ó definitivamente $x = \frac{a}{\cos^2 \varphi}$ ..... (5)

expresion igualmente adaptable para el empleo de los logaritmos.

Si se tiene $x = a - b$

tomariamos un arco auxiliar φ de modo que se tenga:

$$\text{sen}^2\varphi = \frac{b}{a} \text{ ..... (6)}$$

ó bien

$$b = a\ \text{sen}^2\varphi$$

sustituyendo se tiene: $x = a - a\ \text{sen}^2\varphi = a(1 - \text{sen}^2\varphi)$

ó por último $x = a \cos^2\varphi$ ..... (7)

fórmula propia para el uso de los logaritmos.

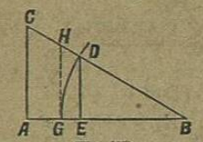
Resolucion de los triángulos rectángulos.

803.—Vamos á tratar ahora de la resolucion de los triángulos, comenzando por los rectángulos. Como ya lo hemos dicho, la resolucion de un triángulo tiene por objeto determinar los elementos desconocidos, cuando para ello hay los datos necesarios, y por regla general son datos suficientes tres elementos, cuando uno de ellos es un lado.

A fin de facilitar el uso de nuestras fórmulas, y evitar estar repitiendo la representacion algebraica de los elementos de los triángulos, convendremos en indicar los ángulos por las letras mayúsculas A, B y C, y los lados respectivamente opuestos á cada ángulo por las minúsculas *a*, *b* y *c*. Ademas, en el caso de ser rectángulo el triángulo, constantemente representaremos el ángulo recto por A, y la hipotenusa por *a*.

Esto supuesto, comenzaremos por establecer y demostrar los principios que sirven de fundamento á la resolucion de los triángulos rectángulos.

804.—Principios fundamentales.—Sea el triángulo rectángulo A B C (fig. 367), y haciendo centro en uno de los vértices B de los ángulos agudos con un radio B G igual al de las tablas, tracemos el arco G D. En seguida bajemos la recta D F perpendicular á A B, que será el seno del ángulo B, y levantando la perpendicular G H, esta será la tangente del mismo ángulo. Por ser A C, G H y D F perpendiculares á A B, serán semejantes los triángulos B A C, B G H y B F D. Así, pues, se tiene:



(Fig. 367)

La hipotenusa B C=a, A C=b, A B=c, B G=B D=r, D F=sen.B. B F=cos.B y G H=tang.B.

Comparando los lados homólogos de los triángulos semejantes, resultan las siguientes proporciones:

BC : BD :: AC : DF sustituyendo a : r :: b : sen.B de la que $b = \frac{a\ \text{sen. B}}{r}$

BC : BD :: AB : BF ,, a : r :: c : cos.B ,, $c = \frac{a \cos. B}{r}$

AB : AC :: BG : GH ,, c : b :: r : tang.B ,, $b = \frac{c\ \text{tang.B}}{r}$

Estas tres proporciones son la expresion de los tres principios siguientes:

1°—*La hipotenusa es al radio, como un lado es al seno del ángulo opuesto.*

2°—*La hipotenusa es al radio, como un lado es al coseno del ángulo adyacente.*

3°—*Un lado es á otro lado, como el radio es á la tangente del ángulo opuesto al segundo lado comparado.*

Estos tres teoremas, ó las fórmulas que de ellos se derivan, sirven de fundamento á la resolucion de los triángulos rectángulos, unidos á los teoremas demostrados en geometría, y que son: la suma de los tres ángulos de un triángulo vale 180°, y el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.

Así, pues, haciendo el radio igual á la unidad en las tres últimas ecuaciones, y expresando analíticamente los teoremas de geometría, tendremos las siguientes fórmulas para la resolucion de los triángulos rectángulos:

CAPILLA ALFONSINA

$$b = a \text{ sen. } B \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$
$$c = a \cos. B \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(B)}$$
$$b = c \text{ tang. } B \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(C)}$$

De que $A+B+C=180°$ cuando $A=90°$, se deduce:

$$B = 90° - C \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(D)}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(E)}$$

Debemos hacer notar, que si en vez del vértice B tomamos como centro el otro ángulo, resultarian fórmulas análogas á las (A), (B) y (C), que serian: $c=a$ sen.C, $b=a$ cos.C y $c=b$ tang.C, las cuales pueden deducirse de las primeras cambiando b en c y B en C; por lo cual estas fórmulas deben entenderse como expresion de que *un lado cualquiera es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto ó por el coseno del adyacente, y que un cateto es igual al producto del otro lado por la tangente del ángulo opuesto.*

Al emplear los logaritmos para el cálculo de estas fórmulas, debe recordarse que al hacer el radio igual con la unidad, los logaritmos del seno, coseno, y á veces la tangente, tienen sobrentendida la resta de 10 unidades en su característica, cuya resta es preciso efectuar para determinar el valor del lado que se busca. La supresion de 10 unidades en la característica equivale á lo que hacen varios autores, que considerando las ecuaciones que se deducen de nuestras proporciones, y suponiendo el radio dividido en 10,000.000,000 de partes, restan de la suma de los logaritmos de los numeradores el logaritmo de *r*, que es 10, conduciendo ambos procedimientos al mismo resultado.

