La área del triángulo M N O en funcion de sus tres lados, fórmula (T), es:

$$s' = \sqrt{p'(p'-b+a)(p'-c)(p'-d)} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Por otra parte $2p = a+b+c+d$
$2p' = b-a+c+d$

restando la última ecuacion de la que antecede

$$2p - 2p' = 2a$$

de donde $p' = p-a$

Sustituyendo este valor en la ecuacion (2), se tiene:

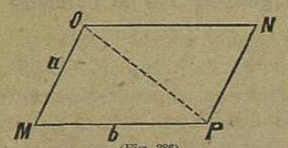
$$s' = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-a-c)(p-a-d)}$$

Reemplazando este valor en la ecuacion (1), resulta finalmente:

$$S = \frac{a+b}{b-a}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-a-c)(p-a-d)} \ldots\ldots (3)$$

siendo $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$

836.—Paralelógramo.—*Dados dos lados* a *y* b *de un paralelógramo y el ángulo* M *que forman, determinar su superficie.*



(Fig. 386)

Si tiramos la diagonal O P, (fig. 386) quedará dividido el paralelógramo en dos triángulos iguales, en los que, por ser la figura paralelógramo, el ángulo M=N así como los lados opuestos. En consecuencia la superficie del paralelógramo será igual á la suma de la de los triángulos que lo forman.

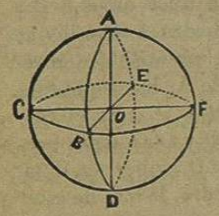
$$s = \frac{1}{2}\, a\, b \text{ sen. } M + \frac{1}{2}\, a\, b \text{ sen. } M$$

ó $$s = a\, b \text{ sen. } M$$

que es la expresion que buscábamos.

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA.

Definiciones y propiedades de los triángulos esféricos.



(Fig. 387)

837.—Círculos máximos.—Un plano, sea cual fuere su direccion, corta siempre la esfera segun un círculo que generalmente es de magnitud variable y se le llama *círculo menor;* pero cuando el plano pasa por el centro de la esfera, hemos dicho (681) que su interseccion con la superficie de ella determina un círculo, con A B D E (fig. 387) que se llama *círculo máximo,* á causa de que no hay otro mayor entre todos los que pueden trazarse en la superficie de la esfera.

Todos los círculos *máximos* A B D E, A C D F, C B F E, etc., tienen las propiedades: de ser iguales, porque tienen el mismo radio; su centro es el de la esfera y la dividen en dos partes iguales.

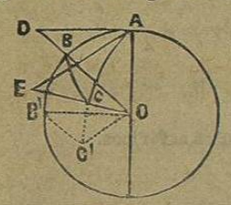
Se llama *polo de un círculo,* sea ó no máximo, *trazado sobre la esfera, el punto de la superficie de la misma esfera equidistante de todos los puntos de su circunferencia.* Cada círculo tiene dos polos, que son las extremidades del diámetro de la esfera perpendicular al plano del círculo. Los polos del círculo C B F E son los puntos A y D.

838.—Triangulo esférico.—Si se corta una esfera por tres planos que concurren en el centro resultará un triedro O A B C (fig. 388) cu-

yas aristas son radios de la esfera, sus caras A O B, A O C y B O C, son sectores de círculos máximos, y sus ángulos diedros, formados por las caras, tienen por aristas los radios. Por último ese triedro determina sobre la superficie de la esfera una figura A B C, limitada por tres arcos de círculos máximos, que es un triángulo esférico.

Los ángulos planos del triedro formados por dos radios tienen por medida los arcos de los respectivos círculos máximos, que pasan por las extremidades de las aristas, y que son los lados del triángulo esférico; esto es, la medida del ángulo plano A O C es el arco A C, la del ángulo A O B es el arco A B, y la del ángulo B O C es el arco B C.

En cuanto á los ángulos diedros formados por la interseccion de dos planos en las aristas A O, B O y C O que vienen á determinar los ángulos del triángulo esférico en A, en B y en C, se ha visto (619) que un diedro tiene por medida el ángulo plano correspondiente formado por dos perpendiculares levantadas á la interseccion comun en el mismo punto, contenida cada una de las perpendiculares en uno de los planos del diedro. Por tanto, la medida del diedro segun A O será el ángulo D A E formado por las tangentes levantadas en el punto A respectivamente á los arcos A B y A C. Podemos igualmente tomar por medida del diedro A O, ó lo que es lo mismo del ángulo A del triángulo esférico, el arco B' C' que resulta de prolongar los lados A B y A C, del ángulo A, hasta que tengan 90° y en reunir con un arco las extremidades B' y C'. En efecto, por ser de 90° los arcos A B' y A C' las rectas B' O y C' O serán perpendiculares á la arista A O del diedro en el punto O, y por ser B' C' la medida del ángulo B' O C' correspondiente al diedro, lo será de éste.



(Fig. 388)

La superficie del triángulo A B C no es plana, sino que es una porcion de la de la esfera.

Definicion.—*Se llama triángulo esférico la figura limitada por tres arcos de círculos máximos en la superficie de una esfera.*

Los elementos de un triángulo son los ángulos, los lados y la superficie.

No consideraremos sino los triángulos esféricos cuyos lados sean menores que 180°, y para simplificar supondremos el radio de la esfera igual á la unidad.

Cada ángulo del triángulo esférico tiene por medida la del ángulo diedro que forman los planos que contienen los arcos del ángulo.

CAPILLA ALFONSINA BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

Los lados del triángulo son arcos de círculo máximo que generalmente se estiman en grados y fracciones de grado; pero pueden medirse tambien, en partes del radio, y calcularse su longitud, esto es, rectificarlos, conociendo su valor en grados y la magnitud del radio de la esfera que se considera.

