traités sur la logique et la dialectique compris sous le titre commun d'*Organon*. Viennent ensuite huit livres de la *Physique*, ouvrage auquel se rattachent plusieurs traités particuliers, tels que le traité du *Ciel*, celui des *Météores*, celui du *Monde*, qu'on croit n'être pas d'Aristote, celui de l'*Ame*, celui de la *Génération*, etc. Les ouvrages d'histoire naturelle comprennent d'abord le grand ouvrage en dix livres de l'*Histoire des animaux*, un traité des *Plantes* en deux livres, que l'on regarde comme apocryphe, et un traité des *Récits merveilleux*, compilation faite probablement d'après les écrits d'Aristote et ceux de plusieurs autres auteurs. Un recueil en trente-huit sections, intitulé *Problèmes*, renferme une foule de questions diverses, la plupart de physique, qu'Aristote semble s'être posées à lui-même pour en chercher la solution. Il y a aussi quelques petits traités sur la mécanique et la géométrie. Un des plus grands ouvrages d'Aristote est celui qui a donné son nom à la métaphysique, et qui paraît avoir reçu ce nom de *métaphysique* de la place arbitraire que lui avaient assignée les grammairiens à la suite des œuvres de physique. Les quatorze livres qui le composent semblent autant de traités originairement détachés. Les traités d'Aristote sur la morale sont au nombre de trois : la *Morale à Nicomaque* en dix livres, l'un des ouvrages les plus étendus et les plus soignés d'Aristote ; les *Grandes éthiques*, qui, en contradiction avec leur titre, n'ont que deux livres assez courts ; enfin les *Éthiques à Eudème* en sept livres. Le traité de la *Politique* d'Aristote est indubitablement le monument le plus précieux de la science politique des anciens. Aristote avait, en outre, composé un recueil intitulé du *Gouvernement*, où il décrivait les constitutions de cent cinquante-huit États démocratiques, aristocratiques, oligarchiques et tyranniques, dont il ne nous est perdu, ainsi qu'un traité intitulé des *Lois*. Il reste, sous le titre d'*Économique*, deux livres sur l'administration publique ou privée, dont le premier paraît être un extrait, par Théophraste, d'un ouvrage correspondant d'Aristote. Enfin la *Rhétorique* et la *Poétique* forment les dernières subdivisions du traité d'Aristote sur la rhétorique est en trois livres ; mais on y réunit un autre ouvrage intitulé *Rhétorique à Alexandre*, qui n'est pas d'Aristote, et qu'on lui donne quelquefois à tort. La poétique, ainsi qu'un traité intitulé des *Vices*, qui accompagna Alexandre dans son expédition. L'ouvrage sur la poétique, tel que l'on croit appartenir à Anaximène de Lampsaque, qui accompagna Alexandre dans son expédition. L'ouvrage sur la poétique, tel que nous le possédons, est seulement on une ébauche ou un extrait incomplet d'un ouvrage plus considérable.

Nous nous bornons ici à mentionner ces ouvrages, qui, pour la plupart, seront, dans le *Grand Dictionnaire*, l'objet d'analyses plus ou moins étendues. V. Organon, Physique, Météorologie, Histoire des animaux, Éthiques, Politique, Rhétorique, etc.

Les meilleures éditions des œuvres complètes d'Aristote sont celle de la collection Didot et celle de Berlin (1831-1836), en 4 vol. in-4°, contenant le texte grec avec variantes, publié par Becker, une traduction latine et un choix de commentaires grecs. La meilleure traduction française des œuvres d'Aristote est celle de M. Barthélemy Saint-Hilaire, qui sera un véritable monument, quand elle sera entièrement achevée.

— Allus. littér.

Quoi qu'en dise Aristote *et sa docte cahale,*
Le tabac est divin, il n'est rien qui l'égale.