805.—Casos para la resolucion de los triángulos rectángulos.—Hemos indicado que el problema que hay que resolver en trigonometría, es determinar tres de los elementos de un triángulo, conocidos los otros tres. Ahora bien, como cuando el triángulo es rectángulo siempre se conoce el ángulo A recto, á este elemento hay que agregar otros dos para buscar los otros tres desconocidos; de modo que el número de casos que pueden presentarse en la resolucion de los triángulos rectángulos, será el de combinaciones diferentes que pueden hacerse con las cinco cantidades B, C, a, b y c, tomándolas de dos en dos.

La fórmula (5) del número 356 se convierte en

$$C\,\frac{5}{2} = \frac{5\times4}{1\times2} = 10$$

y aunque en efecto son diez las combinaciones que pueden hacerse tomando de dos en dos las cantidades B, C, a, b, c, un exámen detenido hace ver que basta distinguir cuatro principales:

Combinaciones.

B, C	Caso indeterminado conociendo A.
B, a y C, a	La hipotenusa y un ángulo.
a, b y a, c	La hipotenusa y un cateto.
B, b; C, c; B, c; C, b	Un cateto y un ángulo.
b, c	Dos catetos.

Resulta, pues, que aunque pueden presentarse 10 combinaciones diferentes con los datos de un triángulo rectángulo, bastará considerar los cuatro casos siguientes:

1°—*Dada la hipotenusa y un ángulo agudo,* determinar los demas elementos.
2°—*Dada la hipotenusa y un cateto,* idem idem
3°—*Dado un cateto y un ángulo agudo,* idem idem
4°—*Dados los dos catetos,* idem idem

Para escojer con facilidad la fórmula que corresponda al caso que tenga que resolverse, los alumnos podrán aplicar las siguientes reglas:

Deberá examinarse, 1° si forma ó no parte del problema la hipotenusa, y 2° si no entran como datos ni como incógnita los ángulos.

Si la hipotenusa forma parte del problema, se hará uso de la fórmula (A) ó de la (B), sirviéndose de la (A) cuando el cateto y el ángulo que son objeto de la cuestion, tengan la posicion de opuestos, y se tomará la (B) cuando sean adyacentes.

Si en el problema no entra la hipotenusa, pero sí uno de los ángulos agudos, se hará uso de la fórmula (C).

Por último, si los ángulos no entran como datos ni como incógnita, se tomará la fórmula (E)

806.—Rectificacion de los datos y de los resultados.—A menudo es importante, antes de emprender los cálculos necesarios para resolver un triángulo, examinar si los datos de la cuestion no envuelven alguna contradiccion que haga imposible el problema, así como tambien lo es, despues de haber ejecutado las operaciones numéricas necesarias para determinar el valor de los elementos desconocidos, poder comprobar los resultados para tener la seguridad de que no se ha cometido alguna equivocacion.

CAPILLA ALFONSINA

Las condiciones que debe satisfacer un triángulo para ser posible, son: que un lado cualquiera sea menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia; que el mayor lado esté opuesto al mayor ángulo, y recíprocamente; que la suma de los tres ángulos sea 180°, y en los triángulos rectángulos que la hipotenusa sea mayor que cualquiera de los catetos, así como que el cuadrado de la hipotenusa sea igual á la suma de los cuadrados de los catetos. Teniendo presentes estos principios, será siempre fácil darse cuenta de si pueden ó no aceptarse los datos ó los resultados de la resolucion del triángulo. Para la rectificacion de los resultados en los triángulos rectángulos, debe tenerse:

$$B+C=90^\circ$$

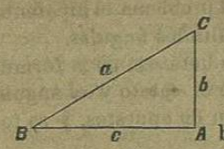
y

$$a^2=b^2+c^2$$

cuya fórmula, para hacerla adaptable al uso de los logaritmos, la pondremos en la forma:

$$b^2=a^2-c^2=(a+c)\,(a-c)$$

807.—Problemas.—I.—Resolver un triángulo rectángulo (fig. 368) con los datos siguientes:



(Fig. 368)

$a=194^{m}\,'07$
$b=39\,'95$

Para determinar B usaremos la fórmula (A) $b=a$ sen.B, de la que

$$\text{sen. } B=\frac{b}{a}$$

Para determinar C usaremos la fórmula (B) $b=a$ cos.C, de la que

$$\cos.C=\frac{b}{a}$$

Para determinar c, emplearemos la fórmula (E) $a^2=b^2+c^2$ de la que

$$c=\sqrt{(a+b)\,(a-b)}$$

Calculo de B.

log. b = 1'601 5168
log. a = 2'287 9584

log. sen.B = 9·313 5584
B = 11°—52'—46" '1

Calculo de C.

log. b = 1'601 5168
log. a = 2'287 9584

log. cos. C = 9·313 5584
C = 78°—7'—13" '9

Calculo de c.

