mos de cantidades negativas, que son expresiones imaginarias, se buscan, segun lo hemos explicado en álgebra (337 IV), los logaritmos de las respectivas líneas trigonométricas como si fueran positivas, se ejecutan las operaciones indicadas, y despues de afectar el resultado conforme á las reglas del álgebra, del signo que le corresponda, se determina el cuadrante del arco á que pertenece.

Supongamos, por ejemplo, que se conozcan *b* y *c*, siendo

$$b>90^\circ \qquad y \qquad c<90^\circ;$$

los demas elementos del triángulo se calcularán por las fórmulas:

$$\cos.\ a=\cos.\ b\ \cos.\ c,\quad \text{tang.}B=\frac{\text{tang.}\ b}{\text{sen.}\ c},\quad \text{tang.}\ C=\frac{\text{tang.}\ c}{\text{sen.}\ b}$$

por ser negativas las líneas *cos. b* y *tang. b* resultarán negativas *cos. a* y *tang. B*, de lo que se deduce que debe ser:

$$a>90^\circ,\qquad B>90^\circ,\qquad y\qquad C<90^\circ$$

cuyos resultados están de acuerdo con las condiciones demostradas (853); esto es, que debe ser $a>90^\circ$ cuando *b* y *c*, ó cuando B y C sean de distinta especie, así como que el lado del ángulo recto *c* sea de la misma especie que el ángulo C opuesto.

Observaremos por último que cuando una de las incógnitas está determinada por el logaritmo de su seno ó de su coseno, y que se obtiene para el correspondiente logaritmo un número mayor que 10, esto es un indicio cierto de que el triángulo es imposible, y que existe alguna contradiccion en los datos, lo cual puede muy bien suceder.

876.—Problemas. I.—Sean $a=115^\circ-17'-20''$
$B=98^\circ-28'-30''$

se buscan *b*, *c*, C.

Las fórmulas para determinarlos son:

$$\text{sen.}b=\text{sen.}a\ \text{sen.}B,\quad \text{tang.}c=\text{tang.}a\ \cos.B,\quad \cot.C=\frac{\cos.\ a}{\cot.B}$$

pero como *a* y $B>90^\circ$, en las tablas no encontraremos sino los suplementos de sus valores.

$a'=180^\circ-a=64^\circ-42'-40''$ suplemento de *a*.
$B'=180^\circ-B=81^\circ-31'-30''$,, de B.

1° log. sen.a'= 9·956 2479
,, sen.B'= 9·995 2315
— ,, r =—10'
,, sen.b'= 9·951 4794
b'= 63°—25'— 3''·5
como B>90°b=116°—34'—56''·5

2° log. tang.a'= 10·325 6344
,, cos. B'= 9·186 4322
— ,, r =—10
,, tang.c = 9·494 0666
siendo positiva c= 17°—19'—28''·6

3° log cos a' = 9·630 6135
Comp log cot B'= 10·826 7993
,, cot C = 10·457 4128
siendo posit. C = 19°-13'-45''·2

Verificacion.
cos *a'*=cos *b'* cos *c*
log cos b'= 9·650 7772
,, cos c = 9·979 8364
9·630 6136
a'= 64°—42'—40''
siendo neg. a =115°—17'—20''

Como $a>90^\circ$ debe tenerse $b>90^\circ$ y $c<90^\circ$; ademas $B>90^\circ$ y $C<90^\circ$.

II. Sean $b=56^\circ-37'-40''$
$B=84^\circ-29'-50''$

Se buscan a, c, C.

Las fórmulas que hay que emplear son:

$$\text{sen.}\ a=\frac{r\ \text{sen.}\ b}{\text{sen.}\ B},\quad \text{sen.}\ c=\frac{r\ \text{tang.}\ b}{\text{tang.}\ B},\quad \text{sen.}\ C=\frac{r\cos.\ B}{\cos.\ b}$$

1° log sen b =9·921 7461
Comp log sen B=0·002 0061
log sen a =9·923 7522
a= 57°— 1'—58''
ó *a*=122°—58'— 2''

2° log tang b= 10·181 3235
Comp log tang B= 8·983 7975
log sen c= 9·165 1210
c= 8°-24'-36''
ó bien c=171°-35'-24''

3° log cos B= 8·981 7915
Comp log cos b= 0·259 5774
log sen C= 9·241 3689
C= 10°—2'—22''
ó bien C=169°-57'—38''

Verificacion.
cos *a*=cos *b* cos *c*
log cos *b*= 9·740 4226
,, cos *c*= 9·995 3046
,, cos *a*= 9·735 7272
a= 57°- 1'-58''
ó a=122°-58'- 2''

El problema admite dos resoluciones:

$$1^a \begin{cases} a = 57^\circ - 1' - 58'' & A = 90^\circ \\ b = 56^\circ - 37' - 40'' & B = 84^\circ - 29' - 50'' \\ c = 8^\circ - 24' - 36'' & C = 10^\circ - 2' - 22'' \end{cases}$$

$$2^a \begin{cases} a = 122^\circ - 58' - 2'' & A = 90^\circ \\ b = 56 - 37' - 40 & B = 84 - 29 - 50 \\ c = 171 - 35 - 24 & C = 169 - 57 - 38 \end{cases}$$

Resolucion de los triángulos rectiláteros.

