$A=116^\circ-20'-2.''11$. Como $a>b$, debe ser $A>B$ y se toma el ángulo obtuso.

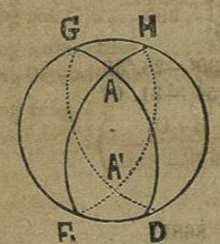
Comprobacion del cálculo por el del exceso esférico. La fórmula correspondiente es:

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\,\varepsilon=\frac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\,a \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\,b \operatorname{sen} C}{\cos \tfrac{1}{2}\,c}$$

$\frac{1}{2}\,a=56^c-31'-28.''3$	$\log \operatorname{sen} \frac{1}{2}\,a=9'921\ 2296$	$A=116^\circ-20'-2.''1$
$\frac{1}{2}\,b=41\ -19\ -44.\ 2$	$\log \operatorname{sen} \frac{1}{2}\,b=9'819\ 7946$	$B=\ 75\ -\ 0\ -51'\ 6$
$C=70\ -\ 6\ -59.\ 2$	$\log \operatorname{sen}\ C=9'973\ 3061$	$C=\ 70\ -\ 6\ -59'\ 2$
	$9'714\ 3303$	$261\ -27\ -52'\ 9$
$\frac{1}{2}\,c=37\ -27\ -15.54$	$\log \cos \frac{1}{2}\,c=9'899\ 7321$	-180
	$\log \operatorname{sen} \frac{1}{2}\,\varepsilon=9'814\ 5982$	$81\ -27\ -52'\ 9$
	$\frac{1}{2}\,\varepsilon=40^\circ-43'-56.''51$	$\varepsilon=81\ -27\ -53'02$
	$\varepsilon=81\ -27\ -53.\ 02$	Error $0-\ 0\ -\ 0'12$

Superficie de un triángulo esférico.

890.—Fórmula para calcular la superficie de un triángulo esférico.—Imaginémonos una esfera dividida por el círculo máximo H D E G en dos hemisferios, uno superior A H D E G, y otro inferior A' H D E G y que dos círculos máximos A D A' G y A E A' H se cortan en los puntos A y A' (fig. 400.)

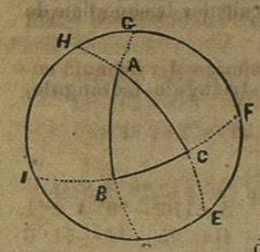


(Fig. 400.)

Vamos á demostrar que *la suma de la superficie de los triángulos* A D E *y* A H G *formados en el hemisferio superior por los semicírculos* H A E *y* D A G *es equivalente á la del huso* A D A' E A.

El triángulo H A G es igual al D A' E por tener un ángulo igual formado por lados respectivamente iguales. El ángulo A=A' porque ambos están formados por los mismos planos. El lado A H=A' E porque uno y otro son suplementos de A E, y A G=A' D por suplementos de A D. Por tanto si al triángulo A D E agregamos los triangulos iguales A H G y A' D E, resulta:

sup. A D E+sup. A H G=sup. huso A D A' E A



(Fig. 401.)

Para determinar la expresion de la superficie de un triángulo esférico, consideraremos en la figura 401 el triángulo A B C. Si prolongamos sus lados hasta el círculo máximo D E F G H I que limita un hemisferio, y expresamos la equivalencia que hay entre la superficie de los triángulos y la de los husos formados en los tres ángulos del triángulo tendremos:

A D E+H A G=huso cuyo áng. es A
B F G+B D I=huso cuyo áng. es B
C H I+C E F=huso cuyo áng. es C

sumando ordenadamente estas ecuaciones vemos que la suma de los primeros miembros dan la superficie del hemisferio más dos veces la superficie del triángulo A B C que llamaremos *s*. En consecuencia tendrémos.

$$\tfrac{1}{2}\ \text{sup esfera}+2\ s=\text{huso A}+\text{huso B}+\text{huso C}\ldots\ldots\ldots(1)$$

