lado a=90°, el triángulo suplementario A' B' C' será rectángulo en A. Aplicando á este triángulo las fórmulas (5) á (10),

$$\cos. a' = \cos. b' \cos. c'$$
$$\text{sen. } b' = \text{sen. } a' \text{ sen. } B'$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\cos. a' = \cot. B' \cot. C'$$

y sustituyendo en estas fórmulas los valores:

$$a' = 180 - A;\ b' = 180 - B;\ c' = 180° - C;$$
$$A' = 180° - a;\ B' = 180° - b,\ \text{y } C' = 180° - c$$

se obtendrán las siguientes fórmulas, correspondientes á un triángulo *rectilátero* que son:

$$\cos. A = -\cos. B \cos. C \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen. } B = \text{sen. } A \text{ sen. } b \\ \text{sen. } C = \text{sen. } A \text{ sen. } c\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (18)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } B = -\text{tang. } A \cos. c \\ \text{tang. } C = -\text{tang. } A \cos. b\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (19)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } B = \text{sen. } C \text{ tang. } b \\ \text{tang. } C = \text{sen. } B \text{ tang. } c\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (20)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos. b = \cos. B \text{ sen. } c \\ \cos. c = \cos. C \text{ sen. } b\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (21)$$

$$\cos. A = -\cot. b \cot. c \ldots\ldots\ldots (22)$$

A cuyas fórmulas se les puede hacer sufrir trasformaciones análogas á las que en el párrafo 854 hicimos experimentar á las de los triángulos rectángulos. Las fórmulas 17 á 22 pueden deducirse igualmente de las (1), (2), (3) y (4) haciendo en ellas $a = 90°$

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
N. L.

Uso de los ángulos auxiliares en la Trigonometría esférica.

856.—Las fórmulas generales (1) á (4) no son adaptables al uso de los logaritmos; pero pueden trasformarse, sirviéndose de un arco auxiliar, en otras que sean adecuadas para el empleo de estas magnitudes.

En efecto, esas fórmulas son de la forma

$$P = M \cos. \alpha + N \text{ sen. } \alpha \ldots\ldots\ldots (A)$$

siendo α uno de los seis elementos del triángulo, y M, N, P representando funciones monomias de las líneas trigonométricas de tres elementos diversos de α. Si se designa por φ un ángulo auxiliar, tal que

$$\text{tang. } \varphi = \frac{N}{M} \ldots\ldots\ldots (B)$$

escogiéndose la tangente porque esta línea puede tener toda clase de valores, y se sustituye N por su valor M tang. φ en la fórmula (A), y por tang. φ, $\frac{\text{sen. } \varphi}{\cos. \varphi}$, se convertirá en

$$P \cos. \varphi = M \cos. (\alpha - \varphi) \ldots\ldots\ldots (C)$$

De lo expuesto resulta que introduciendo el arco auxiliar φ, la fórmula (A) puede ser reemplazada por el sistema de las fórmulas (B) y (C) calculables ambas por logaritmos.

Por ejemplo, la fórmula fundamental

$$\cos. a = \cos. b \cos. c + \text{sen. } b \text{ sen. } c \cos. A \ldots\ldots\ldots (1)$$

puede hacerse calculable por logaritmos por medio de un arco auxiliar.

Sacando cos. b como factor comun

$$\cos. a = \cos. b\ (\cos. c + \text{sen. } c \text{ tang. } b \cos. A)$$

introduciendo el arco auxiliar φ, haciendo

$$\cot. \varphi = \text{tang. } b \cos. A \ldots\ldots\ldots (D)$$

sustituyendo resulta:

$$\cos. a = \cos. b \left(\cos. c + \text{sen. } c \frac{\cos. \varphi}{\text{sen. } \varphi}\right) = \cos. b \left(\frac{\text{sen. } \varphi \cos. c + \text{sen. } c \cos. \varphi}{\text{sen. } \varphi}\right)$$

y por último

$$\cos. a = \frac{\cos. b}{\text{sen. } \varphi} \text{ sen. } (\varphi + c) \ldots\ldots\ldots (E)$$

Fórmulas generales calculables por logaritmos.

857.—Fórmulas para determinar los ángulos en funcion de los lados.—Vamos á trasformar las fórmulas (1) para hacerlas adaptables al uso de los logaritmos, y por tanto propias para la resolucion de los problemas de la trigonometría esférica.

De la primera de las fórmulas (1)

$$\cos. a = \cos. b \cos. c + \text{sen. } b \text{ sen. } c \text{ sen. } A$$

se obtiene:

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c} \ldots\ldots\ldots [a]$$

sustituyendo este valor en la fórmula [770]

$$\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{1 - \cos. A}{2}$$

se tiene:

$$\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{1 - \dfrac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}}{2} = \frac{\text{sen. } b \text{ sen. } c + \cos. b \cos. c - \cos. a}{2 \text{ sen. } b \text{ sen. } c}$$

$$\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\cos. [b - c] - \cos. a}{2 \text{ sen. } b \text{ sen. } c} = \frac{\text{sen.} \tfrac{1}{2} [b - c + a] \text{ sen.} \tfrac{1}{2} [a + c - b]}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}$$

haciendo, como en los triángulos rectilíneos,

$$a + b + c = 2 p$$

restando de los dos miembros de esta ecuacion sucesivamente 2 c y 2 b, se obtiene:

$$a + b - c = 2 p - 2 c, \qquad a - b + c = 2 p - 2 b$$

sustituyendo estos valores en el de $\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} A$ y extrayendo raíz, resulta