Si representamos por r el radio de la esfera expresado en metros, por a el lado de triángulo esférico estimado en grados y fracciones de grado, y por l la longitud del arco a en metros, la siguiente proporcion nos dará á conocer el valor de l

$$360^\circ : a^\circ :: 2\pi r : l$$

ó bien

$$l = \frac{\pi r a^\circ}{180}$$

Siempre designaremos los ángulos de los triángulos esféricos por las letras mayúsculas A, B y C. y los lados respectivamente opuestos á los ángulos por las minúsculas a, b y c.

839.—Definicion de trigonometría esférica.—*La trigonometría esférica tiene por objeto: 1° conocer las relaciones que existen entre los elementos de un triángulo esférico, y 2° dados tres de estos elementos, determinar por medio del cálculo los otros tres, ó la superficie del triángulo.*

A menudo lo que se estudia y llega á conocerse no es la relacion entre los elementos mismos de un triángulo esférico, sino la que existe entre las líneas trigonométricas de esos elementos.

840.—Propiedades de los triangulos esféricos.— Como si reunimos los tres vértices A, B y C (fig. 388) de un triángulo esférico con el centro O de la esfera resulta un triedro, es claro que las propiedades y casos de igualdad de los triedros, que hemos demostrado en geometría, serán aplicables á los triángulos esféricos.

1°—*Cada uno de los ángulos formado por dos aristas es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.* (629) Estas propiedades aplicadas al triángulo esférico quedarán cifradas en las siguientes desigualdades:

$$a < b + c$$
$$a > b - c$$

2°—*La suma de los tres ángulos planos es menor que cuatro rectos.* (630)

$$a + b + c < 360°$$

3°—*Cada ángulo plano es menor que* 180°.

En efecto, restando miembro á miembro las desigualdades

$$a+b+c<360°$$
$$b+c>a$$

obtendremos $a<360°-a$

trasladando $2\,a<360°$

y por último $a<\frac{360°}{2}$, esto es, $a<180°$

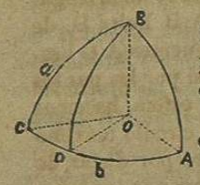
4°—*La suma de los ángulos diedros es mayor que 2 y menor que 6 ángulos rectos.* (633)

$$A+B+C>2 \text{ rectos} \qquad \text{y } A+B+C<6 \text{ rectos.}$$

5°—*El lado mayor está opuesto al mayor ángulo y recíprocamente.*

Decimos que si $B>A$ se tendrá $b>a$. En efecto, si en el vértice B (fig. 389) construimos el ángulo A B D=A; á causa de ser el ángulo $B>A$, el arco B D caerá dentro del ángulo A B C, y en el triángulo A B D por ser A=A B D, se tendrá:

$$B\,D = A\,D\ *$$



(Fig. 389)

Por otra parte $B\,D+D\,C>C\,B$

y sustituyendo $A\,D+D\,C>B\,C$

ó bien $b>a$

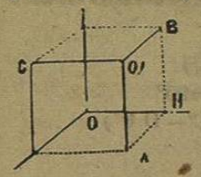
que es lo que se queria demostrar.

Recíprocamente si $b>a$, se tendrá $B>A$. En efecto, B no puede ser igual á A, porque entonces inferiríamos que lados desiguales estarían opuestos á ángulos iguales; tam-

* Para demostrarlo, bastaría reunir la mitad del arco A B con D y resultarían dos triángulos iguales, por tener dos lados y un ángulo respectivamente iguales.

poco puede ser $B<A$, porque resultaria el absurdo de que al menor ángulo estaría opuesto el mayor lado.

841.—Triángulo suplementario.—Hemos visto (633) que si desde un punto O' (fig. 390) tomado en el interior de un triedro O bajamos perpendiculares O' A, O' B y O' C á sus tres caras y hacemos pasar planos por estas perpendiculares, resulta un segundo triedro O', cuyos ángulos planos son respectivamente suplementos de los ángulos diedros del triedro O, y cuyos diedros son suplementos de los ángulos planos del triedro O.

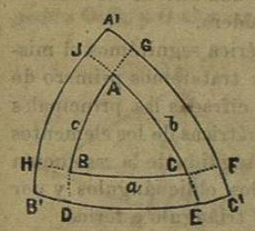


(Fig. 390.)

Aplicando esta construccion á un triángulo esférico, se comprende que siempre es posible obtener *otro* cuyos lados sean suplementos de los ángulos del primero, y cuyos ángulos sean suplementos de los lados del primero. Esto es, representando por A, B y C los ángulos y por *a*, *b* y *c* los lados del primer triángulo, y por A', B' y C' los ángulos y por *a'*, *b'* y *c'* los lados del segundo, tendrémos:

$$a'=180°-A \qquad A'=180°-a$$
$$b'=180°-B \qquad B'=180°-b$$
$$c'=180°-C \qquad C'=180°-c$$

A este segundo triángulo A' B' C' suplementario del primero A B C se le llama tambien *triángulo polar;* porque trazando sobre la esfera un triángulo de cuyos lados sean sus *polos* respectivos los ángulos del primer triángulo, resultan dos triángulos suplementarios.



(Fig. 391.)

