfrac{1}{2}\ \text{sen}.[a+b] + \tfrac{1}{2}\ \text{sen}.[a-b] \ldots\ldots (55)$$
$$\text{sen}.b\ \cos.a = \tfrac{1}{2}\ \text{sen}.[a+b] - \tfrac{1}{2}\ \text{sen}.[a-b] \ldots\ldots (56)$$

Las fórmulas (13) y (15):

$$\cos.[a+b] = \cos.a\ \cos.b - \text{sen}.a\ \text{sen}.b$$
$$\cos.[a-b] = \cos.a\ \cos.b + \text{sen}.a\ \text{sen}.b$$

combinándolas por adicion y sustraccion, dan:

$$\cos.[a+b] + \cos.[a-b] = 2\ \cos.a\ \cos.b$$
$$\cos.[a-b] - \cos.[a+b] = 2\ \text{sen}.a\ \text{sen}.b$$

De las que resulta:

$$\cos.a\ \cos.b = \tfrac{1}{2}\ \cos.[a+b] + \tfrac{1}{2}\ \cos.[a-b] \ldots\ldots (57)$$
$$\text{sen}.a\ \text{sen}.b = \tfrac{1}{2}\ \cos.[a-b] - \tfrac{1}{2}\ \cos.[a+b] \ldots\ldots (58)$$

776.—Suma y diferencia de las líneas trigonométricas.—En el párrafo anterior hemos visto que combinando por adicion y sustraccion las fórmulas relativas al seno y coseno de la suma de dos arcos con las de su diferencia, se tiene:

$$\text{sen}.[a+b] + \text{sen}.[a-b] = 2\ \text{sen}.a\ \cos.b$$
$$\text{sen}.[a+b] - \text{sen}.[a-b] = 2\ \text{sen}.b\ \cos.a$$
$$\cos.[a+b] + \cos.[a-b] = 2\ \cos.a\ \cos.b$$
$$\cos.[a-b] - \cos.[a+b] = 2\ \text{sen}.a\ \text{sen}.b$$

Ahora bien, si hacemos $a+b=p$, y $a-b=q$, resultará: (266 V.)

$$a = \tfrac{1}{2}\ [p+q] \quad b = \tfrac{1}{2}\ [p-q]$$

y sustituyendo estos valores en las cuatro ecuaciones anteriores, resulta:

$$\text{sen.}p+\text{sen.}q=2\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}[p+q]\cos.\tfrac{1}{2}[p-q]\ \ldots\ldots(59)$$
$$\text{sen.}p-\text{sen.}q=2\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}[p-q]\cos.\tfrac{1}{2}[p+q]\ \ldots\ldots(60)$$
$$\cos.q+\cos.p=2\cos.\tfrac{1}{2}[p+q]\cos.\tfrac{1}{2}[p-q]\ \ldots\ldots(61)$$
$$\cos.q-\cos.p=2\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}[p+q]\text{sen.}\tfrac{1}{2}[p-q]\ \ldots\ldots(62)$$

Debemos hacer notar, que siendo el arco $p>q$ se tiene $\cos.p<\cos.q$, porque en el 1er. cuadrante al aumentar el arco disminuye el coseno. Estas cuatro últimas fórmulas suelen ser de uso frecuente, especialmente para hacer adecuadas al empleo de los logaritmos algunas expresiones trigonométricas, supuesto que una funcion de suma y diferencia se trasforma en otra de producto.

$$\text{tang.}a+\text{tang.}b=\frac{\text{sen.}a}{\cos.a}+\frac{\text{sen.}b}{\cos.b}=\frac{\text{sen.}a\cos.b+\text{sen.}b\cos.a}{\text{cosa.}\cos.b}$$

luego (12) $\text{tang.}a+\text{tang.}b=\dfrac{\text{sen.}[a+b]}{\cos.a\cos.b}\ \ldots\ldots(63)$

$$\text{tang.}a-\text{tang.}b=\frac{\text{sen.}a}{\cos.a}-\frac{\text{sen.}b}{\cos.b}=\frac{\text{sen.}a\cos.b-\text{sen.}b\cos.a}{\cos.a\cos.b}$$