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. } [p - b] \text{ sen. } [p - c]}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}} \ldots\ldots\ldots (23)$$

Sustituyendo ahora el valor

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}$$

en la fórmula [770]

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{1 + \cos. A}{2}$$

y por el mismo procedimiento de cálculo se obtiene:

$$\cos. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. } p \text{ sen. } [p - a]}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}} \ldots\ldots\ldots (24)$$

Dividiendo [23] por [24] resulta:

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. } [p - b] \text{ sen. } [p - c]}{\text{sen. } p \text{ sen. } [p - a]}} \ldots\ldots\ldots (25)$$

Dividiendo la (24) por la (23) resulta:

$$\cot. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. } p \text{ sen. } [p - a]}{\text{sen. } [p - b] \text{ sen. } [p - c]}} \ldots\ldots\ldots (26)$$

N. B.—En todas estas fórmulas, el radical debe tomarse con el signo más, en razon de que $A < 180°$ y de que las líneas trigonométricas de los ángulos agudos, $\tfrac{1}{2} A$, son positivas.

858.—Fórmulas para determinar los lados en funciom de los ángulos.—De la fórmula (4)

$$\cos. A = -\cos. B \cos. C + \text{sen. } B \text{ sen. } C \cos. a$$

se obtiene:

$$\cos. a = \frac{\cos. A + \cos. B \cos. C}{\text{sen. } B \text{ sen. } C}$$

sustituyendo este valor en las expresiones:

$$\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{1 - \cos. a}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos.^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{1 + \cos. a}{2}$$

y por medio de operaciones idénticas á las que hemos ejecutado en el párrafo anterior, se obtiene, haciendo:

$$P = \tfrac{1}{2} [A + B + C]$$

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{-\cos. P \cos. [P-A]}{\text{sen. } B \text{ sen. } C}} \quad \ldots\ldots\ldots(27)$$

$$\cos. \tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{\cos. [P-B] \cos. [P-C]}{\text{sen. } B \text{ sen. } C}} \quad \ldots\ldots\ldots(28)$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{-\cos. P \cos. (P-A)}{\cos. (P-B) \cos. (P-C)}} \quad \ldots\ldots\ldots(29)$$

$$\cot. \tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{\cos. (P-B) \cos. (P-C)}{-\cos. P \cos. (P-A)}} \quad \ldots\ldots\ldots(30)$$

Los valores de las expresiones anteriores, en las que cos.P está afectado del signo — dentro del radical, no son imaginarios, como á primera vista pudiera creerse, pues sabiendo que

$$A+B+C>2\times 90^\circ$$
$$A+B+C<6\times 90^\circ$$

resulta:

$$\tfrac{1}{2}(A+B+C)=P>90^\circ$$
$$P<3.90^\circ$$

y como el coseno en los arcos de 90 á 270° es negativo, resulta que — cos.P es una cantidad *positiva*, y por tanto serán reales los valores dados por las fórmulas precedentes.

Por medio del triángulo suplementario pueden deducirse estas cuatro fórmulas de las (23), (24), (25) y (26). Por vía de ejercicio de la fórmula

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{\text{sen. } (p-b) \text{ sen. } (p-c)}{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-a)}} \quad \ldots\ldots\ldots(25)$$

vamos á deducir las (29) y (30).

En el triángulo suplementario, tenemos:

$A=180^\circ-a'$	$a=180^\circ-A'$	$p-a=90^\circ-(P'-A')$
$B=180^\circ-b'$	$b=180^\circ-B'$	$p-b=90^\circ-(P'-B')$
$C=180^\circ-c'$	$c=180^\circ-C'$	$p-c=90^\circ-(P'-C')$
$P=270^\circ-p'$	$p=270^\circ-P'$	

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
N. L.

sustituyendo estos valores en la fórmula (25), se tiene:

$$\text{tang. } (90^\circ-\tfrac{1}{2}\,a')=\sqrt{\frac{\text{sen. } [90^\circ-(P'-B')] \text{ sen. } [90^\circ-(P'-C')]}{\text{sen. } (270^\circ-P') \text{ sen. } [90^\circ-(P'-A')]}}$$

$$\cot. \tfrac{1}{2}\,a'=\sqrt{\frac{\cos. (P'-B') \cos. (P'-C')}{-\cos. P' \cos. (P'-A')}} \quad \ldots\ldots\ldots(30)$$

ó

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,a'=\sqrt{\frac{-\cos. P' \cos. (P'-A')}{\cos. (P'-B') \cos. (P'-C')}} \quad \ldots\ldots\ldots(29)$$

Nos hemos limitado á establecer las fórmulas que dan un ángulo A en funcion de los lados, y las que dan un lado *a* en funcion de los ángulos; pero así como hemos determinado el ángulo A y su lado opuesto, bien sea procediendo sobre la respectiva fórmula fundamental, ó por simple permutacion de letras, pueden obtenerse cuatro fórmulas idénticas en el fondo á las (23) á (26) para determinar el ángulo B ó C, y cuatro fórmulas como las (27) á (30) para determinar los lados *b* y *c*. Por ejemplo:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,B=\sqrt{\frac{\text{sen. } (p-a) \text{ sen. } (p-c)}{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-b)}}$$

es fórmula correspondiente á la (25) para el ángulo B, y

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,c=\sqrt{\frac{-\cos. P \cos. (P-C)}{\cos. (P-A) \cos. (P-B)}}$$

es la correspondiente á la (29) para el lado *c*.