$(a+b)=234^{m}\,'02$ log. $(a+b)=2'369\ 2530$
$(a-b)=154\,'12$ log. $(a-b)=2'187\ 8590$

4'557 1120

Tomando la mitad; log. $\sqrt{(a+b)\,(a-b)}=2'278\ 5560=$ log. c

$c=189^{m}\,'9135$

Comprobacion.—Para rectificacion del cálculo debemos tener $B+C=90^\circ$; y en efecto:

B=11°—52'—46" '1
C=78°— 7—13 '9

B+C =90°— 0 — 0

Para comprobar el valor de c conociendo préviamente C, lo podemos calcular por la fórmula (C): $c=b$ tang.C.

Calculo de c.

log.b = 1'601 5168
log. tang. C = 0'677 0392

log.c = 2'278 5560=log. $189^{m}\,'9135$

II.—Resolver un triángulo rectángulo (fig. 368) con los siguientes datos:

$a=4935^{m}\,'20$
$B=35^\circ—14'—15''$

Para determinar b, haremos uso de la fórmula (A)

$b=a$ sen. B

Para c de la (B) $c=a$ cos. B

Para determinar C, de la (D) $C=90^\circ-B$

CALCULO DE b.

log. de 4935 '20.....3'693 3048
log. sen. 35°—14'—15"...9·761 1510

log. b.....(1)3'454 4558

CALCULO DE c.

log.a =3'693 3048
log. cos.B=9·912 0984

log.c (1)3·605 4032

Al sumar estos logaritmos, rebajamos una decena de la característica por el complemento aritmético de las características de los logaritmos, del seno y coseno.

$$b=2847^{m}\text{'}448 \qquad c=4030^{m}\text{'}911$$

CALCULO DE C.

90°—00'—00"
—B =35°—14'—15"

C =54°—45'—45"

COMPROBACION.—Siendo $a^2=b^2+c^2$ debe tenerse:

$$c=\sqrt{(a+b)\,(a-b)}$$

(a+b)=7782'648 log. (a+b)=3'891 1275
(a—b)=2087'752 log. (a—b)=3'319 6789

log. (a+b) (a—b)=7'210 8064

Tomando la mitad; $\log\sqrt{(a+b)(a-b)}$=3'605 4032=log. c

$$c.=4030^{m}\text{'}911$$

Resolucion de los triángulos oblicuángulos.

808.—PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.—Comenzaremos por establecer y demostrar los principios en que tendremos que fundarnos para resolver los triángulos oblicuángulos.

1° *En un triángulo cualquiera, los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.*

Lo mismo que en los triángulos rectángulos, representaremos por A, B y C los ángulos de los triángulos; y por *a*, *b* y *c* los lados que respectivamente les están opuestos.

Consideremos primero el triángulo A B C, de la fig. 369. en el que el ángulo C es agudo, y desde el vértice B bajemos la perpendicular B D al lado A C, con lo cual quedará dividido en dos triángulos rectángulos, en los que, conforme á la ecuacion (A) del párrafo 804, se tiene:

B D=A B sen.A=c sen.A
B D=B C sen.C=a sen.C

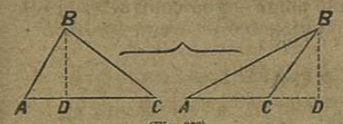
Si se considera el triángulo A B C en el que el ángulo C es obtuso, tendremos:

B D=A B sen. A=c sen. A
B D=B C sen. BCD=a sen. BCD

pero como B C D es suplemento de B C A, y el seno de un ángulo es igual y del mismo signo que el seno de su suplemento, (735), se tiene, tanto en el caso en que C es agudo, como cuando es obtuso que

B D=c. sen. A
B D=a. sen. C
luego c. sen. A=a. sen. C

y formando una proporcion:



(Fig. 369)

a : c :: sen.A : sen.C

Si desde el vértice A bajáramos una perpendicular sobre el lado B C, obtendriamos:

c : b :: sen.C : sen.B
luego en general a : c : b :: sen.A : sen.C : sen.B

que es lo que se trataba de demostrar.