Considerando que el huso es una parte de la superficie de la esfera cuyo valor depende del número de grados del ángulo del huso, su superficie puede determinarse por la proporcion:

$$360^\circ : A^\circ :: 4\ \pi\ r^2 : \text{sup. huso A}=\frac{4\ \pi\ r^2\ A}{360}$$

sustituyendo los valores respectivos en la ecuacion (1) resulta:

$$\tfrac{1}{2}\,4\,\pi\,r^2+2s=\frac{4\ \pi\ r^2\ A}{360}+\frac{4\ \pi\ r^2\ B}{360}+\frac{4\ \pi\ r^2\ C}{360}$$

$$2\ s=\frac{4\ \pi\ r^2}{360}(A+B+C)-2\ \pi\ r^2$$

$$s=\frac{2\pi\ r^2}{360}(A+B+C)-\pi\ r^2=\pi\ r^2\left(\frac{A+B+C}{180}-1\right)$$

y por último $$s=\pi\ r^2\left(\frac{A+B+C-180^\circ}{180}\right)$$

Ahora como el exceso esférico $\varepsilon=A+B+C-180^\circ$ tendremos:

$$s=\pi\ r^2\times\frac{\varepsilon}{180}\ \ldots\ldots\ldots\ldots[47].$$

que es la fórmula que generalmente se usa para calcular la superficie de un triángulo esférico.

891.—Casos particulares.—1° Cuando el triángulo rectángulo, $A=90°$ y la fórmula [47] se convierte en

$$s=\pi r^2\left(\frac{B+C-90°}{180}\right)$$

2° Cuando el triángulo es equiángulo

$$\varepsilon=A+B+C-180=3\,A-180$$

y la fórmula (47) tomará la forma

$$s=\pi\, r^2\left(\frac{3\,A-180}{180}\right)$$

En este caso

si $A=90°$, $s=\pi\, r^2\left(\frac{270-180}{180}\right)=\frac{1}{2}\,\pi\, r^2=\frac{1}{8}$ sup. de la esfera.

Si $A=120°$, $s=\pi\, r^2\left(\frac{360-180}{180}\right)=\pi\, r^2=$sup. de un círculo máximo$=\frac{1}{4}$ sup. de la esfera.

3° Si se busca la superficie del triángulo polar de A B C

En la fórmula

$$s=\pi\, r^2\left(\frac{A+B+C-180}{180}\right)$$

sustituyendo los valores $A=180-a'$, $B=180-b'$, $C=180-c'$

se tendrá $$s=\pi\, r^2\left(\frac{360-(a'+b'+c')}{180}\right)$$

haciendo: $a'+b'+c'=2p'$

resulta: $$s=\pi\, r^2\left(\frac{360-2p'}{180}\right)$$

Cuando $a'=b'=c'=90°$ $s=\pi\, r^2\left(\frac{360-270}{180}\right)=\frac{1}{8}$ sup. de la esfera

892.—Aplicaciones.—I. Calcular la superficie de un triángulo esférico conocidos sus tres lados.

$a=131°-47'-20''$
$b=103\ -18-40$
$c=\ 49\ -32-20$ El radio$=1$

Hemos visto § 889 aplicacion I que con estos datos

$$\varepsilon=70°-19'-57''\ '72$$

sustituyendo en la fórmula (47) se tiene:

$$s=3'141\ 593\,\frac{70°-19'-57''\ '72}{180}$$

haciendo la division $$\frac{70°-19'-57''\ '72}{180}=0'390\ 73707$$

y por tanto

$$s=3'141\ 593\times 0'390\ 73707=1^{\text{m. cd.}}\ '227\ 5166$$

II. Calcular la superficie de un triángulo esférico, conociendo sus tres ángulos: $A=140°$, $B=92°$ y $C=68°$ y sabiendo que el diámetro de la esfera es de 30 piés

En este caso $\varepsilon=140°+92+68-180=120°$

y la fórmula (47) se convierte en

$$s=3'141\ 593\times 15^2\times\tfrac{2}{3}=471^{\text{piés cd.}}\ '23895.$$

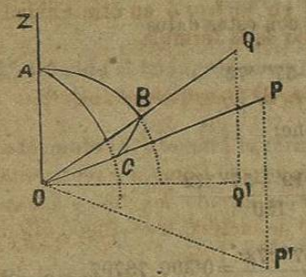
III. Calcular la superficie de un triángulo equiángulo, siendo el radio de la esfera de 10 metros y cada ángulo de 120°

$$\varepsilon=A+B+C-180°=180°$$

y la fórmula $$s=\pi\, r^2\,\frac{\varepsilon}{180}=3'141\ 593\times 100$$

da $s=314'1593$ metros cuadrados.

893.—Reducir un ángulo al horizonte.—Conociendo el ángulo P O Q (fig. 402) de dos rectas O P y O Q, que no están en un plano horizontal, y el ángulo que cada una de ellas forma con la vertical O Z, se trata de encontrar el ángulo P' O Q' formado por las respectivas proyecciones de esas rectas sobre el plano horizontal.