877.—Casos y fórmulas para resolver los triángulos rectiláteros.—Aun cuando la resolucion de un triángulo rectilátero puede reducirse siempre á la de otro rectángulo haciendo uso del triángulo suplementario, pondremos en seguida las fórmulas que hemos demostrado (855) y que conviene aplicar en cada uno de los seis casos que pueden presentarse, limitándonos á esta indicacion en razon de que las observaciones y discusion á que dan lugar son las mismas que hemos hecho con motivo de los triángulos rectángulos.

El lado de 90° lo representaremos por a y el ángulo opuesto por A.

Primer caso.—Conociendo A y B, se calcularán C, b y c por las fórmulas:

$$\cos.C = -\frac{\cos.A}{\cos.B}, \quad \text{sen}.b = \frac{\text{sen}.B}{\text{sen}.A}, \quad \cos.c = -\frac{\text{tang}.B}{\text{tang}.A}$$

Segundo caso.—Conociendo B y C, se calcularán A, b y c por las fórmulas:

$$\cos.A = -\cos.B \cos.C, \quad \text{tang}.b = \frac{\text{tang}.B}{\text{sen}.C}, \quad \text{tang}.c = \frac{\text{tang}.C}{\text{sen}.B}$$

Tercer caso.—Conociendo A, y b, se calcularán c, B y C por las fórmulas:

$$\text{sen}.B = \text{sen}.A \ \text{sen}.b, \quad \text{tang}.C = -\text{tang}.A \cos.b, \quad \text{tang}.C = -\frac{\cot.b}{\cos.A}$$

Cuarto caso.—Conociendo b y B, se calcularán c, A y C por las fórmulas:

$$\text{sen}.A = \frac{\text{sen}.B}{\text{sen}.b}, \quad \text{sen}.C = \frac{\text{tang}.B}{\text{tang}.b}, \quad \text{sen}.c = \frac{\cos.b}{\cos.B}$$

Quinto caso.—Conociendo B y c, se calcularán b, A y C por las fórmulas:

$$\cos.b = \cos.B \ \text{sen}.c, \quad \text{tang}.A = -\frac{\text{tang}.B}{\cos.c}, \quad \text{tang}.c = \text{sen}.B \ \text{tang}.c$$

Sexto caso.—Conociendo b y c, se calcularán A, B y C por las fórmulas:

$$\cos.A = -\cot.b \cot.c, \quad \cos.B = \frac{\cos.b}{\text{sen}.c}, \quad \cos.C = \frac{\cos.c}{\text{sen}.b}$$

Resolucion de los triángulos oblicuángulos.

878.—El problema general que tiene por objeto, dados *tres* de los seis elementos a, b, c, A, B, C de un triángulo esférico, determinar los otros tres, exige que se tenga una relacion entre cuatro de estos elementos, lo cual da origen á seis casos esencialmente distintos; pero como por la consideracion del triángulo suplementario tres de ellos pueden reducirse á los otros tres, en rigor bastaría considerar tres casos. Sin embargo, por claridad y para mayor ejercicio trataremos los seis casos siguientes:

1° Dados tres lados, determinar los ángulos.
2° Dados tres ángulos, determinar los lados.
3° Dados dos lados y el ángulo que forman, determinar los demas elementos.
4° Dados dos ángulos y el lado adyacente, determinar los demas elementos.
5° Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, determinar los demas elementos.
6° Dados dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos, determinar los demas elementos.

879.—Primer caso.—Dados los tres lados, se determinarán los ángulos por medio de las fórmulas (25) que hemos demostrado (857) y son:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. } (p-b) \text{ sen. } (p-c)}{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-a)}} \quad \ldots\ldots\ldots (25)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\text{sen. } (p-a) \text{ sen. } (p-c)}{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-b)}}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\text{sen. } (p-a) \text{ sen. } (p-b)}{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-c)}}$$

en las que $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$

Para que el problema sea posible debe tenerse:

$$a+b+c<360^\circ; \qquad a<b+c, \qquad a>b-c.$$

880.—Segundo caso.—Dados los tres ángulos, se determinarán los lados por las fórmulas (33) que hemos demostrado (859) y son:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon \text{ sen. } (A-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen. } (B-\frac{1}{2}\varepsilon) \text{ sen. } (C-\frac{1}{2}\varepsilon)}} \quad \ldots\ldots\ldots (33)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon \text{ sen. } (B-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen. } (A-\frac{1}{2}\varepsilon) \text{ sen. } (C-\frac{1}{2}\varepsilon)}}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon \text{ sen. } (C-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen. } (A-\frac{1}{2}\varepsilon) \text{ sen. } (B-\frac{1}{2}\varepsilon)}}$$

En las que $\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}(A+B+C) - 90^\circ$

Para que el problema sea posible debe tenerse:

$$\varepsilon<360^\circ, \qquad A>\tfrac{1}{2}\varepsilon, \qquad B>\tfrac{1}{2}\varepsilon, \qquad C>\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