Comunmente á esta série de razones iguales, se les da la forma de ecuacion para la resolucion de los triángulos, como sigue:

$$\frac{a}{\text{sen. A}}=\frac{b}{\text{sen.B}}=\frac{c}{\text{sen. C}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(F)}$$

2° *El cuadrado de un lado de un triángulo cualquiera es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman.*

Esto es, en la fig. 369 vamos á demostrar que

$$A\,B^2=B\,C^2+A\,C^2-2.\ A\,C\times B\,C\times\cos.\ A\,C\,B$$

Consideremos primero el caso en que el ángulo C sea agudo. Conforme al teorema demostrado en geometría (534) tendremos:

CAPILLA ALFONSINA

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2\,AC \times DC$$

ó sustituyendo: $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,b \times DC$

pero como en el triángulo rectángulo B D C conforme á la ecuacion (B) del núm. 804, $DC = BC \cos. C = a. \cos. C$, sustituyendo, resulta:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a.\,b.\cos. C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Si consideramos el triángulo A B C cuando el ángulo C es *obtuso*, conforme al teorema demostrado en geometría (533) tendremos:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2\,AC \times CD$$

ó $$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,b \times CD \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

en el triángulo rectángulo B C D conforme á la fórmula (B) se tiene:

$$CD = BC \times \cos. BCD = a. \cos. BCD$$

pero como B C D es suplemento de B C A, y el coseno de un ángulo es igual al coseno de su suplemento tomado como signo contrario, (740) se tiene que $\cos. BCD = -\cos. BCA$, luego

$$CD = -a. \cos. BCA$$

y sustituyendo en la ecuacion (2) resulta:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos. C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

expresion idéntica á la (1) del caso en que C era agudo.

Del mismo modo que hemos obtenido *c* en funcion de *a*, *b*, y el ángulo opuesto C bajando desde el vértice B, la perpendicular B D al lado A C, si lo hiciéramos desde los vértices C y A, obtendriamos:

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c. \cos. B \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c. \cos. A \\ \text{y la demostrada} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b. \cos. C \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (G)$$

3ª *En todo triángulo, la suma de dos de sus lados, es á su diferencia como la tangente de la mitad de la suma de los ángulos opuestos, es á la tangente de la mitad de su diferencia.*

En virtud de la ecuacion (F) tenemos:

$$a : \text{sen.}A :: b : \text{sen.}B$$

CAPILLA ALFONSINA

fundándonos en que la suma de los antecedentes es á su diferencia como la de los consecuentes es á la suya, tendremos:

$$a + b : a - b :: \text{sen.}A + \text{sen.}B : \text{sen.}A - \text{sen.}B$$

Por otra parte, en virtud de la fórmula (67)

$$\frac{\text{sen.}p + \text{sen.}q}{\text{sen.}p - \text{sen.}q} = \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(p+q)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(p-q)}$$ se tiene reemplazando p por A, y q por B:

$$\text{sen.}A + \text{sen.}B : \text{sen.}A - \text{sen.}B :: \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A-B)$$

luego $$a + b : a - b :: \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A-B) \ldots\ldots\ldots (H)$$

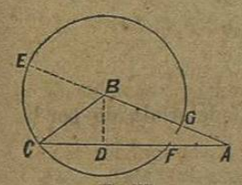
que es lo que se queria demostrar.

4º Si desde el vértice B (fig. 370 y 371) de un triángulo se baja una perpendicular B D al lado opuesto prolongándolo si fuere necesario, se tiene que, *el lado sobre el cual cae la perpendicular es á la suma de los otros dos, como su diferencia es á la diferencia de los segmentos* A D *y* D C *cuando la perpendicular cae dentro del triángulo, ó á la suma de los segmentos cuando cae fuera.*

Esto es, vamos á demostrar que

$b : c + a :: c - a : AD - DC$ cuando la perpendicular cae dentro.

$b : c + a :: c - a : AD + DC$ cuando la perpendicular cae fuera.



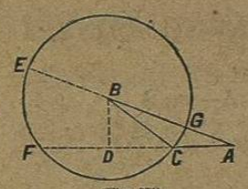
(Fig. 370)

Consideraremos primero el caso (fig. 370) en el que la perpendicular B D cae dentro del triángulo. Haciendo centro en el vértice B, desde el que se baja la perpendicular, y tomando por radio el lado menor B C, trazarémos un círculo y prolongarémos el lado A B hasta E. Por la construccion de la figura, tenemos $BC = a = BE = BG$, y siendo B D una perpendicular á la cuerda C F que pasa por el centro, la dividirá en dos partes iguales $CD = DF$.

Ahora, fundándonos en que dos secantes A C y A E, tiradas desde un mismo punto, son recíprocamente proporcionales á sus partes externas A F y A G, tendrémos: (540).

$$AC : AE :: AG : AF$$

ó sustituyendo: $$b : c + a :: c - a : AD - DC \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$



(Fig. 371)

Si consideramos el caso en que la perpendicular cae fuera del triángulo, (fig. 371) en virtud del mismo teorema, tendremos:

$$AC : AE :: AG : AF$$

y sustituyendo $b : c+a :: c-a : AD+DC$..(J)

que es lo que se queria demostrar.