(Fig. 402)

Las rectas O P, O Q y O Z forman un ángulo triedro cuyas tres caras P O Q, P O Z y Q O Z se conocen. El ángulo P' O Q' está formado por las rectas O P' y O Q' perpendiculares ambas á la recta O Z en razon de que esta es perpendicular al plano horizontal P' O Q'. En consecuencia el ángulo que se busca es la medida del ángulo diedro opuesto á la cara P O Q. Si suponemos una esfera cuyo centro es O y cuyo radio sea la unidad, esta esfera cortada por el triedro en O determinará el triángulo esférico A B C cuyos lados B C, A C y A B, son respectivamente la medida de los ángulos conocidos P O Q, P O Z y QOZ y el ángulo A, que tiene por medida P'O Q', es el que se busca.

El problema está reducido pues á determinar el valor de un ángulo de un triángulo esférico en el que se conocen los tres lados, lo cual se obtiene aplicando la fórmula (25)

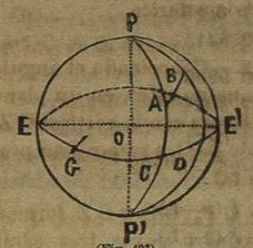
$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. } (p-b) \text{ sen. } (p-c)}{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-a)}}$$

en la que $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$

894.—*Conocidas las coordenadas geográficas de dos puntos, determinar la distancia que los separa.*

Sea (fig. 403) P P' el eje del mundo que pasa por sus polos, E E' el ecuador, G el orígen de las longitudes, A y B los puntos cuyas coordenadas se conocen, y son:

B D=latitud de B=l
G D=longitud de B=L
A C=latitud de A=l'
G C=longitud de A=L'



(Fig. 403)

En el triángulo esférico P B A se conocen P B=90°—l, P A=90°—l' y el ángulo B P A cuya medida es el arco C D=L—L'. Así pues el problema se reduce á determinar el lado A B conociendo dos lados y el ángulo que forman. (881) Una vez obtenido el lado A B en grados y fracciones de grado se determinará su longitud l en metros ó en otra unidad lineal por medio de la fórmula

$$l = \frac{\pi r}{180} . \text{ A B}$$

en la que r es la longitud del radio de la tierra. Como πr representa la magnitud de la semicircunferencia de un círculo máximo y sabemos que todo el meridiano tiene 40.000,000 de metros, πr=20000 kilómetros, y sustituyendo en la fórmula anterior se tiene:

$$l^{km} = \frac{1000}{9} . \text{ A B}$$

Sea como aplicacion determinar la distancia de México á Tehuantepec, cuyas coordenadas son con poca diferencia

México { lat.=19°—26'—00" ; long.=99°— 6'—45"
Tehuantepec { lat.=16°—21'—16" ; long.=95°—19'—44"

Los datos del triángulo que tenemos que resolver son:

b=90°—(19°—26'—00")=70°—34'— 0"
a=90°—(16°—20'—16")=73°—39'—44"
C=3°—47'—1" diferencia de las longitudes.

Las fórmulas para determinar A y B son:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A+B) = \text{cot.} \tfrac{1}{2} C \frac{\cos. \frac{1}{2}(a-b)}{\cos. \frac{1}{2}(a+b)}$$

a= 73°—39'—44"
b= 70°—34'— 0"
a+b=144°—13'—44" $\frac{1}{2}$ (a+b)=72°— 6'—52"
a—b= 3°— 5'—44" $\frac{1}{2}$ (a—b)= 1°—32'—52"
C= 3°—47'— 1" $\frac{1}{2}$ C = 1°—53'—30'5

log. cot. $\frac{1}{2}$ C.....	1'481 0883
log. cos. $\frac{1}{2}$ (a—b)....	9'999 8415
	11'480 9298
log. cos. $\frac{1}{2}$ (a+b)....	9'487 3034
log. tang. $\frac{1}{2}$(A+B)..	1'993 6264
$\frac{1}{2}$(A+B)..	89°—25'—6" '92

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A-B)=\text{cot. } \tfrac{1}{2}C\,\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(a+b)}$$

log. cot. $\frac{1}{2}$ C.....	1'481 0883
log. sen. $\frac{1}{2}$ (a—b)....	8'431 5330
	9'912 6213
log. sen. $\frac{1}{2}$ (a+b)....	9'978 4873
log. tang. $\frac{1}{2}$(A—B)...	9'934 1340
$\frac{1}{2}$(A—B)...	40°—40'—18" '35

$$A=\tfrac{1}{2}(A+B)+\tfrac{1}{2}(A-B)=130°-5'-25''\cdot 27$$
$$B=\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(A-B)=48°-44'-48''\cdot 57$$