luego (14) $\text{tang.}a-\text{tang.}b=\dfrac{\text{sen.}[a-b]}{\cos.a\cos.b}\ \ldots\ldots(64)$

$$\cot.a+\cot.b=\frac{\cos.a}{\text{sen.}a}+\frac{\cos.b}{\text{sen.}b}=\frac{\text{sen.}b\cos.a+\text{sen.}a\cos.b}{\text{sen.}a\,\text{sen.}b}$$

luego (12) $\cot.a+\cot.b=\dfrac{\text{sen.}[b+a]}{\text{sen.}a\,\text{sen.}b}\ \ldots\ldots(65)$

$$\cot.a-\cot.b=\frac{\cos.a}{\text{sen.}a}-\frac{\cos.b}{\text{sen.}b}=\frac{\text{sen.}b\cos.a-\text{sen.}a\cos.b}{\text{sen.}a\,\text{sen.}b}$$

luego (14) $\cot.a-\cot.b=\dfrac{\text{sen.}[b-a]}{\text{sen.}a\,\text{sen,}b}\ \ldots\ldots(66)$

777.—Relaciones entre la suma y diferencia de las lineas trigonométricas.—Las siguientes expresiones se obtienen dividiendo sucesivamente las ecuaciones:

59 por 60 y simplificando da: $\dfrac{\text{sen.}p+\text{sen.}q}{\text{sen.}p-\text{sen.}q}=\dfrac{\text{tang.}\frac{1}{2}[p+q]}{\text{tang.}\frac{1}{2}[p-q]}\ \ldots\ldots(67)$



59 por 61 $\quad\dfrac{\text{sen.}p+\text{sen.}q}{\cos.q+\cos.p}=\text{tang.}\tfrac{1}{2}(p+q)\ \ldots\ldots(68)$

59 por 62 $\quad\dfrac{\text{sen.}p+\text{sen.}q}{\cos.q-\cos.p}=\cot.\tfrac{1}{2}(p-q)\ \ldots\ldots(69)$

60 por 61 $\quad\dfrac{\text{sen.}p-\text{sen.}q}{\cos.q+\cos.p}=\text{tang.}\tfrac{1}{2}(p-q)\ \ldots\ldots(70)$

60 por 62 $\quad\dfrac{\text{sen.}p-\text{sen.}q}{\cos.q-\cos.p}=\cot.\tfrac{1}{2}(p+q)\ \ldots\ldots(71)$

61 por 62 $\quad\dfrac{\cos.q+\cos.p}{\cos.q-\cos.p}=\cot.\tfrac{1}{2}(p+q)\cot.\tfrac{1}{2}(p-q).(72)$

63 por 64 $\quad\dfrac{\text{tang.}a+\text{tang.}b}{\text{tang.}a-\text{tang.}b}=\dfrac{\text{sen.}(a+b)}{\text{sen.}(a-b)}\ \ldots\ldots(73)$

65 por 66 $\quad\dfrac{\cot.a+\cot.b}{\cot.a-\cot.b}=\dfrac{\text{sen.}(b+a)}{\text{sen.}(b-a)}\ \ldots\ldots(74)$

778.—Las fórmulas fundamentales y las que hemos demostrado en los párrafos anteriores, las reunirémos en la siguiente tabla con el doble objeto de que los alumnos las graven en su memoria, y para que, consultándola, puedan fácilmente resolver cualquiera duda. En todas se ha supuesto el radio igual á 1.

**Tabla de las principales fórmulas de Trigonometría rectilínea.**

$1=\text{sen}^2a+\cos^2a\ \ldots\ldots$ (1)

$\sec^2a=1+\text{tang}^2a\ \ldots\ldots$ (2)

$\text{cosec}^2a=1+\cot^2a\ \ldots\ldots$ (3)

$\text{tang.}a=\dfrac{\text{sen.}a}{\cos.a}\ \ldots\ldots$ (4)

$\sec.a=\dfrac{1}{\cos.a}\ \ldots\ldots$ (5)

$\text{cosec.}a=\dfrac{1}{\text{sen.}a}\ \ldots\ldots$ (6)

$\cot.a=\dfrac{\cos.a}{\text{sen.}a}\ \ldots\ldots$ (7)