A estos cuatro principios hay que agregar el teorema de geometría:

$$A+B+C=180^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (K)$$

809.—Casos para la resolucion de los triangulos oblicuángulos.—Buscando, como lo hemos hecho al tratar de los triángulos rectángulos, el número de combinaciones que pueden formarse con los seis elementos de un triángulo A, B, C, a, b y c, tomándolos de tres en tres, por medio de la fórmula (5) del número 356, encontrariamos:

$$C^6_3=\frac{6\times5\times4}{2\times3}=20$$

pero como vamos á verlo, se reducen á cuatro casos diferentes.

Si se dan A B y C, el caso es indeterminado y no debe considerarse porque hay una infinidad de triángulos con los datos del problema.

1er. caso.—*Dados dos ángulos y un lado, determinar los demas elementos.* Este caso ofrece *nueve* combinaciones:

A, B, a	A, C, a	B, C, a
A, B, b	A, C, b	B, C, b
A, B, c	A, C, c	B, C, c

Cuando se conocen dos ángulos, el tercero está determinado por la relacion

$$A+B+C=180^\circ$$

2º caso.—*Dados dos lados y un ángulo opuesto á uno de ellos,* ofrece *seis* combinacsones

a, b, A	a, c, A	b, c, B
a, b, B	a, c, C	b, c, C

3er. caso.—*Dados dos lados y el ángulo que forman;* que ofrece *tres* combinaciones

a, b, C — a, c, B | b, c, A

CAPILLA ALFONSINA

4º caso.—*Dados los tres lados,* determinar los ángulos, que ofrece *una* sola combinacion:

a, b, c.

En el 2º caso, como lo hemos explicado en geometría (443—VIII), el problema por regla general, admite dos resoluciones.

810.—Primer caso.—*Conocidos dos ángulos y un lado de un triángulo, determinar sus demas elementos.*

Para facilitar nuestras explicaciones, supondremos que conocemos:

A, B y a

pero naturalmente el procedimiento de investigacion, será el mismo áun cuando se cambien las denominaciones de estos datos.

El tercer ángulo C, se determinará despejándolo de la ecuacion (K) que dá:

$$C=180^\circ-(A+B)$$

Conocidos los tres ángulos y el lado *a*, los lados *b* y *c* se determinarán valiéndonos de la fórmula (F)

$$\frac{a}{\text{sen. A}}=\frac{b}{\text{sen. B}}=\frac{c}{\text{sen. C}}$$

que da

$$b=\frac{a \text{ sen. B}}{\text{sen. A}} \quad \text{y} \quad c=\frac{a \text{ sen. C}}{\text{sen. A}}$$

En este caso, para que el problema sea posible, se necesita que

$$A+B<180^\circ$$

811.—Segundo caso.—*Conocidos dos lados de un triángulo y el ángulo opuesto á uno de ellos, determinar los demas elementos.*

Supondremos que conocemos

a, b y A

La fórmula (F) da $\text{sen. B}=\frac{b \text{ sen. A}}{a}$ ..... (1)

Conocidos los ángulos A y B, de la relacion (K), sacamos:

$$C=180^\circ-(A+B) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Por último, para determinar c, nos valdremos del primer principio cifrado en la fórmula (F), y tendremos:

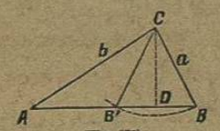
$$c=\frac{a \text{ sen. } C}{\text{sen. } A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Discusion.—Como el valor de B está dado por un seno en la ecuacion (1), y el seno de un ángulo es igual y del mismo signo que el seno de su suplemento, pueden tomarse para B, por regla general, dos valores: el que se encuentre en las tablas, siempre $<90°$, que corresponde á log. sen. B, y el de su suplemento que es un ángulo obtuso. Sustituidos estos dos valores, que llamaremos B y B', en la ecuacion (2) se obtendrán dos valores para C; los que sustituidos á su vez en la ecuacion (3), darán para c dos valores. Se ve, pues, que en el segundo caso de la resolucion de los triángulos oblicuángulos, puede haber dos triángulos que satisfagan las condiciones del problema; pero hay varias circunstancias en las que el problema solo tiene una resolucion, y otras en que no admite ninguna.

Aun cuando ya hemos explicado en geometría (443—VIII), las diferentes circunstancias de este problema, volveremos á ocuparnos de ellas para que los alumnos las tengan presentes en la resolucion de los triángulos.

1°—Si el ángulo dado A (fig. 372), en vez de ser agudo fuera *recto* ú *obtuso*, el otro ángulo B forzosamente seria agudo, (436) y el problema no admitiria mas que una sola resolucion; pero entonces, para que el triángulo sea posible, es necesario tener $a>b$ para que al mayor ángulo esté opuesto el lado mayor.

2°—Si el ángulo dado A es agudo y se tiene $b<a$, el problema no admitirá mas que una sola resolucion; porque debiendo ser $B<A$ (431), no podremos tomar para el ángulo buscado el suplemento del valor que para B dan las tablas, porque no puede ser obtuso. Por lo demas, el triángulo siempre es posible.