Para calcular el valor de *c* haremos uso de las fórmulas:

$$\text{sen. } c=\frac{\text{sen. C sen. a}}{\text{sen. A}}$$

log. sen. C.....	8'819 4682
log. sen. a	9'982 0993
	18'801 5675
log. sen. A.....	9'883 6784
log. sen. c.....	8'917 8891
c=4°—44'—52" '73	

$$\text{sen. } c=\frac{\text{sen. C sen. b}}{\text{sen. B}}$$

log. sen. C.....	8'819 4682
log. sen. b.....	9'974 5252
	18'793 9934
log. sen. B.....	9'876 1043
log. sen. c.....	8'917 8891
c=4°—44'—52" '73	

Una vez conocido el lado *c* en grados, podemos determinar su magnitud en kilómetros por medio de la fórmula:

$$l=\frac{1000}{9}\times c$$

sustituyendo: $l=\frac{1000\times 4'74798}{9}=527'775$ km.

895.—*Conociendo las coordenadas de tres puntos situados en la superficie de la esfera, calcular la superficie del triángulo que tiene por vértice esos tres puntos.*

Conforme á lo explicado en el párrafo anterior se determinará en grados la magnitud de los arcos que separan un punto de otro, y una vez conocidos los tres lados del triángulo esférico, bastará calcular su superficie en funcion de los lados para resolver el problema. (892 I)

Tabla de las principales fórmulas usadas en Trigonometría esférica.

Longitud del arco $a°$ en unidades lineales:

$$l=\frac{\pi\, r\, a°}{180}$$

Triángulo esférico:

$a<b+c$
$a>b-c$
$a+b+c<360$
$a<180$
$A+B+C>2$ rectos
$A+B+C<6$ rectos

si $a=b$ tendremos: $A=B$
si $a>b$ tendremos: $A>B$

Triángulo suplementario:

$a'=180°-A$	$A'=180°-a$
$b'=180°-B$	$B'=180°-b$
$c'=180°-C$	$C'=180°-c$

Relacion entre tres lados y un ángulo.

$$\left.\begin{array}{l}\cos. a=\cos. b \cos. c+\text{sen. } b \text{ sen. } c \cos. A\\ \cos. b=\cos. a \cos. c+\text{sen. } a \text{ sen. } c \cos. B\\ \cos. c=\cos. a \cos. b+\text{sen. } a \text{ sen. } b \cos. C\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(1)$$

Relacion entre dos lados y los ángulos opuestos.

$$\frac{\text{sen. a}}{\text{sen. A}}=\frac{\text{sen. b}}{\text{sen. B}}=\frac{\text{sen. c}}{\text{sen. C}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Relacion entre dos lados, el ángulo que forma y el ángulo opuesto á uno de ellos.

$$\left.\begin{array}{l}\text{cot. a sen. b}-\text{cot. A sen. C}=\text{cos. b cos. C}\\ \text{cot. b sen. a}-\text{cot. B sen. C}=\text{cos. a cos. C}\\ \text{cot. b sen. c}-\text{cot. B sen. A}=\text{cos. c cos. A}\\ \text{cot. c sen. b}-\text{cot. C sen. A}=\text{cos. b cos. A}\\ \text{cot. c sen. a}-\text{cot. C sen. B}=\text{cos. a cos. B}\\ \text{cot. a sen. c}-\text{cot. A sen. B}=\text{cos. c cos. B}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(3)$$

Relacion entre un lado y los tres ángulos

$$\left.\begin{array}{l}\text{cos. A}=-\text{cos. B cos. C}+\text{sen. B sen. C cos. a}\\ \text{cos. B}=-\text{cos. A cos. C}+\text{sen. A sen. C cos. b}\\ \text{cos. C}=-\text{cos. A cos. B}+\text{sen. A sen. B cos. c}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(4)$$

Fórmulas de los triángulos rectángulos.