881.—Tercer caso.—Conociendo dos lados *a*, *b* y el ángulo C que forman, se determinarán A, B y c, de la manera que sigue:

Las fórmulas ó analogías de Neper, (861) dan:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A+B) = \text{cot. } \tfrac{1}{2} C \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(a+b)} \quad \ldots\ldots\ldots (39)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A-B) = \text{cot. } \tfrac{1}{2} C \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(a+b)} \quad \ldots\ldots\ldots [40]$$

Una vez conocida la mitad de la suma $\frac{1}{2}(A+B)$ por la fórmula (39) y $\frac{1}{2}(A-B)$ por la fórmula (40) el ángulo mayor, que será el que esté opuesto al lado mayor, será igual á la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia, y el ángulo menor será igual á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia. Conocidos los ángulos A y B, el lado *c* se calcula por la fórmula que se considere mas adecuada de las cuatro siguientes:

$$\text{sen. } c = \frac{\text{sen. } C \text{ sen. } a}{\text{sen. } A}, \qquad \text{sen. } c = \frac{\text{sen. } C \text{ sen. } b}{\text{sen. } B}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(a+b) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} c \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(A+B)} \quad \ldots\ldots\ldots (41)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(a-b) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} c \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(A+B)} \quad \ldots\ldots\ldots (42)$$

Este problema siempre es posible con tal que cada uno de los datos esté comprendido entre 0° y 180°.

882.—Cuarto caso.—Dados dos ángulos A, B y el lado adyacente *c*, determinar *a*, *b* y C.

Las fórmulas de Neper (861) dan:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(a+b) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} c \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(A+B)} \quad \ldots\ldots\ldots (41)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(a-b) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} c \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(A+B)} \quad \ldots\ldots\ldots (42)$$

Determinadas las tangentes por las fórmulas (41) y (42) se conocerán los arcos, y conciendo la mitad de la suma y de la diferencia de los lados, el mayor, que es el opuesto al ángulo mayor, será igual á la suma de los valores dados por estas fórmulas, y el menor á su diferen-

cia. Una vez conocidos a y b se calculará C por alguna de las siguientes fórmulas:

$$\text{sen. } C = \frac{\text{sen. } c \text{ sen. } A}{\text{sen. } a}, \quad \text{sen. } C = \frac{\text{sen. } c \text{ sen. } B}{\text{sen. } b}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A+B) = \text{cot. } \tfrac{1}{2} C \frac{\cos. \tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos. \tfrac{1}{2}(a+b)} \ldots\ldots\ldots (39)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A-B) = \text{cot. } \tfrac{1}{2} C \frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}(a+b)} \ldots\ldots\ldots (40)$$

Es posible este problema cuando cada uno de los datos está comprendido entre 0° y 180°.

883.—Quinto caso.—Dados dos lados a, b y el ángulo A opuesto á uno de ellos, determinar B, C y c.

La fórmula
$$\frac{\text{sen. } a}{\text{sen. } A} = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B} \ldots\ldots\ldots (2)$$

da
$$\text{sen. } B = \frac{\text{sen. } b \text{ sen. } A}{\text{sen. } a} \ldots\ldots\ldots (d)$$

Estando determinado B por un seno, por regla general podremos aceptar dos valores y despues de conocer B, determinaremos C sustituyendo el valor de ese ángulo y los de los datos en una de las fórmulas de Neper (39) ó (40) y despejando á cot. $\frac{1}{2}$ C, se tiene:

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A+B) \cos. \tfrac{1}{2}(a+b)}{\cos. \tfrac{1}{2}(a-b)} = \frac{\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A-B) \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}(a-b)} \ldots (e)$$

Para determinar á c nos valdremos de la fórmula (41) ó de la (42) de Neper y despejando á tang. $\frac{1}{2}$ c, se tiene:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{tang. } \tfrac{1}{2}(a+b) \cos. \tfrac{1}{2}(A+B)}{\cos. \tfrac{1}{2}(A-B)} = \frac{\text{tang. } \tfrac{1}{2}(a-b) \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}(A-B)} \ldots (f)$$

Para que el triángulo sea posible es necesario que con los datos del problema se obtenga: 1° sen. B igual ó menor que 1, supuesto que el valor máximo que puede tener el seno de un arco es el radio; 2° si $b>a$ debe tenerse $B>A$ y si $b<a$ debe tenerse $B<A$, supuesto que el mayor lado tiene que estar opuesto al mayor ángulo; y 3° los valores de cot. $\frac{1}{2}$ C y de tang. $\frac{1}{2}$ c tienen que ser positivos en razon de que debiendo ser C y c menores que 180°, tanto $\frac{1}{2}$ C como $\frac{1}{2}$ c serán menores que 90°, y de que las cotangentes y las tangentes en el primer cuadrante, son positivas.