(Fig. 372)

3°—Si el ángulo dado A es agudo y se tiene $b=a$, no habrá mas que una resolucion; pues siendo el triángulo isósceles, debe tenerse $B=A$ (429), y tendremos que tomar para B el valor del ángulo agudo.

4°—Si siendo el ángulo A agudo y $a<b$ se tiene ademas que $a=b$ sen. A, el problema no admitirá mas que una sola resolucion. En efecto, hemos visto que el valor de B se determina por la ecuacion (1):

CAPILLA ALFONSINA

$$\text{sen. } B=\frac{b \text{ sen. } A}{a}$$

Ahora bien, siendo $a=b$ sen. A, sustituyendo:

$$\text{sen. } B=1$$

y $B=90°$ igual á su suplemento B'. En este caso, el lado C B toma la posicion de la perpendicular C D en la figura.

5°—Si siendo A agudo y $a<b$ se tiene $a<b$ *sen. A*, el problema es imposible. En efecto, si dividimos por a los dos miembros de la desigualdad

$$a<b \text{ sen. } A$$

tendremos

$$1<\frac{b \text{ sen. } A}{a}$$

y el valor de sen. B dado por la ecuacion (1)

$$\text{sen. } B=\frac{b \text{ sen. } A}{a}$$

se trasformaria en $\text{sen. } B>1$

lo que es imposible, pues hemos visto que el seno de un ángulo no puede ser mayor que el radio $=1$. En la figura esta circunstancia estaria indicada cuando el lado B C fuera menor que C D, cuya perpendicular tiene por valor b sen. A, y entónces con los datos del problema no podria cerrarse ningun triángulo.

6°—Por último, cuando $A<90°$, y $a<b$ pero mayor que b sen. A, el problema admitirá dos resoluciones; pues como se ve en la fig. 372 haciendo centro en C trazando un arco con el radio C B, se cortará el lado opuesto en los puntos B y B', resultando dos triángulos A C B y A C B' con los datos del problema, en los que el ángulo $AB'C=180°-B$.

En resúmen: en el 2° caso de la resolucion de los triángulos oblicuángulos conociendo A, a y b el problema

Será imposible: 1° cuando $A=6>90°$ y $a<b$
2° ,, $A<90°$ y $a<b$ sen. A

Admitirá solo una resolucion: 1° cuando $A=6>90°$
2° cuando siendo $A<90°$, sea $b<a$
3° ,, ,, $A<90°$,, $b=a$
4ª ,, ,, $A<90°$,, $a=b$, sen. A

Admitira dos resoluciones: Cuando $A<90°$, y $a<b$ pero $>b$ sen. A

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

812.—Tercer caso.—*Dados dos lados y el ángulo que forman, determinar los demas elementos de un triángulo.*

Primer procedimiento. Supondremos que conocemos

a, b y el ángulo C

De la ecuacion (K) resulta: $A+B=180°-C$

$$\tfrac{1}{2}(A+B)=90°-\frac{C}{2}\ldots\ldots(1)$$

Conocida la mitad de la suma de los ángulos A y B, vamos á determinar la mitad de su diferencia, para lo cual nos valdremos del 3er. principio cifrado en la proporcion (H).

$$a+b : a-b :: \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{(a-b)\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B)}{a+b}$$

y como $\frac{1}{2}[A+B]$ tiene por complemento $\frac{C}{2}$, $\text{tang.}\frac{1}{2}[A+B]=\text{cot.}\frac{1}{2}C$,

Sustituyendo tendremos:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}[A-B]=\frac{(a-b)\ \text{cot.}\tfrac{1}{2}C}{a+b}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Una vez determinados los valores de $\frac{1}{2}(A+B)$ y $\frac{1}{2}(A-B)$ por las fórmulas (1) y (2), fácilmente se calculará el valor del ángulo mayor, que es el opuesto al mayor lado, y el del ángulo menor (266—V). Esto es, suponiendo $A>B$

$$A=\tfrac{1}{2}(A+B)+\tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$B=\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(A-B)$$

Una vez conocidos los tres ángulos, el lado c se determinará por medio de la fórmula (F)

$$c=\frac{\text{sen. C. a}}{\text{sen. A}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