Hipotenusa y dos lados:

$$\text{cos. a}=\text{cos. b cos. c}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Hipotenusa, un lado y el ángulo opuesto:

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen. b}=\text{sen. a sen. B}\\ \text{sen. c}=\text{sen. a sen. C}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(6)$$

Hipotenusa, un lado y el ángulo que forman:

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. b}=\text{tang. a cos. C}\\ \text{tang. c}=\text{tang. a cos. B}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(7)$$

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

Dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. b}=\text{sen. c tang. B}\\ \text{tang. c}=\text{sen. b tang. C}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(8)$$

Dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{cos. B}=\text{cos. b sen. C}\\ \text{cos. C}=\text{cos. c sen. B}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(9)$$

La hipotenusa y los dos ángulos:

$$\text{cos. a}=\text{cot. B cot. C}\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

La hipotenusa y los dos lados:

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. }\tfrac{1}{2}\text{ c}=+\sqrt{\text{tang. }\tfrac{1}{2}\text{ (a}-\text{b) tang. }\tfrac{1}{2}\text{ (a}+\text{b)}}\\ \text{tang. }\tfrac{1}{2}\text{ b}=+\sqrt{\text{tang. }\tfrac{1}{2}\text{ (a}-\text{c) tang. }\tfrac{1}{2}\text{ (a}+\text{c)}}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(11)$$

La hipotenusa, un lado y el ángulo opuesto:

$$\text{tang. }(45^\circ+\tfrac{1}{2}\text{ a})=\pm\sqrt{\frac{\text{tang. }\frac{1}{2}\text{ (B}+\text{b)}}{\text{tang. }\frac{1}{2}\text{ (B}-\text{b)}}}=\pm\sqrt{\frac{\text{tang. }\frac{1}{2}\text{ (C}+\text{c)}}{\text{tang. }\frac{1}{2}\text{ (C}-\text{c)}}}\ldots\ldots\ldots(12)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. }(45^\circ+\tfrac{1}{2}\text{ B})=\pm\sqrt{\frac{\text{tang. }\frac{1}{2}\text{ (a}+\text{b)}}{\text{tang. }\frac{1}{2}\text{ (a}-\text{b)}}}\\ \text{tang. }(45^\circ+\tfrac{1}{2}\text{ C})=\pm\sqrt{\frac{\text{tang. }\frac{1}{2}\text{ (a}+\text{c)}}{\text{tang. }\frac{1}{2}\text{ (a}-\text{c)}}}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(13)$$

La hipotenusa, un lado y el ángulo que forman:

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. }\tfrac{1}{2}\text{ C}=+\sqrt{\frac{\text{sen. (a}-\text{b)}}{\text{sen. (a}+\text{b)}}}\\ \text{tang. }\tfrac{1}{2}\text{ B}=+\sqrt{\frac{\text{sen. (a}-\text{c)}}{\text{sen. (a}+\text{c)}}}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(14)$$

Dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. }(45^\circ+\tfrac{1}{2}\,c)=\pm\sqrt{\dfrac{\text{sen. }(B+b)}{\text{sen. }(B-b)}}\\[2ex]\text{tang. }(45^\circ+\tfrac{1}{2}\,b)=\pm\sqrt{\dfrac{\text{sen. }(C+c)}{\text{sen. }(C-c)}}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(15)$$

Dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,b=+\sqrt{\text{tang.}\left(45^\circ+\dfrac{B-C}{2}\right)\ \text{tang.}\left(\dfrac{B+C}{2}-45^\circ\right)}\\[2ex]\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,c=+\sqrt{\text{tang.}\left(45^\circ-\dfrac{B-C}{2}\right)\ \text{tang.}\left(\dfrac{B+C}{2}-45^\circ\right)}\end{array}\right\}(15\tfrac{1}{2})$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. }(45^\circ+\tfrac{1}{2}\,C)=\pm\sqrt{\text{cot. }\tfrac{1}{2}\,(B+b)\ \text{cot. }\tfrac{1}{2}\,(B-b)}\\[2ex]\text{tang. }(45^\circ+\tfrac{1}{2}\,B)=\pm\sqrt{\text{cot. }\tfrac{1}{2}\,(C+c)\ \text{cot. }\tfrac{1}{2}\,(C-c)}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(16)$$

La hipotenusa y los dos ángulos:

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,a=+\sqrt{\frac{\text{cos. }(180^\circ-B-C)}{\text{cos. }(B-C)}}\ldots\ldots\ldots(16\tfrac{1}{2})$$