859.—Fórmulas para determinar los lados, en funcion de los ángulos y del exceso esférico.—Hemos visto que la suma de los tres ángulos A+B+C de un triángulo esférico, es mayor que 2 ángulos rectos y menor que 6. Ahora bien: *se llama exceso esférico la diferencia que hay entre la suma de los tres ángulos de un triángulo y* 180°.

Si representamos por ε este exceso, tendremos:

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$$

y como $\quad A + B + C = 2\,P$

$$\varepsilon = 2\,P - 180^\circ$$

de donde $\quad \frac{1}{2}\,\varepsilon = P - 90^\circ$

$$P = \frac{\varepsilon}{2} + 90^\circ$$

sustituyendo por P su valor en las ecuaciones (27), (28), (29) y (30), recordando que $\cos.\left(90^\circ + \frac{\varepsilon}{2}\right) = -\,\text{sen.}\frac{\varepsilon}{2}$,

y que $\quad \cos.\left(90^\circ + \frac{\varepsilon}{2} - A\right) = -\,\text{sen.}\left(\frac{\varepsilon}{2} - A\right) = \text{sen.}\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)$

se obtiene:

$$\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon\ \text{sen.}\,(A - \frac{1}{2}\,\varepsilon)}{\text{sen.}\,B\ \text{sen.}\,C}} \quad \ldots\ldots\ldots (31)$$

$$\cos.\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,(B - \frac{1}{2}\,\varepsilon)\ \text{sen.}\,(C - \frac{1}{2}\,\varepsilon)}{\text{sen.}\,B\ \text{sen.}\,C}} \quad \ldots\ldots\ldots (32)$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon\ \text{sen.}\,(A - \frac{1}{2}\,\varepsilon)}{\text{sen.}\,(B - \frac{1}{2}\,\varepsilon)\ \text{sen.}\,(C - \frac{1}{2}\,\varepsilon)}} \quad \ldots\ldots\ldots (33)$$

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,(B - \frac{1}{2}\,\varepsilon)\ \text{sen.}\,(C - \frac{1}{2}\,\varepsilon)}{\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon\ \text{sen.}\,(A - \frac{1}{2}\,\varepsilon)}} \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

860.—Fórmulas de Delambre.—Si en la fórmula

$$\text{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \text{sen.}\,\frac{A}{2}\cos.\frac{B}{2} + \text{sen.}\,\frac{B}{2}\cos.\frac{A}{2}$$

sustituimos por sen. $\frac{1}{2}$ A, cos. $\frac{1}{2}$ A, sus valores de las fórmulas (23) y (24), y sus correspondientes por sen. $\frac{1}{2}$ B y por cos. $\frac{1}{2}$ B, encontraremos:

$$\text{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,(p-b)\ \text{sen.}\,(p-c)}{\text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c}} \cdot \sqrt{\frac{\text{sen.}\,p\ \text{sen.}\,(p-b)}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,c}}$$

$$+ \sqrt{\frac{\text{sen.}\,(p-a)\ \text{sen.}\,(p-c)}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,c}} \cdot \sqrt{\frac{\text{sen.}\,p\ \text{sen.}\,(p-a)}{\text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c}}$$

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

ejecutando la multiplicacion:

$$\text{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\text{sen.}\,(p-b)}{\text{sen.}\,c}\sqrt{\frac{\text{sen.}\,p\ \text{sen.}\,(p-c)}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,b}}$$

$$+ \frac{\text{sen.}\,(p-a)}{\text{sen.}\,c}\sqrt{\frac{\text{sen.}\,p\ \text{sen.}\,(p-c)}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,b}}$$

como segun la fórmula correspondiente á la (24)

$$\cos.\,\tfrac{1}{2}\,C = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,p\ \text{sen}\,(p-c)}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,b}}$$

sustituyendo se tiene:

$$\text{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\text{sen.}\,(p-b)}{\text{sen.}\,c}\cos.\,\tfrac{1}{2}\,C + \frac{\text{sen.}\,(p-a)}{\text{sen.}\,c}\cos.\,\tfrac{1}{2}\,C$$

$$\text{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\cos.\,\frac{1}{2}\,C}{\text{sen.}\,c}\Big(\text{sen.}\,(p-b) + \text{sen.}\,(p-a)\Big) \quad \ldots\ldots\ldots (a)$$

De acuerdo con la fórmula: [776 f (59)]

$$\text{sen.}\,a + \text{sen.}\,b = 2\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b)\cos.\,\tfrac{1}{2}\,(a-b)$$

$$\text{sen.}\,(p-b) + \text{sen.}\,(p-a) = 2\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,(2\,p-b-a)\cos.\,\tfrac{1}{2}\,(p-b-p+a)$$

$$= 2\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b+c-b-a)\cos.\,\tfrac{1}{2}\,(a-b)$$

$$= 2\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,c\cos.\,\tfrac{1}{2}\,(a-b)$$

sustituyendo en la ecuacion (a) este valor y el de

$$\text{sen.}\,c = 2\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,c\cos.\,\tfrac{1}{2}\,c \qquad [770\ f\ (34)]$$

se tiene:

$$\text{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\cos.\,\frac{1}{2}\,C}{2\ \text{sen.}\,\frac{1}{2}\,c\cos.\,\frac{1}{2}\,c}\,2\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,c\cos.\,\tfrac{1}{2}\,(a-b)$$

$$\text{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\cos.\,\frac{1}{2}\,C}{\cos.\,\frac{1}{2}\,c}\cos.\,\tfrac{1}{2}\,(a-b)$$

de donde por último:

$$\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(A+B)}{\cos. \frac{1}{2} C} = \frac{\cos. \frac{1}{2}(a-b)}{\cos. \frac{1}{2} c} \ldots\ldots\ldots (35)$$