Así, pues, cuando con los datos del problema resulte sen. $B>1$ el triángulo es imposible. Cuando sen. $B=1$, será $B=90°$ y el triángulo será rectángulo en B. Cuando resulte sen. $B<1$, como el mismo seno corresponde á dos ángulos suplementarios, podremos tomar para B el valor que se encuentre en las tablas ó su suplemento, y para saber si podemos aceptar uno solo de estos dos valores de B, los dos, ó ninguno de ellos, bastará examinar si solo uno de esos valores, si los dos, ó ninguno de ellos satisfacen á la condicion de que si $b<a$, resulte $B<A$; y que si $b>a$, resulte $B>A$. Así pues, la comparacion de los valores de B con los de los datos a, b y A nos hará conocer si es posible el problema, y en caso de serlo si admite una sola ó dos resoluciones.

884.—Sexto caso.—Dados dos ángulos A, B y el lado a, opuesto á uno de ellos, determinar C, c y b.

De la fórmula (2) se deduce:

$$\text{sen. } b = \frac{\text{sen. } B \text{ sen. } a}{\text{sen. } A} \ldots\ldots\ldots [g]$$

Estando determinado b por un seno, por regla general podremos aceptar dos valores, y una vez conocido el lado b se determinará c y C por las fórmulas:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{tang. } \tfrac{1}{2}(a+b) \cos. \tfrac{1}{2}(A+B)}{\cos. \tfrac{1}{2}(A-B)} = \frac{\text{tang. } \tfrac{1}{2}(a-b) \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}(A-B)} \ldots (f)$$

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A+B) \cos. \tfrac{1}{2}(a+b)}{\cos. \tfrac{1}{2}(a-b)} = \frac{\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A-B) \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}(a-b)} \ldots (e)$$

Para que el triángulo sea posible se necesita que sen. $b<1$ ó $=1$, que si $B>A$ resulte $b>a$, ó recíprocamente que si $B<A$ resulte $b<a$ y que tanto tang. $\frac{1}{2}$ c, como cot. $\frac{1}{2}$ C sean positivas. La comparacion de los valores de los resultados con estas condiciones hará conocer, lo mismo que en el quinto caso, si es posible el problema y si admite una ó dos soluciones.

885.—Discusion del quinto caso.—De lo que precede resulta que los dos últimos casos son los únicos que pueden tener dos resoluciones; pero que no siempre las admiten, y aun cuando las fórmulas que se refieren á estos casos son bastantes para dar á conocer los elementos desconocidos del triángulo, y por la comparacion de los valores de los re-

sultados con los de los datos siempre puede determinarse las soluciones que admite el problema, nos parece conveniente ocuparnos de su discusion; limitándola al quinto caso, porque siendo muy semejante al sexto, todo lo que digamos del uno puede aplicarse al otro con modificaciones que fácilmente hará el lector, con una poca de reflexion.

En el quinto caso hemos visto (883) que conocidos los elementos a, b y A se determinan B, C y c por las fórmulas (d), (e) y (f).

Si b=a la fórmula

$$\text{sen. B} = \frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. a}} \ldots\ldots\ldots (d)$$

da B=A

y sustituyendo estos valores en las fórmulas (e) y (f) se trasforman en

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\text{ C} = \text{tang. A cos. a} \qquad \text{tang. } \tfrac{1}{2}\text{ c} = \text{tang.a cos. A}$$

Se ve pues, que cuando $b=a$ no hay mas que *un solo triángulo*, que resuelve la cuestion; mas para que sea posible es necesario que tanto cot. $\frac{1}{2}$ C, como tang. $\frac{1}{2}$ c sean positivas, á causa de que $\frac{1}{2}$ C y $\frac{1}{2}$ c son menores que 90°, lo cual á su vez exige que tang. A y que cos. a, así como tang. a y cos. A tengan el mismo signo, esto es, que a y el ángulo opuesto A sean á la vez mayores ó menores que 90°.

Pasemos á ocuparnos del caso general:

Ya hemos dicho que para que la cuestion sea posible

$$\text{sen. B} = \frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen.a}}$$

debe ser igual ó menor que 1; y que si b<a debe tenerse B<A, y que si b>a debe tenerse B>A.

Ahora bien, como el ángulo B está dado por su seno y sabemos que el mismo seno corresponde á dos ángulos suplementarios, por regla general habrá dos valores de B que satisfacen la ecuacion

$$\text{sen. B} = \frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. a}}$$

uno, dado por las tablas, *menor* que 90° que llamaremos n, y otro N=180°—n mayor que 90°; pero teniendo presente que en todo triángulo al mayor lado está opuesto el mayor ángulo, esto es, sabiendo que cuando $b>a$ los valores de B han de ser forzosamente mayores que el ángulo conocido A, y que cuando $b<a$ los valores de B han de ser menores que A: comparando los valores n y N con los de los datos, se podrá decidir fácilmente si pueden aceptarse los dos valores, uno solo, ó ninguno de ellos, y por tanto si el problema admite dos soluciones, una sola ó ninguna.

Suponiendo que los elementos conocidos del triángulo sean A, b y a, con el objeto de ordenar nuestra discusion consideraremos que cada uno de estos datos sea sucesivamente *menor, igual y mayor* que 90° y determinarémos en cada combinacion si pueden tenerse dos soluciones, una ó ninguna.

1° Sea A<90 y b<90°

y supongamos sucesivamente que a sea menor, igual y mayor que b. Si a<b debe tenerse precisamente B>A.