En efecto, sea A B C (fig. 391) un triángulo esférico. Prolonguemos A B hasta D, de modo que A D=90°; prolonguemos A C hasta E para tener A E=90°, y si por los puntos D y E y por el centro de la esfera hacemos pasar un plano, tendrémos el círculo máximo B' C' del cual será A *su polo*, por distar de todos sus puntos 90°. Prolongando los lados B A y B C hasta G y F para que se tengan B G=B F=90°, y haciendo pasar un plano por estos puntos y por el centro de la esfera, determinarémos el arco A' C' de círculo máximo, cuyo polo es B. La misma construccion nos conduce á determinar el arco A' B' cuyo polo es C. Siendo por construccion los vértices A, B y C, polos de los lados del triángulo A' B' C',

vamos á demostrar que recíprocamente los vértices de este son polos de los lados del primer triángulo A B C. Estando todos los puntos del arco A′ C′ á 90° de B, este punto distará 90° de C′, y estando todos los puntos del arco B′ C′ á 90° de A, este punto distará 90° de C′ y por tanto C′ será el polo del arco A B. De igual manera se demuestra que A′ es polo de B C y que B′ lo es de A C.

Ahora bien, siendo A D=90° y A E=90°, el arco D E será la medida del ángulo A (838)

Esto es, $A = D\,E$

Además tenemos $B'\,E = 90°$ y $C'\,D = 90°$

$$D\,E = B'\,E - B'\,D = B'\,E - (B'\,C' - D\,C')$$

sustituyendo $A = 90° - (a' - 90°) = 180° - a'$

luego $a' = 180 - A.$

Así se demostraria que $b' = 180° - B$ y que $c' = 180° - C.$

Siendo A′ H=90° y A′ F=90°, el arco H F será medida del ángulo A′ (838)

Esto es $A' = H\,F$

$$H\,F = B\,F + H\,B = B\,F + (H\,C - B\,C)$$

sustituyendo $A' = 90° + 90° - a$

luego $A' = 180° - a$

y de la misma manera se demostraria que

$$B' = 180° - b \text{ y que } C' = 180° - c.$$

Debe notarse que de los dos polos que tiene cada uno de los arcos se toma el que queda en el hemisferio que se considera.

842.—En el estudio de la trigonometría esférica seguirémos el mismo método que en la trigonometría rectilínea: trataremos primero de las fórmulas fundamentales en las que están cifradas las principales relaciones que existen entre las líneas trigonométricas de los elementos de los triángulos esféricos, nos ocuparémos en seguida de la resolucion de los triángulos rectángulos, luego de la de los oblicuángulos y por último de la determinacion de la superficie del triángulo esférico.

Debemos hacer notar que puede resolverse un triángulo esférico conociendo sus tres ángulos, sin que sea necesario, como en los triángulos rectilíneos, conocer un lado; lo cual tiene por causa que la suma de los ángulos de un triángulo plano constantemente es igual á 180°, miéntras que en los triángulos esféricos la suma de sus ángulos puede variar entre 2 y 6 ángulos rectos.

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

Relacion entre los ángulos y los lados de un triángulo esférico.

843.—De las quince combinaciones que pueden formarse con 6 cantidades combinadas de 4 en 4 segun la fórmula (356)

$$C^m_n = \frac{m(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\,2.\,3\ldots\ldots n}$$

$$C^6_4 = \frac{6\times5\times4\times3}{1\times2\times3\times4} = 15$$

cuatro son las relaciones diferentes que pueden existir entre los lados y los ángulos de un triángulo esférico y son:

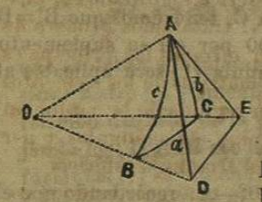
1ª Entre los tres lados y un ángulo.

2ª Entre dos lados y los ángulos opuestos.

3ª Entre dos lados, el ángulo comprendido y uno de los ángulos opuestos.

4ª Entre un lado y los tres ángulos.

844.—Relacion entre los tres lados y un ángulo.—Sea A B C (fig. 392) un triángulo trazado sobre una esfera cuyo centro es O, y cuyo radio supondremos igual á la unidad. Pudiendo ser el lado *a de cualquiera magnitud*, supondrémos menores que 90° los lados *b* y *c*. Trazando los rádios O A, O B, y O C, las tangentes A D y A E; prolongando O B, y O C y tirando la recta D E, tendrémos:



(Fig. 392.)

$$A\,D = \text{tang. } c \text{ y } A\,E = \text{tang. } b$$
$$O\,D = \text{sec. } c \text{ y } O\,E = \text{sec. } b$$
$$\text{ángulo } E\,A\,D = A \text{ y ángulo } E\,O\,D = a$$

Los triángulos E O D y E A D dan (808 2°)

$$D\,E^2 = E\,O^2 + D\,O^2 - 2\,E\,O \times D\,O \cos E\,O\,D$$
$$D\,E^2 = E\,A^2 + D\,A^2 - 2\,E\,A \times D\,A \cos E\,A\,D$$

sustituyendo: $D\,E^2 = \text{sec.}^2\,b + \text{sec.}^2\,c - 2 \text{ sec. } b. \text{ sec. } c \cos a$

$D\,E^2 = \text{tang}^2\,b + \text{tang}^2\,c - 2 \text{ tang } b. \text{ tang } c. \cos A$

restando la segunda ecuacion de la primera para eliminar á D E² re-

cordando que sec.^{2} a$=1+$tang^2 a, y sustituyendo por sec. b$=\frac{1}{\cos b}$

por sec c$=\frac{1}{\cos c}$, por tang b$=\frac{\text{sen b}}{\cos b}$ y por tang c $=\frac{\text{sen c}}{\cos c}$, resulta:

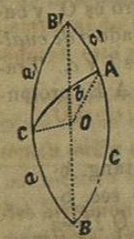
$$o=1+1-\frac{2\cos a}{\cos b\cos c}+\frac{2\,\text{sen b. sen c. cos A}}{\cos b.\ \cos c}$$

reduciendo, dividiendo por 2 y quitando los denominadores, resulta:

$$o=\cos b\cos c-\cos.a+\text{sen b. sen c. cos A};$$
$$\cos.a=\cos b\cos c+\text{sen b. sen c. cos A}\ldots.(1)$$

fórmula fundamental de la trigonometría esférica en la que están cifradas las relaciones que existen entre los tres lados y un ángulo de un triángulo esférico.