Operaciones análogas hechas con las expresiones de sen. $\frac{1}{2}$ (A—B), cos. $\frac{1}{2}$ (A+B) y cos. $\frac{1}{2}$ (A—B) conducen á las siguientes fórmulas:

$$\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(A-B)}{\cos. \frac{1}{2} C} = \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen. } \frac{1}{2} c} \ldots\ldots\ldots (36)$$

$$\frac{\cos. \frac{1}{2}(A+B)}{\text{sen. } \frac{1}{2} C} = \frac{\cos. \frac{1}{2}(a+b)}{\cos. \frac{1}{2} c} \ldots\ldots\ldots (37)$$

$$\frac{\cos. \frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen. } \frac{1}{2} C} = \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(a+b)}{\text{sen. } \frac{1}{2} c} \ldots\ldots\ldots [38]$$

Estas fórmulas notables, que encierran los seis elementos del triángulo esférico, fueron descubiertas en 1807 por Delambre.

861.—Analogías de Neper.—Si dividimos ordenadamente las fórmulas [35] y [37] obtendremos:

$$\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(A+B) \text{ sen. } \frac{1}{2} C}{\cos. \frac{1}{2}(A+B) \cos. \frac{1}{2} C} = \frac{\cos. \frac{1}{2}(a-b)}{\cos. \frac{1}{2}(a+b)}$$

de donde

$$\text{tang. } \frac{1}{2}(A+B) = \cot. \frac{1}{2} C \frac{\cos. \frac{1}{2}(a-b)}{\cos. \frac{1}{2}(a+b)} \ldots\ldots\ldots [39]$$

dividiendo la [36] por la [38] y despejando á tang. $\frac{1}{2}$ [A—B], resulta:

$$\text{tang. } \frac{1}{2}[A-B] = \cot. \frac{1}{2} C \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}[a-b]}{\text{sen. } \frac{1}{2}[a+b]} \ldots\ldots\ldots [40]$$

Dividiendo la [38] por la [37] y despejando á tang. $\frac{1}{2}$ [a+b], resulta:

$$\text{tang. } \frac{1}{2}[a+b] = \text{tang. } \frac{1}{2} c \frac{\cos. \frac{1}{2}[A-B]}{\cos. \frac{1}{2}[A+B]} \ldots\ldots\ldots [41]$$

Dividiendo la [36] por la [35] y despejando á tang. $\frac{1}{2}$ [a—b], resulta:

$$\text{tang. } \frac{1}{2}[a-b] = \text{tang. } \frac{1}{2} c \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}[A-B]}{\text{sen. } \frac{1}{2}[A+B]} \ldots\ldots\ldots [42]$$

Las ecuaciones (39), (40), (41) y (42), son conocidas bajo el nombre de fórmulas ó analogías de Neper, cada una de las cuales contiene cinco de los elementos de un triángulo esférico.

Expresiones del exceso esférico.

862.—Vamos á dar á conocer algunas fórmulas en las que figura el exceso esférico, elemento importante en las aplicaciones de la trigonometría esférica para medir la superficie de un triángulo, y cuyas fórmulas servirán para calcularlo en los diferentes casos que haya necesidad de considerar.

863.—Exceso esférico en funcion de dos lados y del ángulo que forman.—Hemos encontrado (859, fórm. 34) que

$$\cot. \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\text{sen. } (B-\frac{1}{2}\varepsilon) \text{ sen. } (C-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon \text{ sen. } (A-\frac{1}{2}\varepsilon)}}$$

y por tanto

$$\cot. \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\text{sen. } [A-\frac{1}{2}\varepsilon] \text{ sen. } [C-\frac{1}{2}\varepsilon]}{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon \text{ sen. } [B-\frac{1}{2}\varepsilon]}}$$

Multiplicándolas y simplificando. queda:

$$\cot. \frac{1}{2} a \cot. \frac{1}{2} b = \frac{\text{sen. } [C-\frac{1}{2}\varepsilon]}{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon}$$

poniendo por seno [C—$\frac{1}{2}\varepsilon$] su desarrollo

$$\cot. \frac{1}{2} a \cot. \frac{1}{2} b = \frac{\text{sen. } C \cos. \frac{1}{2}\varepsilon - \text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon \cos. C}{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon} = \text{sen. } C \cot. \frac{1}{2}\varepsilon - \cos. C$$

de donde

$$\cot.\ \tfrac{1}{2}\ \varepsilon = \frac{\cot.\ \tfrac{1}{2}\ a\ \cot.\ \tfrac{1}{2}\ b + \cos.\ C}{\text{sen. } C} \ldots\ldots\ldots (43)$$

865.—Fórmula del exceso esférico apropiada al uso de los logaritmos.—Puede obtenerse otra fórmula para el exceso esférico en funcion de tres lados a, b, c y un ángulo C, que sea calculable por logaritmos.