813.—*Segundo procedimiento para resolver el tercer caso.*

Conforme al 2° principio cifrado en la fórmula (G) tenemos:

$$c^2=a^2+b^2-2\ a\ b.\ \text{cos. C}$$

Si multiplicamos (a^2+b^2) por $\cos^2\frac{1}{2}C+\text{sen}^2\frac{1}{2}C=1$; y si por cos. C sustituimos su valor, (fórmula 35) $\cos. C=\cos^2\frac{1}{2}C-\text{sen}^2\frac{1}{2}C$, la expresion anterior se trasforma en

$$c^2=(a^2+b^2)(\cos^2\tfrac{1}{2}C+\text{sen}^2\tfrac{1}{2}C)-2\ a\ b\ [\cos^2\tfrac{1}{2}C-\text{sen}^2\tfrac{1}{2}C]$$

ejecutad la multiplicacion y sacando $\cos^2\frac{1}{2}C$ y $\text{sen}^2\frac{1}{2}C$ como factor se tiene:

$$c^2=(a-b)^2\cos^2\tfrac{1}{2}C+(a+b)^2\text{sen}^2\tfrac{1}{2}C\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

sacando $(a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}C$ como factor comun, para lo cual deberá dividirse el 2° término, por esta cantidad tendremos:

$$c^2=(a-b)^2\cos^2\tfrac{1}{2}C\left[1+\frac{(a+b)^2\text{sen}^2\frac{1}{2}C}{(a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}C}\right]$$

extrayendo raiz cuadrada

$$c=(a-b)\cos.\tfrac{1}{2}C\sqrt{1+\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\text{tang}^2\tfrac{1}{2}C}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

con el objeto de hacer adaptable esta fórmula al uso de los logaritmos, introduciremos un arco auxiliar, haciendo el término:

$$\frac{a+b}{a-b}\text{tang.}\tfrac{1}{2}C=\text{tang.}\ \varphi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(L)$$

y entónces: $\sqrt{1+\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\text{tang.}^2\frac{1}{2}C}=\sqrt{1+\text{tang}^2\varphi}=\text{sec.}\varphi=\frac{1}{\cos.\varphi}$

Sustituyendo este valor en la expresion (b) resulta finalmente:

$$c=\frac{(a-b)\cos.\frac{1}{2}C}{\cos.\varphi}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(M)$$

Por medio de las fórmulas (L) y (M) se determinará *c*, y una vez conocidos a, b, C y c, valiéndonos de la fórmula (F) se obtendrán los valores de A y B por las expresiones siguientes:

$$\text{sen.}A=\frac{a.\ \text{sen.}C}{c}\quad\text{y}\quad\text{sen.}B=\frac{b.\ \text{sen.}C}{c}\ldots\ldots\ldots\ldots(c)$$

La ventaja que tiene este procedimiento sobre el primero que hemos indicado para resolver el 3er. caso, es que pueden rectificarse los cálculos, examinando si

$$A+B+C=180°$$

La razon de esto, es, que en el 2° procedimiento se han determinado los valores de los ángulos A y B por fórmulas especiales; mientras que

CAPILLA ALFONSINA

en el primer procedimiento hemos deducido esos valores precisamente de la expresion $A+B+C=180°$, por lo cual no podemos servirnos de ella para comprobar los cálculos. *

814.—Cuarto caso.—*Dados los tres lados a, b y c de un triángulo, determinar sus tres ángulos.*

El 2° principio cifrado en la fórmula (G) da:

$$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c.\cos.A$$

despejando á $$\cos.A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$$

sustituyendo este valor en la expresion (37)

$$\cos.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1+\cos.A}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4\,b\,c}}$$

poniendo por $b^2+2\,b\,c+c^2$ su valor $(b+c)^2$ se tiene:

---

* Algunas veces conviene dar otra forma á las expresiones (L) y (M) por diferir muy poco la magnitud de *a* y de *b*, lo cual tiende á hacer nulo el denominador del valor de tang.φ. En este caso, de la fórmula (a), sacarémos como factor comun á $(a+b)^2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}C$, á cuyo fin dividiremos por esta cantidad el primer término, y se tiene:

$$c^2=(a+b)^2\text{sen}^2\tfrac{1}{2}C\left(1+\frac{(a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}C}{(a+b)^2\text{sen}^2\frac{1}{2}C}\right)$$

extrayendo raiz cuadrada

$$c=(a+b)\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}C\sqrt{1+\frac{(a-b)^2\cot^2\frac{1}{2}C}{(a+b)^2}}$$

introduciendo un arco auxiliar φ de modo que

$$\text{tang.}\,\varphi=\frac{a-b}{a+b}\cot.\tfrac{1}{2}C\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(L')}$$

tendrémos:

$$c=(a+b)\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}C\sqrt{1+\text{tang}^2\varphi}=(a+b)\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}C\,\text{sec.}\varphi$$

ó finalmente

$$c=\frac{(a+b)\,\text{sen.}\frac{1}{2}C}{\cos.\varphi}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(M')}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4\,b\,c}}$$

Como la diferencia de los cuadrados es igual á la suma de las cantidades por su diferencia (251—III) se tiene que $(b+c)^2-a^2=(b+c+a)(b+c-a)$, por lo cual la expresion anterior se convierte en

$$\cos.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(b+c+a)\;(b+c-a)}{4\,b\,c}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(b)}$$