845.—Generalidad de la fórmula precedente.—Para establecer la fórmula (1) hemos considerado que pueda tener *a* cualquier valor, y hemos supuesto que tanto *b* como *c* eran menores que 90°, vamos á demostrar que dicha fórmula subsiste igualmente cuando uno de estos lados, *b* ó *c* ó cuando ambos sean mayores ó iguales á 90°.



(Fig. 393.)

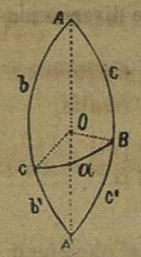
1° Supongamos como ántes $a=>$ ó $<$ que 90°, y hagamos ahora c$>$90° y b$<$90°. Si prolongamos (fig. 393) los arcos B A y B C de círculos máximos hasta que se encuentren en B', concibiendo los dos planos que contienen dichos arcos y que pasan por el mismo diámetro B B', se ve que B A B'$=$B C B'$=$180° y que el ángulo B$=$B'. Considerando el triángulo B' A C, tendrémos que B'$=$B b$<$90° por el supuesto, y c'$<$90 por ser su suplemento c$>$90. En consecuencia la fórmula (1) será aplicable al triángulo B' A C y tendrémos:

$$\cos.a'=\cos b\cos c'+\text{sen b sen c' cos B' A C}$$

siendo a'$=$180°$-$a; c'$=$180$-$c; B' A C$=$180°$-$A; recordando que el coseno de un ángulo es igual al de su suplemento con signo contrario y sustituyendo, resulta:

$$\cos.a=\cos b.\ \cos c+\text{sen b sen c cos A}$$

que es la fórmula (1) aplicable al triángulo B A C en el que c$>$90°



(Fig. 394.)

2° Sean ahora (fig. 394) *b*$>$90° y *c*$>$90° pudiendo tener *a* cualquier valor. Prolonguemos A B y A C hasta que se encuentren en A'. En el triángulo A' B C, en el que tanto b' como c' son menores que un cuadrante, tendremos:

$$\cos.\ a=\cos.\ b'\cos.\ c'+\text{sen. b' sen. c' cos. A'}$$

b'$=$180°$-$b; c'$=$180°$-$c; A'$=$A; recordando que el coseno de un ángulo es igual al de su suplemento con signo contrario, y que el seno de un ángulo es igual al de su suplemento, sustituyendo resulta:

$$\cos.\ a=\cos.\ b\cos.\ c+\text{sen. b sen. c cos. A}$$

que es la fórmula (1) aplicable al triángulo B A C en el que los lados *b* y *c* son mayores que 90°.

Como si en la (fig. 392) suponemos que uno de los lados *b* ó *c* ó que ambos sean iguales á 90° desarrollando el cálculo del párrafo 844 obtendrémos la fórmula (1), resulta que esta es general y aplicable á un triángulo esférico cualquiera que sea la magnitud de sus lados.

De la fórmula que se acaba de establecer se obtienen por simple cambio de letras otras dos fórmulas semejantes; resultando así las tres ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}\cos.\ a=\cos.\ b\cos.\ c+\text{sen. b sen. c cos. A}\\ \cos.\ b=\cos.\ a\cos.\ c+\text{sen. a sen. c cos. B}\\ \cos.\ c=\cos.\ a\cos.\ b+\text{sen. a sen. b cos. C}\end{array}\right\}\ldots\ldots..(1)$$

que se deben considerar como fundamentales de la trigonometría esférica. Entre los elementos de un triángulo esférico no puede existir una relacion distinta de la precedente, porque si esto fuera posible, despejando los ángulos A, B, y C de esa relacion diversa, así como de las fórmulas (1) se obtendrian para los ángulos A, B, y C dos valores diferentes, lo cual es un absurdo. De las fórmulas (1) se pueden deducir otras muchas que es indispensable conocer, y que vamos á obtener sucesivamente.

846.—Relacion entre dos lados y los ángulos opuestos.—Para obtener una relacion, por ejemplo entre *a*, *b*, A y B debemos elimi-

nar á C y c en las ecuaciones (1) lo cual puede lograrse de diversas maneras, pero vamos á indicar el siguiente procedimiento.

De la fórmula (1)

$$\cos. a = \cos. b \cos. c + \text{sen. } b \text{ sen. } c \cos A$$

despejando á

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}$$

sustituyendo este valor en la expresion

$$\text{sen.}^2 A = 1 - \cos.^2 A$$

se tiene

$$\text{sen.}^2 A = 1 - \left(\frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}\right)^2$$

sustituyendo la diferencia de los cuadrados por el producto de la suma por la diferencia de las cantidades, resulta:

$$\text{sen.}^2 A = \left(1 + \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}\right)\left(1 - \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}\right)$$

incorporando los enteros á los quebrados y multiplicando los denominadores, esta expresion se trasforma en las siguientes:

$$\text{sen.}^2 A =$$

$$\frac{(\text{sen. } b \text{ sen. } c + \cos. a - \cos. b \cos. c)\,(\text{sen. } b \text{ sen } c - \cos. a + \cos. b \cos c)}{\text{sen.}^2 b \text{ sen.}^2 c};$$