Sabemos que $\tfrac{1}{2}\ \varepsilon = \tfrac{1}{2}\ [A+B+C] - 90°$

luego $\text{sen. } \tfrac{1}{2}\ \varepsilon = -\cos.\ \tfrac{1}{2}\ [A+B+C]$

ó bien

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}\ \varepsilon = \text{sen. } \tfrac{1}{2}\ [A-B]\ \text{sen. } \tfrac{1}{2}\ C - \cos.\ \tfrac{1}{2}\ [A+B]\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C$$

sustituyendo por sen. $\tfrac{1}{2}$ [A+B] y por cos. $\tfrac{1}{2}$ [A+B] los valores que dan las fórmulas [35] y [37] de Delambre, resulta:

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ \varepsilon = \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ C\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ [a-b]}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ c}\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ C - \frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\ C\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ [a+b]}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ c}\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C$$

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ \varepsilon = \frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\ C\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C\ [\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (a-b) - \cos.\ \tfrac{1}{2}\ (a+b)]}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ c}$$

y por último

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}\ \varepsilon = \frac{\text{sen. } C}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ c}\ \text{sen. } \tfrac{1}{2}\ a\ \text{sen. } \tfrac{1}{2}\ b \ldots\ldots\ldots [44]$$

866.—Exceso esférico en funcion de los tres lados.—La fórmula de Delambre (35)

$$\frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\ [A+B]}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ C} = \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ [a-b]}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ c}$$

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

puede ponerse bajo la forma:

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (a-b) : \text{sen. } \tfrac{1}{2}\ (A+B) :: \cos.\ \tfrac{1}{2}\ c : \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C$$

de la cual resulta: (225)

$$\frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (a-b) - \cos.\ \tfrac{1}{2}\ c}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (a-b) + \cos.\ \tfrac{1}{2}\ c} = \frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\ (A+B) - \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\ (A+B) + \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C} \ldots (a)$$

Como $A+B+C-180° = \varepsilon$

$\tfrac{1}{2}\ (A+B) = 90° + \tfrac{1}{2}\ (\varepsilon - C)$

y $\text{sen. } \tfrac{1}{2}\ (A+B) = \cos.\ \tfrac{1}{2}\ (\varepsilon - C)$

sustituyendo este valor en (a) se tendrá:

$$\frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (a-b) - \cos.\ \tfrac{1}{2}\ c}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (a-b) + \cos.\ \tfrac{1}{2}\ c} = \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (\varepsilon - C) - \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (\varepsilon - C) + \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C}$$

poniendo por la diferencia y por la suma de los cosenos sus valores (776) resulta:

$$\frac{\text{sen. } \tfrac{1}{4}\ (a+c-b)\ \text{sen. } \tfrac{1}{4}\ (c+b-a)}{\cos.\ \tfrac{1}{4}\ (a+c-b)\ \cos.\ \tfrac{1}{4}\ (c+b-a)} = \frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{sen. } \tfrac{1}{4}\ \varepsilon}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cos.\ \tfrac{1}{4}\ \varepsilon}$$

ó $\text{tg. } \tfrac{1}{4}\ (a+c-b)\ \text{tg. } \tfrac{1}{4}\ (c+b-a) = \text{tg. } \tfrac{1}{2}\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{tg. } \tfrac{1}{4}\ \varepsilon \ldots\ldots (b)$

De la fórmula de Delambre (37)

$$\frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (A+B)}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\ C} = \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (a+b)}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ c}$$

por operaciones análogas, se deduce la siguiente:

$$\text{tg. } \tfrac{1}{4}\ (a+b+c)\ \text{tg. } \tfrac{1}{4}\ (a+b-c) = \cot.\ \tfrac{1}{2}\ (C - \tfrac{1}{2}\ \varepsilon)\ \text{tg. } \tfrac{1}{4}\ \varepsilon \ldots\ldots\ldots (c)$$

Multiplicando (b) por (c) y poniendo por $a+b+c=2p$, resulta:

$$\text{tg.}^2\ \tfrac{1}{4}\ \varepsilon = \text{tg. } \tfrac{1}{2}\ p.\ \text{tg. } \tfrac{1}{2}\ (p-a)\ \text{tg. } \tfrac{1}{2}\ (p-b)\ \text{tg. } \tfrac{1}{2}\ (p-c)$$

y por último:

$$\text{tg. } \tfrac{1}{4}\ \varepsilon = \sqrt{\text{tg. } \tfrac{1}{2}\ p.\ \text{tg. } \tfrac{1}{2}\ (p-a)\ \text{tg. } \tfrac{1}{2}\ (p-b)\ \text{tg. } \tfrac{1}{2}\ (p-c)} \ldots\ldots\ldots (45)$$

fórmula notable que es debida á Simon l'Huillier.

Si el triángulo es equilátero, como $p=\frac{3a}{2}$ y

$p-a=p-b=p-c=\frac{2}{a}$ la fórmula se convierte en:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{4}\,\varepsilon=\sqrt{\text{tg.}\frac{3a}{4}\text{tg.}^3\tfrac{1}{4}a}$$

867.—Seno del exceso esférico en funcion de los tres lados. —Hemos determinado la fórmula

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,\varepsilon=\frac{\text{sen. C}}{\text{cos. } \frac{1}{2}\text{c}}\text{ sen. } \tfrac{1}{2}\text{ a sen. } \tfrac{1}{2}\text{ b}\ldots\ldots\ldots(44)$$