Triángulos rectiláteros:

$$\text{cos. }A=-\text{cos. }B\ \text{cos. }C\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen. }B=\text{sen. }A\ \text{sen. }b\\[1ex]\text{sen. }C=\text{sen. }A\ \text{sen. }c\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(18)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. }B=-\text{tang. }A\ \text{cos. }c\\[1ex]\text{tang. }C=-\text{tang. }A\ \text{cos. }b\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(19)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. }B=\ \text{sen. }C\ \text{tang. }b\\[1ex]\text{tang. }C=\ \text{sen. }B\ \text{tang. }c\end{array}\right\}\ldots\ldots(20)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{cos. }b=\text{cos. }B\ \text{sen. }c\\[1ex]\text{cos. }c=\text{cos. }C\ \text{sen. }b\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(21)$$

$$\text{cos. }A=-\text{cot. }b\ \text{cot. }c\ldots\ldots\ldots(22)$$

Angulos auxiliares:

$$P=M\ \text{cos.}\,\alpha+N\ \text{sen.}\,\alpha\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

$$\text{tang.}\,\varphi=\frac{N}{M}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(B)$$

$$P\ \text{cos.}\,\varphi=M\ \text{cos. }(\alpha-\varphi)\ldots\ldots\ldots(C)$$

Los ángulos en funcion de los lados:

$$p=\tfrac{1}{2}\,(a+b+c)$$

$$\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{\text{sen. }(p-b)\ \text{sen. }(p-c)}{\text{sen. }b\ \text{sen. }c}}\ldots\ldots\ldots(23)$$

$$\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{\text{sen. }p\ \text{sen. }(p-a)}{\text{sen. }b\ \text{sen. }c}}\ldots\ldots\ldots(24)$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{\text{sen. }(p-b)\ \text{sen. }(p-c)}{\text{sen. }p\ \text{sen. }(p-a)}}\ldots\ldots\ldots(25)$$

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{\text{sen. }p\ \text{sen. }(p-a)}{\text{sen. }(p-b)\ \text{sen. }(p-c)}}\ldots\ldots\ldots(26)$$

Los lados en funcion de los ángulos:

$$P=\tfrac{1}{2}\,(A+B+C)$$

$$\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{-\text{cos. }P\ \text{cos. }(P-A)}{\text{sen. }B\ \text{sen. }C}}\ldots\ldots\ldots(27)$$

$$\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{\text{cos.}(P-B)\ \text{cos.}(P-C)}{\text{sen. }B\ \text{sen. }C}}\ldots\ldots\ldots(28)$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{-\text{cos. }P\ \text{cos. }(P-A)}{\text{cos.}(P-B)\ \text{cos.}(P-C)}}\ldots\ldots\ldots(29)$$

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{\text{cos.}(P-B)\ \text{cos.}(P-C)}{-\text{cos. }P\ \text{cos. }(P-A)}}\ldots\ldots\ldots(30)$$

Id del exceso esférico: $\varepsilon = A + B + C - 180^\circ = 2P - 180^\circ$

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon = P - 90^\circ$$

$$P = \tfrac{1}{2}\varepsilon + 90^\circ$$

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\varepsilon\ \text{sen.}\ (A - \tfrac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen.}\ B\ \text{sen.}\ C}} \quad \ldots\ldots\ldots (31)$$

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\ (B - \tfrac{1}{2}\varepsilon)\ \text{sen.}\ (C - \tfrac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen.}\ B\ \text{sen.}\ C}} \quad \ldots\ldots\ldots (32)$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\varepsilon\ \text{sen.}\ (A - \tfrac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen.}\ (B - \tfrac{1}{2}\varepsilon)\ \text{sen.}\ (C - \tfrac{1}{2}\varepsilon)}} \quad \ldots\ldots (33)$$

$$\cot.\ \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\ (B - \tfrac{1}{2}\varepsilon)\ \text{sen.}\ (C - \tfrac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\varepsilon\ \text{sen.}\ (A - \tfrac{1}{2}\varepsilon)}} \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

Fórmulas de Delambre:

$$\frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(A + B)}{\cos.\ \tfrac{1}{2}C} = \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}(a - b)}{\cos.\ \tfrac{1}{2}c} \quad \ldots\ldots\ldots (35)$$

$$\frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(A - B)}{\cos.\ \tfrac{1}{2}C} = \frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(a - b)}{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}c} \quad \ldots\ldots\ldots (36)$$

$$\frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}(A + B)}{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}C} = \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}(a + b)}{\cos.\ \tfrac{1}{2}c} \quad \ldots\ldots\ldots (37)$$

$$\frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}(A - B)}{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}C} = \frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(a + b)}{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}c} \quad \ldots\ldots\ldots [38]$$