Haréinos la suma de los tres lados

$$a+b+c=2\,p$$

Restando 2a á los dos miembros, se tiene:

$$b+c-a=2\,(p-a)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion (b), y dividiendo por 4 los dos términos del quebrado, resulta:

$$\cos.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p\,(p-a)}{b\,c}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(N)}$$

Por medio de esta fórmula determinarémos el ángulo A. Cambiando A en B, *a* en *b* y recíprocamente tendriamos el ángulo B. Cambiando A en C, *a* en *c* y recíprocamente tendriamos B; pero como hemos visto (797) que los valores son mas aproximados cualquiera que sea la magnitud de los ángulos valiéndonos de la tangente, vamos á obtener otra fórmula análoga á la (N) en la que el ángulo esté expresado por una tangente. A este fin de la fórmula

$$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c.\cos.A$$

despejaremos á $$\cos.A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$$

sustituyendo este valor en la expresion (36)

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1-\cos.A}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}}{2}}=\sqrt{\frac{2\,b\,c-b^2-c^2+a^2}{4\,b\,c}}$$

Como $(b-c)^2=b^2-2\,b\,c+c^2$, cambiando signos tendremos: $-(b-c)^2=2\,b\,c-b^2-c^2$;

luego $$\text{sen.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4\,b\,c}}$$

reemplazando la diferencia de los cuadrados por el producto de la suma por su diferencia

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(a+b-c)\ (a+c-b)}{4\,b\,c}}\ \ldots\ldots\ldots(c)$$

haciendo como ántes

$$a+b+c=2\,p$$

restando sucesivamente de los dos miembros 2 b y 2 c, resulta:

$$a+c-b=2\,(p-b)$$
$$a+b-c=2\,(p-c)$$

Sustituyendo estos valores en la expresion (c) y dividiendo los dos términos del quebrado por 4, resulta finalmente:

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)\ (p-c)}{b\,c}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(O)$$

Dividiendo la fórmula (O) por la (N), y teniendo presente que $\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}}=\text{tang.a}$, tendremos definitivamente:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{(p-b)\ (p-c)}{p\ (p-a)}}\ \ldots\ldots\ldots(P)$$

que es la fórmula que usaremos para determinar un ángulo en funcion de los tres lados, de preferencia á las (N) y (O), porque se obtiene mayor aproximacion sirviéndose de las tangentes. Cuando el ángulo es pequeño, da mas aproximacion la fórmula (O) que la (N) sucediendo lo contrario cuando el valor del ángulo se acerca á 90° (797). Cuando se quieran determinar B y C, las fórmulas serán:

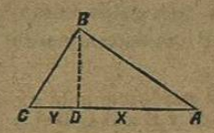
$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,B=\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-c)}{p\ (p-b)}}\quad \text{y tang.}\tfrac{1}{2}\,C=\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)}{p\ (p-c)}}$$

en las que

$$p=\tfrac{1}{2}\,(a+b+c)$$

La comprobacion natural y sencilla del cálculo á que da lugar este caso, es, que la suma de los tres ángulos encontrados, sea igual á 180°.

CAPILLA ALFONSINA



(Fig. 373)

815.—Este 4° caso puede resolverse de otro modo. Sea el triángulo A B C, (fig. 373) y desde el vértice B, bajemos la perpendicular B D al lado opuesto sobre el que determinará dos segmentos A D y C D que llamaremos x é y. Cuando la perpendicular cae dentro del triángulo, como en la figura que consideramos, conforme al 4° principio (808) tendremos:

$$b : a+c :: a-c : x-y \text{ que da } x-y=\frac{(a+c)\ (a-c)}{b}$$

Conocido el valor numérico de x—y, como b=x+y, podrá determinarse el valor de cada uno de los segmentos (266—V). Suponiendo que x sea el mayor, tendremos:

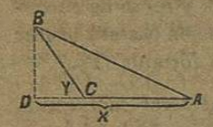
$$x=\frac{b}{2}+\frac{(a+c)(a-c)}{2\,b}$$

$$y=\frac{b}{2}-\frac{(a+c)(a-c)}{2\,b}$$

Una vez conocidos los segmentos x é y, se resolverán los triángulos rectángulos B D A y B D C en los que, conforme á la fórmula (B), se tiene:

$$\text{cos.A}=\frac{x}{c};\ \text{cos. C}=\frac{y}{a}\ \text{y por último, } B=180°-(A+C)$$

En el caso de que la perpendicular B D caiga fuera del triángulo (fig. 374) conforme al mismo 4° principio (808) tendremos:



(Fig. 374)

$$b : c+a :: c-a : x+y \text{ que da } x+y=\frac{(c+a)\ (c-a)}{b}$$

Conocido el valor numérico de la suma de los segmentos, como x—y=b; suponiendo que x sea mayor que y, tendremos: (266—V)

$$x=\frac{(c+a)\ (c-a)}{2\,b}+\frac{b}{2}$$

$$y=\frac{(c+a)\ (c-a)}{2\,b}-\frac{b}{2}$$