Sustituirémos en la fórmula

$$\text{sen. C}=2\text{ sen. } \tfrac{1}{2}\text{ C cos. } \tfrac{1}{2}\text{ C}$$

los valores de sen. $\frac{1}{2}$ C y de cos. $\frac{1}{2}$ C de las fórmulas (23) y (24) y obtendrémos:

$$\text{sen. C}=\frac{2}{\text{sen. a sen. b}}\sqrt{\text{sen. p sen. (p—a) sen. (p—b) sen. (p—c)}}$$

sustituyendo los valores de sen. a=2 sen. $\frac{1}{2}$ a cos. $\frac{1}{2}$ a, sen b=2 sen. $\frac{1}{2}$ b cos. $\frac{1}{2}$ b, resulta:

$$\text{sen. C}=\frac{\sqrt{\text{sen. p sen. (p—a) sen. (p—b) sen. (p—c)}}}{2\text{ sen. } \frac{1}{2}\text{ a cos. } \frac{1}{2}\text{ a sen. } \frac{1}{2}\text{ b cos. } \frac{1}{2}\text{ b}}$$

sustituyendo en la (44) y suprimiendo el factor comun sen. $\frac{1}{2}$ a sen. $\frac{1}{2}$ b finalmente resulta:

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,\varepsilon=\frac{\sqrt{\text{sen. p sen. (p—a) sen. (p—b) sen. (p—c)}}}{2\text{ cos. } \frac{1}{2}\text{ a cos. } \frac{1}{2}\text{ b cos. } \frac{1}{2}\text{ c}}\ldots(46)$$

Resolucion de los triángulos rectángulos.

868.—Casos y fórmulas para resolver los triángulos rectángulos.—Ya hemos indicado que en los triángulos esféricos rectángulos no hay necesidad de ocuparse de su resolucion cuando están formados por dos ó por tres ángulos rectos (851). Cuando tienen un solo ángulo recto, siendo siempre conocido el elemento A=90°, para poder resolverlos, basta tener una relacion adecuada entre *tres* de las *cinco* cantidades a, b, c, B, C, de las cuales *dos* considerarémos como datos y una como incógnita. Ahora bien: el número de combinaciones que pueden hacerse con 5 cantidades tomadas de 2 en 2, son 10, conforme á la fórmula: (356).

$$C^m_n=\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\,2.\,3\ldots n}$$

$$\text{Sustituyendo } C^5_2=\frac{5.\,4}{2}=10 \text{ combinaciones.}$$

De estas 10 combinaciones resultan solamente seis casos diferentes:

1er. caso: se conocen *b c*
2° caso: ,, *a b* ó *a c*
3er. caso: ,, *b* C ó *c* B
4° caso: ,, *b* B ó *c* C
5° caso: ,, *a* B ó *a* C
6° caso: ,, B C

Para la resolucion de estos casos no hay más que aplicar la fórmula que contenga los elementos conocidos y aquel que se busca de las que dejamos demostradas (852 y 854) y son las siguientes:

Entre la hipotenusa y dos lados

$$\text{cos. a}=\text{cos. b cos. c}\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } \frac{1}{2}\text{ c}=+\sqrt{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{ (a—b) tang. } \frac{1}{2}\text{ (a+b)}}\\ \text{tang. } \frac{1}{2}\text{ b}=+\sqrt{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{ (a—c) tang. } \frac{1}{2}\text{ (a+c)}}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(11)$$

Entre la hipotenusa, un lado y el ángulo opuesto

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen. b=sen. a sen. B}\\ \text{sen. c=sen. a sen. C}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$\text{tang. } (45^\circ+\tfrac{1}{2}\text{ a})=\pm\sqrt{\frac{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{ (B+b)}}{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{ (B—b)}}}=\pm\sqrt{\frac{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{ (C+c)}}{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{ (C—c)}}}\ldots(12)$$

Entre la hipotenusa, un lado y el ángulo que forman

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } b=\text{tang. } a \text{ cos. } C\\ \text{tang. } c=\text{tang. } a \text{ cos. } B\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(7)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } \tfrac{1}{2} C=+\sqrt{\dfrac{\text{sen. } (a-b)}{\text{sen. } (a+b)}}\\ \text{tang. } \tfrac{1}{2} B=+\sqrt{\dfrac{\text{sen. } (a-c)}{\text{sen. } (a+c)}}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(14)$$

Entre dos lados y un ángulo

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } b=\text{sen. } c \text{ tang. } B\\ \text{tang. } c=\text{sen. } b \text{ tang. } C\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(8)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } (45^\circ+\tfrac{1}{2} c)=\pm\sqrt{\dfrac{\text{sen. } (B+b)}{\text{sen. } (B-b)}}\\ \text{tang. } (45^\circ+\tfrac{1}{2} b)=\pm\sqrt{\dfrac{\text{sen. } (C+c)}{\text{sen. } (C-c)}}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(15)$$

Entre dos ángulos y un lado.

$$\left.\begin{array}{l}\text{cos. } B=\text{cos. } b \text{ sen. } C\\ \text{cos. } C=\text{cos. } c \text{ sen. } B\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(9)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } (45^\circ+\tfrac{1}{2} C)=\pm\sqrt{\text{cot. } \tfrac{1}{2} (B+b) \text{ cot. } \tfrac{1}{2} (B-b)}\\ \text{tang. } (45^\circ+\tfrac{1}{2} B)=\pm\sqrt{\text{cot. } \tfrac{1}{2} (C+c) \text{ cot. } \tfrac{1}{2} (C-c)}\end{array}\right\}\ldots\ldots(16)$$

Entre dos ángulos y la hipotenusa

$$\text{cos. } a=\text{cot. } B \text{ cot. } C\ldots\ldots\ldots(11)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} a=+\sqrt{\dfrac{\text{cos. } (180^\circ-B-C)}{\text{cos. } (B-C)}}\ldots\ldots(16\tfrac{1}{2})$$

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA U.A.N.L.