$$\text{sen.}^2 A = \frac{[\cos. a - \cos(b+c)]\ [\cos.(b-c) - \cos. a]}{\text{sen.}^2 b \text{ sen.}^2 c}$$

sustituyendo la diferencia de los cosenos por sus valores (776 f. 62)

$$\text{sen.}^2 A =$$

$$\frac{4 \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ sen. } \frac{1}{2}(b+c-a) \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+b-c) \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen.}^2 b \text{ sen.}^2 c} \ldots (c)$$

haciendo el mismo cálculo con la fórmula

$$\cos. b = \cos. a \cos. c + \text{sen. } a \text{ sen. } c \cos. B$$

se encuentra:

$$\text{sen.}^2 B =$$

$$\frac{4 \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+c-b) \text{ sen } \frac{1}{2}(a+b-c) \text{ sen. } \frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sen.}^2 a \text{ sen.}^2 c} \ldots (d)$$

dividiendo la ecuacion (c) por la (d) se encuentra:

$$\frac{\text{sen.}^2 A}{\text{sen.}^2 B} = \frac{\text{sen.}^2 a}{\text{sen.}^2 b}$$

extrayendo raíz y trasladando resulta finalmente:

$$\frac{\text{sen. } a}{\text{sen. } A} = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B}$$

847.—El mismo cálculo aplicado á la fórmula

$$\cos. c = \cos. a \cos. b + \text{sen. } a \text{ sen. } b \cos. C$$

conduciría al resultado

$$\frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B} = \frac{\text{sen. } c}{\text{sen. } C}$$

y por tanto se tiene finalmente:

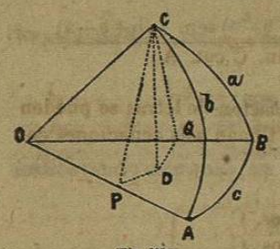
$$\frac{\text{sen. } a}{\text{sen. } A} = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B} = \frac{\text{sen. } c}{\text{sen. } C} \ldots\ldots (2)$$

La fórmula (2) expresa que *los senos de los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.*

848.—La fórmula (2) puede obtenerse directamente de la figura como sigue: Bajemos del punto C (fig. 395) una perpendicular C D al plano A O B y del pié D tiremos en el mismo plano, D P perpendicular á O A y D Q perpendicular á O B. Siendo el plano C D P perpendicular á O A si tiramos C P esta recta será perpendicular á O A.

Igualmente siendo el plano C D Q perpendicular á O B la recta C Q será perpendicular á O B.

Considerando el triángulo C D P rectángulo en C D P y el triángulo C D Q rectángulo en C D Q se tiene:



(Fig. 395.)

$$C\,D = C\,P \text{ sen. } C\,P\,D$$
$$C\,D = C\,Q \text{ sen. } C\,Q\,D$$

igualando se tiene:

$$C\,P \text{ sen. } C\,P\,D = C\,Q \text{ sen. } C\,Q\,D \ldots (b)$$

considerando que C P=sen. b, que C P D =A, que C Q=sen. a y que C Q D=B, y sustituyendo en la ecuacion (b) resulta:

$$\text{sen. } b \text{ sen } A = \text{sen. } a \text{ sen. } B$$

trasladando $\dfrac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B} = \dfrac{\text{sen. } a}{\text{sen. } A}$

que es la fórmula (2)

849.—Relacion entre dos lados, el ángulo que forman y el ángulo opuesto á uno de ellos.—Si buscamos una relacion entre *a*, *b*, C y A tendremos que eliminar *c* y B entre las ecuaciones (1) y (2). En la ecuacion

$$\cos. a = \cos. b \cos. c + \text{sen. } b \text{ sen. } c \cos. A$$

sustituiremos $\cos. c = \cos. a \cos. b + \text{sen. } a \text{ sen. } b \cos. C$

y $\text{sen. } c = \text{sen. } C \dfrac{\text{sen. } a}{\text{sen. } A}$

lo que da:

$$\cos. a = \cos. b\,(\cos. a \cos. b + \text{sen. } a \text{ sen. } b \cos. C) + \frac{\text{sen. } b \text{ sen. } a \text{ sen. } C \cos. A}{\text{sen. } A}$$

$$\cos. a = \cos. a \cos^2 b + \text{sen. } a \text{ sen. } b \cos. b \cos. C + \text{sen. } b \text{ sen. } a \text{ sen. } C \cot. A$$

$$\cos. a\,(1 - \cos.^2 b) = \text{sen. } a \text{ sen. } b\,(\cos. b \cos. C + \text{sen. } C \cot. A)$$

$$\frac{\cos. a \text{ sen.}^2 b}{\text{sen. } a \text{ sen. } b} = \cos. b \cos. C + \text{sen. } C \cot. A$$

y por último

$$\cot. a \text{ sen. } b = \cos. b \cos. C + \text{sen. } C \cot. A$$

Por cálculos idénticos, ó por simple permutacion de letras se pueden obtener otras cinco fórmulas semejantes y se tienen seis ecuaciones correspondientes á ella, que son:

$$\left.\begin{array}{l}
\cot. a \text{ sen. } b - \cot. A \text{ sen. } C = \cos. b \cos. C \\
\cot. b \text{ sen. } a - \cot. B \text{ sen. } C = \cos. a \cos. C \\
\cot. b \text{ sen. } c - \cot. B \text{ sen. } A = \cos. c \cos. A \\
\cot. c \text{ sen. } b - \cot. C \text{ sen. } A = \cos. b \cos. A \\
\cot. c \text{ sen. } a - \cot. C \text{ sen. } B = \cos. a \cos. B \\
\cot. a \text{ sen. } c - \cot. A \text{ sen. } B = \cos. c \cos. B
\end{array}\right\} \ldots (3)$$