La fórmula $\text{sen. B} = \frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. a}}$ por ser el factor $\frac{\text{sen. b}}{\text{sen. a}} > 1$

da á conocer B, ó su valor de las tablas

n>A y con mayor razon será el ángulo obtuso
N>A, por consiguiente habrá *dos soluciones.*

Si a=b debe tenerse B=A.

En este caso debiendo ser los dos valores de B menores 90°, supuesto que A es agudo, no podrá aceptarse el ángulo obtuso N, y por tanto el problema no tendrá mas de *una solucion.*

Si a>b debe tenerse B<A.

Podrá suceder que

$a+b<180°$, que $a+b=180°$ ó que a+b>180°.

En el 1er. caso, $b<180°-a$ y recordando que b es agudo, será sen.b<sen. a, y la fórmula

$$\text{sen. B} = \frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. a}} \text{ por ser } \frac{\text{sen. b}}{\text{sen. a}} < 1$$

dará n<A valor aceptable, por ser compatible con la condicion B<A.

En cuanto á N siendo obtuso seria mayor que A y por tanto inadmisible. El problema solo tiene *una resolucion.*

En el 2° caso cuando $b=180°-a$ será sen. b=sen. a y la fórmula

$$\text{sen. } B=\frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. a}} \quad \text{por ser } \frac{\text{sen. b}}{\text{sen. a}}=1$$

dará $n=A$, cuyo valor es inadmisible, supuesto que al ser $a>b$, debe tenerse $B<A$.

El valor N con mayor razon será inadmisible, y por tanto el problema no admite *ninguna resolucion.*

En el 3er. caso cuando $b>180°-a$, será sen. $b>$sen. a y la fórmula

$$\text{sen. } B=\frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. a}} \quad \text{por ser } \frac{\text{sen. b}}{\text{sen. a}}>1$$

dará $n>A$ valor inadmisible á causa de la condicion de que $B<A$ y siendo $N>n$ con más razon será inadmisible N, por lo cual el problema no admitirá *ninguna resolucion.*

En resúmen:

$$A<90°,\quad b<90° \begin{cases} a<b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ dos soluciones.} \\ a=b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ una ,,} \\ a>b \begin{cases} a+b<180° \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ una ,,} \\ a+b=180° \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ ninguna ,,} \\ a+b>180° \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ ninguna ,,} \end{cases} \end{cases}$$

2° Siendo siempre $A<90°$ sea $b=90°$

y supongamos sucesivamente que a sea menor, igual y mayor que b. Si $a<b$ debe tenerse $B>A$.

Por ser sen.b=1 y sen.a menor que 1, tendremos $\frac{\text{sen. b}}{\text{sen. a}}>1$

y la fórmula $\text{sen.}B=\frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. a}}$ dará para B por el valor de las tablas

$n>A$, resultado compatible con la condicion $B>A$, y con más razon lo será el de N. El problema admite pues, *dos soluciones.*

Si $a=b$, debe tenerse $B=A$.

Como $A<90°$, debia ser B agudo lo cual es inadmisible en razon de que siendo los lados a y b de 90° los planos que los contienen serán perpendiculares al tercer lado c y por tanto los ángulos A y B tendrian que ser rectos. El problema no admite *ninguna resolucion.*

Si $a>b$, debe tenerse $B<A$

$$\text{La fórmula sen } B=\frac{\text{sen b sen A}}{\text{sen a}}$$

$$\text{por ser} \frac{\text{sen b}}{\text{sen a}}=\frac{1}{1-x}>1 \text{ daria}$$

$n>A$ y con más razon $N>A$, resultados que son incompatibles con la condicion que $B<A$; por lo cual el problema no admite *ninguna resolucion.*

3° Sea $A<90°$ y $b>90°$

y supongamos sucesivamente que a sea menor, igual y mayor que b.

Si $a<b$, debe tenerse $B>A$.

Podrá suceder que

$a+b<180°$, que $a+b=180°$, ó que $a+b>180°$

En el 1er. caso; siendo b obtuso tendrá que ser a agudo y como $b<180°-a$ será sen b>sen a. Entónces la fórmula

$$\text{sen } B=\frac{\text{sen b sen A}}{\text{sen a}} \quad \text{por ser el factor } \frac{\text{sen b}}{\text{sen a}}>1 \text{ da}$$

$n>A$ y con más razon $N>A$, resultados ambos compatibles con la condicion de que $B>A$; por lo cual el problema admite *dos soluciones.*

En el 2° caso, siendo $a+b=180°$, se tiene que $b=180°-a$, ó sen b=sen a.

$$\text{La fórmula sen } B=\frac{\text{sen b sen A}}{\text{sen a}} \text{ da}$$

$n=A$ resultado inadmisible, porque debe obtenerse $B>A$. $N>A$ será admisible, y el problema admitirá *una solucion.*

En el 3er. caso, siendo $a+b>180°$, ó $b>180°-a$. En razon de ser b obtuso se tendrá sen $b<$sen a, y la fórmula

$$\text{sen } B=\frac{\text{sen } b \text{ sen } A}{\text{sen } a}, \text{ dará}$$

$n<A$ resultado incompatible con la condicion $B>A$; pero como puede aceptarse el de $N>A$, el problema admitirá *una solucion.*

Si $a=b$ debe tenerse $B=A$

Con estas condiciones hemos demostrado al principio de esta discusion que para que el triángulo sea posible es indispensable que los lados y los ángulos opuestos sean de la misma especie y como $b>90°$ *el ángulo* B *deberá ser obtuso.* Por otra parte siendo $A<90°$ y $B=A$, *debe ser el ángulo* B *agudo.* Estos valores de B contradictorios nos prueban que el problema no admite *ninguna solucion.*

Si $a>b$ debe tenerse $B<A$.