Observacion.—Cuando se apliquen estas fórmulas para determinar uno de los elementos de un triángulo esférico, es preciso recordar que las hemos establecido suponiendo el radio de la esfera igual á la unidad, y para hacerlas homogéneas debe restituirse r, cuyo logaritmo en las tablas es 10. Si por ejemplo vamos á determinar el valor de la hipotenusa por medio de la fórmula (5)

$$\text{cos } a=\text{cos } b \text{ cos } c$$

debemos poner $$\text{cos } a=\frac{\text{cos } b \text{ cos } c}{r}$$

Si vamos á determinar un lado por la fórmula (6)

$$\text{sen } b=\text{sen } a \text{ sen } B$$

debemos poner $$\text{sen } b=\frac{\text{sen } a \text{ sen } B}{r}$$

y así en todas las demás fórmulas.

Nos ocuparemos en particular de la resolucion de cada caso.

869.—Primer caso.—Conociendo los dos lados b, c, determinar la hipotenusa a y los ángulos B, C.

La fórmula (5) da $$\text{cos } a=\text{cos } b \text{ cos } c$$

,, (8) $$\text{tang } B=\frac{\text{tang } b}{\text{sen } c}$$

,, (8) $$\text{tang } C=\frac{\text{tang } c}{\text{sen } b}$$

Repetimos que en las aplicaciones es preciso hacer homogéneas estas fórmulas introduciendo el factor r; y como las incógnitas a, B y C están dadas por el coseno y la tangente, no tienen más que un solo valor.

Cuando el valor de a, expresado por los cosenos de b y de c no se obtenga con suficiente aproximacion se calcularán primero B y C y se empleará la fórmula (10)

$$\text{cos } a=\text{cot } B \text{ cot } C.$$

870.—Segundo caso.—Dada la hipotenusa a y el lado b, se determinarán c, B y C por las fórmulas:

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b} \qquad \text{sen } B = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } a} \qquad \cos C = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } a}$$

Pueden calcularse las incógnitas con más aproximacion por las fórmulas

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} c = + \sqrt{\text{tang } \tfrac{1}{2} (a-b) \text{ tang } \tfrac{1}{2} (a+b)} \ldots\ldots\ldots (11)$$

$$\text{tang } (45^\circ + \tfrac{1}{2} B) = \pm \sqrt{\frac{\text{tang } \tfrac{1}{2} (a+b)}{\text{tang } \tfrac{1}{2} (a-b)}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} C = + \sqrt{\frac{\text{sen } (a-b)}{\text{sen } (a+b)}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Observacion.—Supuesto que $\text{sen } B = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } a}$, para que el problema sea posible, es necesario y basta que se tenga sen b<sen a, porque realizándose esta condicion el valor de sen B será menor que 1, y los valores de cos c y de cos C estarán comprendidos entre—1 y + 1. La desigualdad de que se trata,

$$\text{sen } b < \text{sen } a$$

como es fácil convencerse con el exámen de una figura, exige que se tenga:

Cuando $a < 90^\circ$ $\quad b < a$, ó bien $b > 180^\circ - a$,
Cuando $a > 90^\circ$ $\quad b > a$, ó bien $b < 180^\circ - a$
Cuando $a = 90^\circ$, necesariamente sen $b <$ sen a.

Satisfecha la condicion de posibilidad, el problema no admite más que una sola resolucion aun cuando el ángulo B esté dado por su seno, por que B debe ser de la misma especie que el lado b conocido. (853) La misma consideracion permite fijar el signo con que debe tomarse el radical en la expresion de tang $(45^\circ + \frac{1}{2} B)$.

871.—Tercer caso.—Conociendo un lado c y el ángulo adyacente B, se determinarán C, b y a por las siguientes fórmulas:

$$\cos C = \cos c \text{ sen } B \qquad \text{tang } b = \text{sen } c \text{ tang } B \qquad \text{tang } a = \frac{\text{tang } c}{\cos B}$$

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
N. L.

Si es necesario tener mayor aproximacion que la que proporciona el logaritmo del coseno, se calculará el ángulo C por una de las fórmulas:

$$\cot C = \frac{\cos a}{\cot B} \qquad \text{tang } C = \frac{\text{tang } c}{\text{sen } b}$$

El problema siempre es posible y no admite más que una sola resolucion.

872.—Cuarto caso.—Conociendo un lado b y el ángulo opuesto B se determinarán C, a y c por medio de las siguientes fórmulas:

$$\text{sen } C = \frac{\cos B}{\cos b} \qquad \text{sen } a = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} \qquad \text{sen } c = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } B}$$

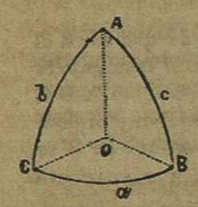
Si se quieren obtener las incógnitas por medio de las tangentes usaremos las expresiones:

$$\text{tang } (45^\circ + \tfrac{1}{2} C) = \pm \sqrt{\cot \tfrac{1}{2} (B+b) \cot \tfrac{1}{2} (B-b)} \ldots\ldots\ldots (16)$$

$$\text{tang } (45^\circ + \tfrac{1}{2} a) = \pm \sqrt{\frac{\text{tang } \tfrac{1}{2} (B+b)}{\text{tang } \tfrac{1}{2} (B-b)}} \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

$$\text{tang } (45^\circ + \tfrac{1}{2} c) = \pm \sqrt{\frac{\text{sen } (B+b)}{\text{sen } (B-b)}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Cualquiera de los dos sistemas precedentes de fórmulas puede dar para cada incógnita dos valores suplementarios, y por tanto es necesario saber cuáles de estos valores son correlativos y deben tomarse juntamente:



(Fig. 397).