850.—Relacion entre un lado y los tres ángulos.—Para determinar una relacion entre *a*, A, B, C aplicando al triángulo suplementario (841 fig. 391) A' B' C' la fórmula fundamental, tendremos:

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \text{sen } b' \text{ sen } c' \cos A'$$

Como a'=180°—A; b'=180°—B; c'=180°—C y A'=180—a; sustituyendo resulta:

$$-\cos A = \cos B \cos C - \text{sen } B \text{ sen } C \cos a$$

cambiando signos

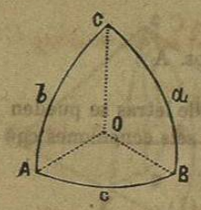
$$\cos A = -\cos B \cos C + \text{sen } B \text{ sen } C \cos a$$

aplicando el mismo procedimiento á las otras fórmulas (1) ó por simple cambio de letras resultan las tres relaciones.

$$\left.\begin{array}{l}
\cos. A = -\cos. B \cos. C + \text{sen. } B \text{ sen. } C \cos. a \\
\cos. B = -\cos. A \cos. C + \text{sen. } A \text{ sen. } C \cos. b \\
\cos. C = -\cos. A \cos. B + \text{sen. } A \text{ sen. } B \cos. c
\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (4)$$

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
N. L.

Fórmulas relativas á los triángulos rectángulos.



(Fig. 396.)

851.—Los triángulos esféricos pueden tener los tres ángulos rectos, dos, ó solamente uno; pero es inútil considerar los casos en que el triángulo tiene *dos* ó *tres* rectos. En efecto, si suponemos que los ángulos A y B (fig. 396) sean rectos, los dos planos A O C y A O B, serán perpendiculares entre sí, y sucederá lo mismo con los planos C O B y A O B; de consiguiente, C O es perpendicular á A O B, y serán rectos los ángulos rectilíneos C O A, C O B; esto es, a=b=90°, así como A y B. Por otra parte, por ser C O perpendicular á O A y á O B, el ángulo C estará medido por el ángulo rectilíneo A O B y se tiene C=c.

Si los tres ángulos son rectos, los radios A O, B O y C O, serán perpendiculares entre sí y se tendrá a=b=c=90°.

En uno y otro caso no hay problema que resolver.

852.—Formulas de los Triángulos rectángulos.—Supondremos que A=90°. La hipotenusa será *a*, y los lados del ángulo recto serán *b* y *c*.

Recordando que seno 90°=1, que cos 90°=0, que tang 90=∞, que cot 90°=o y sustituyendo en las fórmulas respectivas (1) (2) (3) y (4), obtendrémos las correspondientes á los triángulos rectángulos.

La fórmula (1)

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

cuando A=90° se convierte en la fórmula única:

$$\cos a = \cos b \cos c \ldots\ldots\ldots (5)$$

La fórmula (2)

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

cuando A=90° da:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C\end{array}\right\} \ldots\ldots (6)$$

La fórmula 1ª de las (3)

$$\cot a \operatorname{sen} b - \cot A \operatorname{sen} C = \cos b \cos C$$

cuando A=90° da:

$$\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{tang} a} = \cos b \cos C$$

$$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \cos C \ldots . (7)$$

La 6ª fórmula de las (3)

$$\cot a \operatorname{sen} c - \cot A \operatorname{sen} B = \cos c \cos B$$

cuando A=90° da:

$$\cot a \operatorname{sen} c = \cos c \cos B$$

ó bien $\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B \ldots (7)$

La 3ª de las fórmulas (3)

$$\cot b \operatorname{sen} c - \cot B \operatorname{sen} A = \cos c \cos A$$

da, si A=90° $\cot b \operatorname{sen} c = \cot B$

ó bien $\operatorname{tang} b = \operatorname{sen} c \operatorname{tang} B \ldots . (8)$

De la 4ª de las fórmulas (3)

$$\cot c \operatorname{sen} b - \cot C \operatorname{sen} A = \cos b \cos A$$

Cuando A=90° se tiene:

$$\cot c \operatorname{sen} b = \cot C$$

ó bien $\operatorname{tang} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tang} C \ldots . (8)$

De la 2ª de las fórmulas (4)

$$\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b$$

cuando A=90° se tiene:

$$\cos B = \cos b \operatorname{sen} C \ldots (9)$$

De la 3ª de las fórmulas (4)

$$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c$$

cuando A=90° se obtiene:

$$\cos C = \cos c \operatorname{sen} B \ldots (9)$$

De la 1ª de las fórmulas (4)

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

Cuando A=90° se tiene:

$$\cos B \cos C = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

ó bien la fórmula única:

$$\cos a = \cot B \cot C \ldots (10)$$

En las seis fórmulas diferentes que acabamos de obtener, están cifrados los siguientes principios:

$$\cos a = \cos b \cos c \ldots (5)$$

expresa que *el coseno de la hipotenusa es igual al producto de los cosenos de los catetos.*

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C \end{array}\right\} \ldots (6)$$

expresan que *el seno de un lado es igual al seno de la hipotenusa multiplicado por el seno del ángulo opuesto al lado que se considera.*

$$\left.\begin{array}{l} \text{tang. } b = \text{tang. } a \cos. C \\ \text{tang. } c = \text{tang. } a \cos. B \end{array}\right\} \ldots (7)$$

expresan que *la tangente de un lado es igual al producto de la tangente de la hipotenusa por el coseno del ángulo adyacente.*

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
U. A. N. L.