Como a y b serán obtusos, tendrémos sen $b>$sen a y la fórmula.

$$\text{sen } B=\frac{\text{sen } b \text{ sen } A}{\text{sen } a} \text{ daria}$$

$n>A$ y con más razon $N>A$; resultados incompatibles con la condicion $B<A$; por lo cual el problema no admite *ninguna solucion.*

Las hipótesis relativas cuando $A=90°$ y cuando $A>90°$ se discuten de una manera semejante y los resultados de esas discusiones vamos á consignarlos en la siguiente tabla.

886.—Tabla de la discusion del quinto caso.

				SOLUCIONES.
$A<90°$	$b<90°$	$a<b$		dos
		$a=b$		una
		$a>b$	$a+b<180°$	una
			$a+b=180°$	ninguna
			$a+b>180°$	ninguna
	$b=90°$	$a<b$		dos
		$a=b$		ninguna
		$a>b$		ninguna
	$b>90°$	$a<b$	$a+b<180°$	dos
			$a+b=180°$	una
			$a+b>180°$	una
		$a=b$		ninguna
		$a>b$		ninguna
$A=90°$	$b<90°$	$a=$ ó $<b$		ninguna
		$a>b$ y $a+b<180°$		una
		$a>b$ y $a+b=$ ó $>180°$		ninguna
	$b=90°$	$a=b$		una infinidad
		$a<$ ó $>b$		ninguna
	$b>90°$	$a<b$ y $a+b=$ ó $<180°$		ninguna
		$a<b$ y $a+b>180°$		una
		$a=$ ó $>b$		ninguna

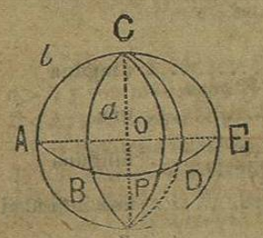
SOLUCIONES.

$$
A>90^\circ \begin{cases}
b<90^\circ \begin{cases} a=b \text{ ó } <b \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{ninguna} \\ a>b \quad \text{y } a+b=\text{ó}<180^\circ \ldots\ldots\ldots & \text{una} \\ a>b \quad \text{y } a+b>180^\circ \ldots\ldots\ldots & \text{dos} \end{cases} \\
b=90^\circ \begin{cases} a=\text{ó}<b \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{ninguna} \\ a>b \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{dos} \end{cases} \\
b>90^\circ \begin{cases} a<b \quad \text{y } a+b=\text{ó}<180^\circ \ldots\ldots\ldots & \text{ninguna} \\ a<b \quad \text{y } a+b>180^\circ \ldots\ldots\ldots & \text{una} \\ a=b \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{una} \\ a>b \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{dos} \end{cases}
\end{cases}
$$

887. De todos los casos consignados en la tabla anterior merece una particular atencion el único susceptible de una *infinidad* de soluciones y es cuando $A=90^\circ$, $b=90^\circ$ y $a=b$

Siendo $a=b$ deberá tenerse $B=A$ y como $A=90^\circ$ tambien será $B=90^\circ$ y el triángulo será birectángulo y birectilátero.

Sustituyendo en las fórmulas (e) y (f) párrafo 883



(Fig. 399.)

$$\cot.\tfrac{1}{2}C=\frac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A-B)\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(a-b)}$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c=\frac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a-b)\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(A-B)}$$

los valores $A=B=a=b=90^\circ$ resulta:

$$\cot\tfrac{1}{2}C=\frac{o}{o}$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c=\frac{o}{o}$$

Estas expresiones, que son el signo de la indeterminacion, indican que C y c pueden tener una infinidad de valores. En efecto, es fácil ver en la figura adjunta que siendo $A=B=90^\circ$ y los arcos $a=b=90^\circ$ satisfacen el problema los triángulos A B C, A C P, A C D, B C P, P C D y otra infinidad.

888.—Resúmen de la Discusion.—Los resultados anteriores quedan compendiados en las siguientes reglas:

1ª *Hay una infinidad de soluciones, cuando* $a=b=A=90^\circ$

2ª *Hay dos triángulos que resuelven el problema, cuando a y* A *son á la vez mayores ó menores que* 90°.

3ª *Hay una solucion cuando* a *está comprendido entre b y* $180^\circ-b$. *Tambien, cuando* a *es igual á uno de estos valores; pero si además* $b=90^\circ$, *ó* $A=\text{ó}>90^\circ$ *no habrá ninguna solucion. Tampoco la habrá en los demás casos, y cuando* $A<90^\circ$, $b<90^\circ$ y $a=180^\circ-b$; *y si* $A<90^\circ$, $b>90^\circ$ *y* $a=b$.