1° Si se tiene $\quad b = B$
resulta $\quad \text{sen } C = \text{sen } a = \text{sen } c = 1$
y por esto $\quad C = a = c = 90^\circ$

y el triángulo será birectángulo, como puede observarse en la figura 397. En efecto para que sea B=b es necesario que A O B=c=90°
y que C O B=a=90°

Ahora bien, siendo B O perpendicular á la vez á las rectas A O y C O lo será al plano A O C que las contiene, y por lo mismo cualquier plano B O C que pase por B O será perpendicular á A O C; luego C=90°

Supongamos pues b difrente de B.

2° Sea b<90°

Como los ángulos deben ser de la misma especie que los lados opuestos se debe tener para que el triángulo sea posible B<90°, y ademas b<B para qus sea sen a<1 en la expresion sen $a=\frac{\text{sen b}}{\text{sen B}}$. Satisfechas estas condiciones, y siendo positivo cos b, la ecuacion cos a=cos b cos c muestra que a y c tienen que ser á la vez inferiores ó superiores á 90° y como ademas (853) el ángulo C debe ser de la misma especie que c resulta que las tres incógnitas a, c y C tendrán que ser juntamente obtusas ó á la vez agudas. En resúmen tendremos las dos resoluciones siguientes:

Primera b<90°, B<90°, a>90°, c>90°, C>90°

Segunda b<90°, B<90°, a'=180°—a, c'=180°—c, C'=180°—C

en la primera resolucion las tres incógnitas serán mayores que 90°, y en la segunda todas ellas serán menores.

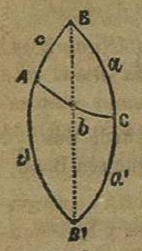
3° Sea b>90°

Las condiciones de posibilidad del problema son: B>90° y b>B, para que tratándose de arcos comprendidos entre 90° y 180° resulte $\frac{\text{sen b}}{\text{sen B}}$=sen a<1.

Una vez satisfechas estas condiciones siendo cos b negativo, la ecuacion cos a=cos b cos c muestra que a y c son uno superior y el otro inferior á 90°. Además como el ángulo C tiene que ser de la misma especie que c; resulta que cuando a<90° tanto c como C serán obtusos, y que cuando a>90° serán c y C agudos. En resúmen tendremos las dos resoluciones siguientes:

Primera b>90°, B>90°, a<90°, c>90°, C>90°

Segunda b>90°, B>90°, a'=180°—a, c'=180°—c C'=180°—C.



(Fig. 398.)

Es fácil ver que exceptuando el caso de que b=B el problema admite dos resoluciones cuando el triángulo es posible. Supongamos en efecto que el triángulo A B C (fig. 398) rectángulo en A satisfaga la cuestion y prolongando los lados A B y B C hasta su interseccion en B' se formará un segundo triángulo A B' C que satisfaerá igualmente la cuestion.

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

873.—Quinto caso.—Conociendo la hipotenusa a y el ángulo oblícuo B, se calcularán b, c y C por las fórmulas

$$\text{sen. } b=\text{sen. } a \text{ sen. B}, \quad \text{tang. } c=\text{tang. } a \text{ cos. B}, \quad \text{tang. C}=\frac{\text{cot. B}}{\text{cos. a}}$$

si el lado b quedase mal determinado por su seno, se calcularán primero c ó C y se obtendría en seguida b por una de las fórmulas

$$\text{tang. } b=\text{sen. } c \text{ tang. B}, \qquad \text{tang. b}=\text{tang. a cos. C}$$

El problema siempre es posible y no admite más que una resolucion, porque la incógnita b y el ángulo dado B son á la vez inferioras ó superiores á 90°.

874.—Sexto caso.—Estando dados los dos ángulos oblícuos B y C se calcularán los tres lados a, b y c por las fórmulas

$$\text{cos. a}=\text{cot. B cot. C}, \quad \text{cos. b}=\frac{\text{cos. B}}{\text{sen. C}}, \quad \text{cos. c}=\frac{\text{cos. C}}{\text{sen. B}}$$

ó mejor, para tener mas aproximacion, por las siguientes:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\text{ a}=+\sqrt{\frac{\text{cos. }(180^\circ-\text{B}-\text{C})}{\text{cos. }(\text{B}-\text{C})}} \quad \ldots\ldots\ldots (16\tfrac{1}{2})$$

$$\left.\begin{aligned} \text{tang. } \tfrac{1}{2}\text{ b}&=+\sqrt{\text{tang.}\left(\frac{\text{B}+\text{C}}{2}-45^\circ\right)\ \text{tang.}\left(\frac{\text{B}-\text{C}}{2}+45^\circ\right)} \\ \text{tang. } \tfrac{1}{2}\text{ c}&=\sqrt{\text{tang.}\left(\frac{\text{B}+\text{C}}{2}-45^\circ\right)\ \text{tang.}\left(\frac{\text{C}-\text{B}}{2}+45^\circ\right)} \end{aligned}\right\} (15\tfrac{1}{2})$$

Para que el problema sea posible es necesario y basta: 1° que B+C esté comprendido entre 90° y 270°; 2° que la diferencia B—C esté comprendida entre —90° y +90°. Cuando estas condiciones están satisfechas, los valores son reales y el problema no admite mas que una sola resolucion.

875.—Observaciones.—Cuando alguno de los datos está comprendido entre 90° y 180° se sabe que los cosenos, las tangentes y las cotangentes de estos arcos son *negativas*, y para evitar el empleo de logarit-