Analogías de Neper:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A + B) = \cot.\ \tfrac{1}{2}C\ \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}(a - b)}{\cos.\ \tfrac{1}{2}(a + b)} \quad \ldots\ldots\ldots [39]$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}[A - B] = \cot.\ \tfrac{1}{2}C\ \frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}[a - b]}{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}[a + b]} \quad \ldots\ldots\ldots [40]$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}[a + b] = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}c\ \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}[A - B]}{\cos.\ \tfrac{1}{2}[A + B]} \quad \ldots\ldots\ldots [41]$$

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(a - b) = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}c\ \frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(A - B)}{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(A + B)} \quad \ldots\ldots\ldots (42)$$

Exceso esférico en funcion de dos lados y el ángulo que forman:

$$\cot.\ \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\cot.\ \tfrac{1}{2}a\ \cot.\ \tfrac{1}{2}b + \cos.\ C}{\text{sen.}\ C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

Id en funcion de tres lados y un ángulo:

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\text{sen.}\ C}{\cos.\ \tfrac{1}{2}c}\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}a\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (44)$$

Id en funcion de los tres lados:

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{4}\varepsilon = \sqrt{\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}p\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(p - a)\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(p - b)\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(p - c)} \quad \ldots\ldots\ldots (45)$$

En el triángulo equilátero:

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{\text{tg.}\ \frac{3a}{4}\ \text{tg.}^2\ \tfrac{1}{4}a}$$

Exceso esférico en funcion de los tres lados:

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\sqrt{\text{sen.}\ p\ \text{sen.}\ (p - a)\ \text{sen.}\ (p - b)\ \text{sen.}\ (p - c)}}{2\cos.\ \tfrac{1}{2}a\ \cos.\ \tfrac{1}{2}b\ \cos.\ \tfrac{1}{2}c} \quad \ldots\ldots\ldots (46)$$

Resolucion de los triángulos oblicuángulos.

I. Conociendo *a*, *b* y *c*

$$p = \tfrac{1}{2}(a + b + c)$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{sen.}\ (p - b)\ \text{sen.}\ (p - c)}{\text{sen.}\ p\ \text{sen.}\ (p - a)}}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{sen.}\ (p - a)\ \text{sen.}\ (p - c)}{\text{sen.}\ p\ \text{sen.}\ (p - b)}}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\text{sen.}\ (p - a)\ \text{sen.}\ (p - b)}{\text{sen.}\ p\ \text{sen.}\ (p - c)}}$$

Es necesario tener: $a + b + c < 360^\circ$; $a < b + c$; $a > b - c$.

II. Conociendo A, B y C

$$\tfrac{1}{2}\,\varepsilon=\tfrac{1}{2}\,(A+B+C)-90^\circ$$

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{\text{sen. }\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\ \text{sen. }(A-\tfrac{1}{2}\,\varepsilon)}{\text{sen. }(B-\tfrac{1}{2}\,\varepsilon)\ \text{sen. }(C-\tfrac{1}{2}\,\varepsilon)}}$$

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,b=\sqrt{\frac{\text{sen. }\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\ \text{sen. }(B-\tfrac{1}{2}\,\varepsilon)}{\text{sen. }(A-\tfrac{1}{2}\,\varepsilon)\ \text{sen. }(C-\tfrac{1}{2}\,\varepsilon)}}$$

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,c=\sqrt{\frac{\text{sen. }\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\ \text{sen. }(C-\tfrac{1}{2}\,\varepsilon)}{\text{sen. }(A-\tfrac{1}{2}\,\varepsilon)\ \text{sen. }(B-\tfrac{1}{2}\,\varepsilon)}}$$

Es necesario tener: $\varepsilon<360^\circ$ A, B y $C>\tfrac{1}{2}\,\varepsilon$

III. Conociendo *a*, *b* y C

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,(A+B)=\text{cot. }\tfrac{1}{2}\,C\,\frac{\text{cos. }\tfrac{1}{2}\,(a-b)}{\text{cos. }\tfrac{1}{2}\,(a+b)}\ldots\ldots\ldots(39)$$

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,(A-B)=\text{cot. }\tfrac{1}{2}\,C\,\frac{\text{sen. }\tfrac{1}{2}\,(a-b)}{\text{sen. }\tfrac{1}{2}\,(a+b)}\ldots\ldots\ldots[40]$$