$$\left.\begin{array}{l} \text{tang. } b = \text{sen. } c \text{ tang. } B \\ \text{tang. } c = \text{sen. } b \text{ tang. } C \end{array}\right\} \ldots (8)$$

expresan que *la tangente de un lado es igual al producto del seno del otro lado por la tangente del ángulo opuesto al primero.*

$$\left.\begin{array}{l} \cos. B = \cos. b \text{ sen. } C \\ \cos. C = \cos. c \text{ sen. } B \end{array}\right\} \ldots (9)$$

expresan que *el coseno de un ángulo es igual al producto del coseno del lado opuesto por el seno del otro ángulo.*

$$\cos. a = \cot. B \cot. C \ldots (10)$$

expresa que *el coseno de la hipotenusa es igual al producto de las cotangentes de los ángulos oblícuos.*

853.—Discusion de algunas fórmulas de los triángulos rectángulos.—En la fórmula

$$\cos. a = \cos. b \cos. c$$

pueden hacerse las siguientes hipótesis:

1ª	$b<90°$ cos. b tiene signo +	$c<90°$ cos. c ,, ,, +	cos. a tendrá signo + y $a<90°$
2ª	$b>90°$ cos. b ,, ,, —	$c>90°$ cos. c ,, ,, —	cos. a ,, ,, + y $a<90°$
3ª	$b>90°$ cos. b ,, ,, —	$c<90°$ cos. c ,, ,, +	cos. a ,, ,, — y $a>90°$
4ª	$b<90°$ cos. b ,, ,, +	$c>90°$ cos. c ,, ,, —	cos. a ,, ,, — y $a>90°$

De lo cual se deduce la siguiente regla. *Cuando los lados del ángulo recto son de la misma especie, la hipotenusa es menor que 90°; y cuando esos lados son de distinta especie, la hipotenusa es mayor que 90°.*

En la fórmula

$$\text{tang. } b = \text{sen. } c \text{ tang. } B$$

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

vemos que tang. b, es el producto de dos factores, y como uno de ellos, sen. *c*, siempre es positivo, á causa de que $c<180°$, tang. b tendrá el mismo signo que tang. B. Cuando tang. *b* y tang. B tengan signo + serán *b* y B menores que 90°, y cuando tengan signo — serán *b* y B mayores que 90°, luego *un lado del ángulo recto siempre es de la misma especie que el ángulo opuesto.*

La fórmula

$$\cos. a = \cot. B \cot. C$$

discutida lo mismo que *cos. a=cos. b cos. c* conduce á la consecuencia de que *cuando los ángulos* B, C *son de la misma especie, la hipotenusa es menor que* 90°; *pero que cuando son de distinta especie, la hipotenusa es mayor que* 90°.

854.—Trasformaciones de las fórmulas de los triángulos rectángulos.—Las fórmulas anteriores pueden trasformarse en otras, que es conveniente conocer, porque los resultados son más aproximados sirviéndose de los logaritmos.

De la fórmula

$$\cos. a = \cos. b \cos. c$$

despejando á

$$\cos. c = \frac{\cos. a}{\cos. b}$$

y sustituyendo este valor en la expresion

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{1-\cos. c}{1+\cos. c}}$$

resulta:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{1-\frac{\cos. a}{\cos. b}}{1+\frac{\cos. a}{\cos. b}}} = \sqrt{\frac{\cos. b-\cos. a}{\cos. b+\cos. a}}$$

$$= \sqrt{\text{tang. } \tfrac{1}{2} (a-b) \text{ tang. } \tfrac{1}{2} (a+b)} \quad [777 \text{ f } (52)]$$

por trasformaciones idénticas se obtiene tang. $\frac{1}{2}$ b, de manera que de la fórmula *cos. a=cos. b cos. c* resultan las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \text{tang. } \tfrac{1}{2} c &= +\sqrt{\text{tang. } \tfrac{1}{2} (a-b) \text{ tang. } \tfrac{1}{2} (a+b)} \\ \text{tang. } \tfrac{1}{2} b &= +\sqrt{\text{tang. } \tfrac{1}{2} (a-c) \text{ tang. } \tfrac{1}{2} (a+c)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (11)$$

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
San José Mezquitera, MEXICO

De la fórmula

$$\text{sen. } b = \text{sen. } a \text{ sen. } B$$

se obtiene

$$\text{sen. } a = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B} \ldots\ldots\ldots (a)$$

por otra parte

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} (90° + a) = \sqrt{\frac{1-\cos. [90° + a]}{1+\cos. [90° + a]}} = \sqrt{\frac{1+\text{sen. } a}{1-\text{sen. } a}}$$

sustituyendo la expresion (a) en esta fórmula, se tiene:

$$\text{tang. } [45° + \tfrac{1}{2} a] = \pm \sqrt{\frac{1+\frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B}}{1-\frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B}}} = \sqrt{\frac{\text{sen. } B+\text{sen. } b}{\text{sen. } B-\text{sen. } b}}$$

ó bien

$$\text{tang. } [45° + \tfrac{1}{2} a] = \pm \sqrt{\frac{\text{tang. } \frac{1}{2} [B+b]}{\text{tang. } \frac{1}{2} [B-b]}} \quad (777 \text{f} [67])$$

De manera que de las fórmulas (6) se obtienen:

$$\text{tang. } [45° + \tfrac{1}{2} a] = \pm \sqrt{\frac{\text{tang. } \frac{1}{2} [B+b]}{\text{tang. } \frac{1}{2} [B-b]}} = \pm \sqrt{\frac{\text{tang. } \frac{1}{2} [C+c]}{\text{tang. } \frac{1}{2} [C-c]}} \ldots\ldots (12)$$