889.—Aplicaciones.—I. Conociendo los tres lados a, b y c determinar los tres ángulos.

$$
\text{Datos}\begin{cases} a=131^\circ-47'-20'' \\ b=103\ -18\ -40 \\ c=\ 49\ -32\ -20 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
2p&=284\ -38\ -20 \\
p&=142\ -19\ -10 \\
p-a&=\ 10\ -31\ -50 \\
p-b&=\ 39\ -\ 6\ -30 \\
p-c&=\ 92\ -46\ -50
\end{aligned}
$$

Cálculo del ángulo A

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{sen}\,(p-b)\,\text{sen}\,(p-c)}{\text{sen}\,p\,\text{sen}\,(p-a)}}$$

log sen (p—b)=$\bar{1}$‘ 798 9498	
log sen (p—c)=$\bar{1}$‘ 999 4884	$\bar{1}$‘798 4382
log sen p =$\bar{1}$‘ 786 2249	
log sen (p—a)=$\bar{1}$‘ 261 8808	$\bar{1}$‘048 1057
log tang² ½ A	0‘750 3325
log tang ½ A	0‘375 1663
½ A=67°—8′—34″‘33	
A=134—17— 8‘66	

Cálculo del ángulo B.

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ B = \sqrt{\frac{\text{sen}\ (p-a)\ \text{sen}\ (p-c)}{\text{sen}\ p\ \text{sen}\ (p-b)}}$$

log sen (p—a)=$\bar{1}$'261 8808	
log sen (p—c)=$\bar{1}$'999 4884	$\bar{1}$'261 3692
log sen p =$\bar{1}$'786 2249	
log sen (p—b)=$\bar{1}$'798 9498	$\bar{1}$'585 1747
	$\bar{1}$'676 1945
log tang $\frac{1}{2}$ B	$\bar{1}$'838 0973

$\frac{1}{2}$ B=34°—33′—33″'57

B=69 — 7 — 7'14

Cálculo del ángulo C.

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ C = \sqrt{\frac{\text{sen}\ (p-a)\ \text{sen}\ (p-b)}{\text{sen}\ p\ \text{sen}\ (p-c)}}$$

log sen (p—a)=$\bar{1}$' 261 8808	
log sen (p—b)=$\bar{1}$' 798 9498	$\bar{1}$'060 8306
log sen p =$\bar{1}$' 786 2249	
log sen (p—c)=$\bar{1}$' 999 4884	$\bar{1}$'785 7133
	$\bar{1}$'275 1173
log tang $\frac{1}{2}$ C	$\bar{1}$'637 5587

$\frac{1}{2}$ C=23°—27′—51″

C=46 —55 —42

Comprobacion por el cálculo del exceso esférico.

La fórmula correspondiente para determinar el exceso esférico en funcion de los tres lados es

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{4}\ \varepsilon = \sqrt{\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ p\ \text{tan}\ \tfrac{1}{2}\ (p-a)\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ (p-b)\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ (p-c)} \ldots (45)$$

log tang $\frac{1}{2}$ p	=0'466 9751
log tang $\frac{1}{2}$ (p—a)	=$\bar{2}$'964 5236
log tang $\frac{1}{2}$ (p—b)	=$\bar{1}$'549 2490
log tang $\frac{1}{2}$ (p—c)	=0'021 0845
	$\bar{1}$'001 8322
log tang $\frac{1}{4}$ ε	=$\bar{1}$'500 9161
$\frac{1}{4}$ ε	=17°—34′—49″'43
ε	=70°—19′—57″'72

A=134°—17′—8″66

B= 69 — 7 —7'14

C= 46 —55 —42'00

250 —19 —57'80

—180°

Exceso	70 —19 —57'80
ε	70 —19 —57.72
Error	0°— 0′— 0″08

II.—Dados dos lados *a*, *b* y el ángulo C que forman determinar A, B y *c*.

Datos
- a=50°—10′—30″ ; $\frac{1}{2}$ (a+b)=63°—23′— 3″
- b=76 —35 —36 ; $\frac{1}{2}$ (a—b)=13 —12 — 33
- C=34 —15 — 2'76 ; $\frac{1}{2}$ C =17 — 7 —31.38

Cálculo de los ángulos A y B

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ (A+B) = \text{cot}\ \tfrac{1}{2}\ C\ \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}$$

log cot $\frac{1}{2}$ C	=0'511 2728
log cos $\frac{1}{2}$ (a—b)	=$\bar{1}$'988 3548
	0'499 6276
log cos $\frac{1}{2}$ (a+b)	=$\bar{1}$'651 2840
log tang $\frac{1}{2}$ (A+B)	=0'848 3436
$\frac{1}{2}$ (A+B)	=81°—55′—46″.66