Si $a>b$

$$A=\tfrac{1}{2}\,(A+B)+\tfrac{1}{2}\,(A-B)$$
$$B=\tfrac{1}{2}\,(A+B)-\tfrac{1}{2}\,(A-B)$$

$$\text{sen. }c=\frac{\text{sen. }C\ \text{sen. }a}{\text{sen. }A}=\frac{\text{sen. }C\ \text{sen. }b}{\text{sen. }B},$$

ó bien

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,c=\frac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,(a+b)\ \text{cos. }\tfrac{1}{2}\,(A+B)}{\text{cos. }\tfrac{1}{2}\,(A-B)}$$

Es necesario que a, b y $C<180^\circ$

IV. Conociendo A, B y *c*

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,(a+b)=\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,c\,\frac{\text{cos. }\tfrac{1}{2}\,(A-B)}{\text{cos. }\tfrac{1}{2}\,(A+B)}\ldots\ldots\ldots(41)$$

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,(a-b)=\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,c\,\frac{\text{sen. }\tfrac{1}{2}\,(A-B)}{\text{sen. }\tfrac{1}{2}\,(A+B)}\ldots\ldots\ldots(42)$$

Si $A>B$

$$a=\tfrac{1}{2}\,(a+b)+\tfrac{1}{2}\,(a-b)$$
$$b=\tfrac{1}{2}\,(a+b)-\tfrac{1}{2}\,(a-b)$$

$$\text{sen. }C=\frac{\text{sen. }c\ \text{sen. }A}{\text{sen. }a}=\frac{\text{sen. }c\ \text{sen. }B}{\text{sen. }b}$$

$$\text{cot. }\tfrac{1}{2}\,C=\frac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,(A+B)\ \text{cos. }\tfrac{1}{2}\,(a+b)}{\text{cos. }\tfrac{1}{2}\,(a-b)}$$

Es necesario que A, B y $c<180^\circ$

V. Conociendo *a*, *b* y B

$$\text{sen. }B=\frac{\text{sen. }b\ \text{sen. }A}{\text{sen. }a},$$

$$\text{cot. }\tfrac{1}{2}\,C=\frac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,(A+B)\ \text{cos. }\tfrac{1}{2}\,(a+b)}{\text{cos. }\tfrac{1}{2}\,(a-b)}=\frac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,(A-B)\ \text{sen. }\tfrac{1}{2}\,(a+b)}{\text{sen. }\tfrac{1}{2}\,(a-b)}$$

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,c=\frac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,(a+b)\ \text{cos. }\tfrac{1}{2}\,(A+B)}{\text{cos. }\tfrac{1}{2}\,(A-B)}=\frac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,(a-b)\ \text{sen. }\tfrac{1}{2}\,(A+B)}{\text{sen. }\tfrac{1}{2}\,(A-B)}$$

Para saber si el problema es posible ó si tiene una ó dos resoluciones, debe tenerse sen. B igual ó menor que 1, cot. $\tfrac{1}{2}$ C y tang. $\tfrac{1}{2}$ c han de ser positivas; cuando $b>a$ ha de ser $B>A$ y cuando $b<a$ ha de ser $B<A$.

VI. Conociendo A, B y *a*

$$\text{sen. }b=\frac{\text{sen. }B\ \text{sen. }a}{\text{sen. }A}$$

$$\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,c=\frac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,(a+b)\ \text{cos. }\tfrac{1}{2}\,(A+B)}{\text{cos. }\tfrac{1}{2}\,(A-B)}=\frac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,(a-b)\ \text{sen. }\tfrac{1}{2}\,(A+B)}{\text{sen. }\tfrac{1}{2}\,(A-B)}$$

$$\text{cot. }\tfrac{1}{2}\,C=\frac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,(A+B)\ \text{cos. }\tfrac{1}{2}\,(a+b)}{\text{cos. }\tfrac{1}{2}\,(a-b)}=\frac{\text{tang. }\tfrac{1}{2}\,(A-B)\ \text{sen. }\tfrac{1}{2}\,(a+b)}{\text{sen. }\tfrac{1}{2}\,(a-b)}$$

Para saber si el problema es posible ó si tiene una ó dos soluciones, debe tenerse sen. *b* igual ó menor que 1; tang. $\tfrac{1}{2}$ *c* y cot. $\tfrac{1}{2}$ C positivas; cuando $B>A$ ha de ser $b>a$, y cuando $B<A$ ha de ser $b<a$.

Superficie de un triángulo esférico:

$$\varepsilon=A+B+C-180^\circ$$

$$s=\pi\,r^2\times\frac{\varepsilon}{180}\ldots\ldots\ldots(47)$$

FIN.