Como las fórmulas (6) no se alteran cuando en ellas se reemplaza el lado *a* por el ángulo B, y B por *a*, así como cuando se reemplaza *a* por C y C por *a*, pues se tiene:

$$\text{sen. } b = \text{sen. } a \text{ sen. } B = \text{sen. } B \text{ sen. } a$$
$$\text{sen. } c = \text{sen. } a \text{ sen. } C = \text{sen. } C \text{ sen. } a$$

haciendo esta permutacion en las fórmulas (12) que se han deducido de las (6) se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \text{tang. } [45° + \tfrac{1}{2} B] &= \pm \sqrt{\frac{\text{tang. } \frac{1}{2} (a+b)}{\text{tang. } \frac{1}{2} (a-b)}} \\ \text{tang. } [45° + \tfrac{1}{2} C] &= \pm \sqrt{\frac{\text{tang. } \frac{1}{2} (a+c)}{\text{tang. } \frac{1}{2} (a-c)}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (13)$$

Por cálculos análogos, cuyo desarrollo recomendamos al lector que ejecute, pueden obtenerse las fórmulas siguientes:

De las fórmulas $\text{tang.}\,b = \text{tang.}\,a \cos.C$, $\text{tang.}\,c = \text{tang.}\,a \cos.B$

se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,C &= +\sqrt{\frac{\text{sen.}\,(a-b)}{\text{sen.}\,(a+b)}} \\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,B &= +\sqrt{\frac{\text{sen.}\,(a-c)}{\text{sen.}\,(a+c)}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (14)$$

De las fórmulas

$\text{tang.}\,b = \text{sen.}\,c\ \text{tang.}\,B$, $\text{tang.}\,c = \text{sen.}\,b\ \text{tang.}\,C$

se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \text{tang.}\ [45^\circ + \tfrac{1}{2}\,c] &= \pm\sqrt{\frac{\text{sen.}\,[B+b]}{\text{sen.}\,[B-b]}} \\ \text{tang.}\ [45^\circ + \tfrac{1}{2}\,b] &= \pm\sqrt{\frac{\text{sen.}\,[C+c]}{\text{sen.}\,[C-c]}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (15)$$

Las fórmulas (9)

$$\cos.B = \cos.b\ \text{sen.}\,C$$
$$\cos.C = \cos.c\ \text{sen.}\,B$$

dan

$$\cos.b = \frac{\cos.B}{\cos.\,[90^\circ - C]} \quad \text{y} \quad \cos.c = \frac{\cos.C}{\cos.\,[90^\circ - B]}$$

sustituyendo en la fórmula

$$\text{tang.}^2\ \tfrac{1}{2}\,b = \frac{1-\cos.b}{1+\cos.b}$$

$$\text{tang.}^2\ \tfrac{1}{2}\,b = \frac{\cos.\,(90^\circ - C) - \cos.B}{\cos.\,(90^\circ - C) + \cos.B}$$

$$= \frac{2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,(90^\circ + B - C)\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,(B + C - 90^\circ)}{2\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,(90^\circ + B - C)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,(B + C - 90^\circ)}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,b = +\sqrt{\text{tang.}\left(45^\circ + \frac{B-C}{2}\right)\ \text{tang.}\left(\frac{B+C}{2} - 45^\circ\right)} \ldots (15\tfrac{1}{2})$$

un cálculo semejante con el valor de cos. c conduce al resultado

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,c = +\sqrt{\text{tang.}\left(45^\circ - \frac{B-C}{2}\right)\ \text{tang.}\left(\frac{B+C}{2} - 45^\circ\right)} \ldots\ldots (15\tfrac{1}{2})$$

Ahora, sustituyendo el valor de $\text{sen.}\,C = \dfrac{\cos.B}{\cos.b}$ de la ecuacion (9) en la fórmula:

$$\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\,C) = \sqrt{\frac{1+\text{sen.}\,C}{1-\text{sen.}\,C}}$$

se tiene:

$$\text{tang.}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\,C) = \sqrt{\frac{\cos.b + \cos.B}{\cos.b - \cos.B}} = \sqrt{\frac{2\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,(B+b)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,(B-b)}{2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,(B+b)\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,(B-b)}}$$

$$\text{tang.}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\,C) = \pm\sqrt{\cot.\ \tfrac{1}{2}\,(B+b)\ \cot.\ \tfrac{1}{2}\,(B-b)} \ldots (16)$$

un cálculo semejante con el valor $\text{sen.}\,B = \dfrac{\cos.C}{\cos.c}$ conduce á la fórmula:

$$\text{tang.}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\,B) = +\sqrt{\cot.\ \tfrac{1}{2}\,(C+c)\ \cot.\ \tfrac{1}{2}\,C-c]} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

La fórmula $\cos.a = \cot.B\ \cot.C$ se trasforma en:

$$\cos.a = \frac{\cos.B\ \cos.C}{\text{sen.}\,B\ \text{sen.}\,C}$$

sustituyendo este valor en la expresion:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{1-\cos.a}{1+\cos.a}} \quad \text{da:}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,B\ \text{sen.}\,C - \cos.B\ \cos.C}{\text{sen.}\,B\ \text{sen.}\,C + \cos.B\ \cos.C}} = \sqrt{\frac{-\cos.\,(B+C)}{\cos.\,(B-C)}}$$

y por último

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,a = +\sqrt{\frac{\cos.\,(180^\circ - B - C)}{\cos.\,(B-C)}} \ldots\ldots\ldots (16\tfrac{1}{2})$$

855.—Fórmulas de los triángulos rectiláteros.—Se dice que un triángulo esférico es *rectilátero* cuando uno de sus lados es de 90°. Si nos imaginamos un triángulo de esta especie A B C en el que el