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ (A-B) = \text{cot}\ \tfrac{1}{2}\ C\ \frac{\text{sen}\ \frac{1}{2}\ (a-b)}{\text{sen}\ \frac{1}{2}\ (a+b)}$$

log cot $\frac{1}{2}$ C	=0'511 2728
log sen $\frac{1}{2}$ (a—b)	=$\bar{1}$'358 8988
	$\bar{1}$'870 1716
log sen $\frac{1}{2}$ (a+b)	=$\bar{1}$'951 3523
log tang $\frac{1}{2}$ (A—B)	=$\bar{1}$'918 8193
$\frac{1}{2}$ (A—B)	=39°—40′—33′.22

A=$\frac{1}{2}$ (A+B)—$\frac{1}{2}$ (A—B)= 42°—15′—13″.44

B=$\frac{1}{2}$ (A+B)+$\frac{1}{2}$ (A—B)=121 —36 —19 .88

El ángulo c se calcula por las fórmulas

$$\text{sen } c = \frac{\text{sen C sen a}}{\text{sen A}}$$

log sen C	$\bar{1}$'750 3664
log sen a	$\bar{1}$'885 3636
	$\bar{1}$'635 7300
log sen A	$\bar{1}$'827 6374
log sen c	$\bar{1}$'808 0926
	c=40°—0′—10″

$$\text{sen } c = \frac{\text{sen C sen b}}{\text{sen B}}$$

log sen C	$\bar{1}$'750 3664
log sen b	$\bar{1}$'988 0008
	$\bar{1}$'738 3672
log sen B	$\bar{1}$'930 2747
log sen c	$\bar{1}$'808 0925
	c=40°—0′—10″

Comprobacion por el cálculo del exceso esférico.

La fórmula correspondiente es:

$$\cot \tfrac{1}{2}\,\varepsilon = \frac{\cot \frac{1}{2}\,a \cot \frac{1}{2}\,b + \cos C}{\text{sen } C} \ldots\ldots\ldots (43)$$

que puede trasformarse en

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}\,\varepsilon = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}\,a \text{ tang } \frac{1}{2}\,b \text{ sen } C}{1 + \text{tang } \frac{1}{2}\,a \text{ tang } \frac{1}{2}\,b \cos C}$$

log tang $\frac{1}{2}$ b.....	$\bar{1}$'897 4390
log tang $\frac{1}{2}$ a.....	$\bar{1}$'670 4019
log sen C.....	$\bar{1}$'750 3664
log numerador.....	$\bar{1}$'318 2073
log denominador....	0'115 8042
log tang $\frac{1}{2}\,\varepsilon$	$\bar{1}$'202 4031
$\frac{1}{2}\,\varepsilon$=	9°—3′—18″·03
ε=	18 —6 —36 '06

log tang $\frac{1}{2}$ b....	$\bar{1}$'897 4390
log tang $\frac{1}{2}$ a....	$\bar{1}$'670 4019
log cos C.....	$\bar{1}$'917 2861
log 0'305 582.....	$\bar{1}$'485 1270
1'305 582=denominador	

A=	42°—15′—13″44
B=	121 —36 —19'88
C=	34 —15 — 2'76
	198 — 6 —36'08
	—180
Exceso	18 — 6 —36'08
ε	18 — 6 —36'06
Error	0 — 0 — 0'02

III.—Dado un lado a y los ángulos adyacentes B y C, calcular los demas elementos.

Datos	a=113°—2′—56.″6	$\frac{1}{2}$(B+C)=72°—33′—55·″4
	B= 75 —0 —51. 6	$\frac{1}{2}$(B—C)= 2 —26 —56· 2
	C= 70 —6 —59. 2	$\frac{1}{2}$ a =56 —31 —28· 3

Cálculos de los lados b y c.

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(b+c) = \text{tang } \tfrac{1}{2}\,a \frac{\cos \frac{1}{2}(B-C)}{\cos \frac{1}{2}(B+C)}$$

log tang $\frac{1}{2}$ a.....	0'179 6211
log cos $\frac{1}{2}$ (B—C).....	9'999 6031
	10'179 2242
log cos $\frac{1}{2}$ (B+C).....	9'476 5667
log tang $\frac{1}{2}$ (b+c).....	0'702 6575
$\frac{1}{2}$ (b+c)=	78°—46′— 59″'73

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(b-c) = \text{tang } \tfrac{1}{2}\,a \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(B-C)}{\text{sen } \frac{1}{2}(B+C)}$$

log tang $\frac{1}{2}$ a.....	0'179 6211
log sen $\frac{1}{2}$ (B—C).....	8'630 7243
	8'810 3454
log sen $\frac{1}{2}$ (B+C).....	9'979 5755
log tang $\frac{1}{2}$ (b—c)	8'830 7699
$\frac{1}{2}$ (b—c)=	3°—52′—28.″66

b=$\frac{1}{2}$ (b+c)+$\frac{1}{2}$ (b—c)=82°—39′—28.″39
c=$\frac{1}{2}$ (b+c)—$\frac{1}{2}$ (b—c)=74 —54 —31. 07

El ángulo A se calculará por la fórmula

$$\text{sen } A = \frac{\text{sen a sen C}}{\text{sen c}}$$

log sen a.....	9'963 8681
log sen C.....	9'973 3061
	9'937 1742
log sen c.....	9'984 7576
log sen A.....	9'952 4166