Allusion à deux vers de Thomas Corneille dans sa comédie du *Festin de Pierre*, acte Ier, scène Ire :

Quoi qu'on dise *Aristote* et sa docte cabale,
Le tabac est divin, il n'est rien qui l'égale ;
Il peut, par ses fondants, pour l'oisiveté,
Jamais amusement ne fut mieux inventé.
. . . . . .
C'est dans la médecine un remède nouveau :
Il purge, répand, conforte le cerveau ;
De toute noire humeur promptement il délivre ;
Et qui vit sans tabac n'est pas digne de vivre.

Les allusions à ces deux vers sont d'autant plus fréquentes que la chose est d'un usage de plus près général, et que le mot *tabac* se prête, dans l'application, à de faciles variantes :

Le bifteck est divin... le rosbif est divin... le sommeil est divin, etc. :

« Mais, reprit le comte en riant à l'unisson, je citerai aussi Cicéron, à propos du tabac à fumer. Il n'en pas cité Aristote à propos du tabac à priser ?

Quoi qu'en dise *Aristote* et sa docte cahale,
Le tabac est divin, et n'a rien qui l'égale. »

Méry.

ARISTOTE (faire le cheval d'), expression usitée, dans certains jeux de société, pour désigner une pénitence qui consiste à prendre la posture d'un cheval, afin de recevoir sur son dos une dame qu'on doit promener dans le cercle, ou elle est embrassée par chaque joueur. Voici l'origine que l'on assigne à cette locution :

Alexandre le Grand, épris d'une jeune et belle Indienne, semblait avoir perdu le sentiment de la gloire. Ses généraux en murmuraient ; mais aucun n'osait se faire l'organe du mécontentement de l'armée. Aristote s'en chargea. Il représenta à son ancien disciple qu'il ne convenait pas à un conquérant de négliger ainsi le soin de ses brillantes entreprises pour s'abandonner aux plaisirs de l'amour, qui le ravalait au niveau de la brute. Alexandre parut frappé de ces observations ; il il s'absint de retourner chez la belle courtisane. Mais celle-ci accourut bientôt, tout éplorée, pour savoir la cause de son délaissement. Elle apprit alors ce qu'avait fait le philosophe : « Eh quoi ! s'écria-t-elle, le seigneur Aristote condamne le sentiment le plus naturel et le plus doux ! Il vous conseille d'exterminer par la guerre des gens qui ne vous ont fait aucun mal, et il vous blâme d'aimer qui vous aime ! C'est une prétention intolérable ; c'est une impertinence inouïe qui réclame une punition exemplaire ; et, si vous voulez bien me le permettre, je me charge de la lui infliger. » Alexandre se prêta en riant au complot trame contre son précepteur, complot perfide, véritable vengeance de femme. L'Indienne déploya toute sa coquetterie à séduire le philosophe. *Ce que veut une belle est écrit dans les cieux*, disent les Orientaux. Aristote l'apprit à ses dépens. Séduit par de traîtresses galanteries, il devint amoureux fou de la belle Indienne ; il eut beau appeler à son aide la logique, la métaphysique et la morale ; rien ne put le guérir de sa passion. Vainement il crut l'apaiser en recourant à l'étude et en se rappelant les leçons de Platon : une image charmante venait sans cesse s'offrir à ses yeux et chassait toutes les méditations auxquelles il se livrait. Il reconnut alors que le véritable moyen de guérir un penchant si impérieux était d'y succomber. Il se présenta donc auprès de la jeune Indienne, tomba à ses pieds et lui adressa une pathétique déclaration, à laquelle l'enchanteresse feignit de répondre. Elle représenta au philosophe qu'elle ne pouvait croire à une passion si extraordinaire sans en recevoir les preuves les plus convaincantes. Toute femme a son caprice, répondit-elle à Aristote ; celui d'Omphale était de faire filer un héros, le mien est de chevaucher sur le dos d'un philosophe. Cette condition vous paraîtra peut-être une folie ; mais la folie est à mes yeux la meilleure preuve d'amour. » Aristote eut beau se récrier. Il fallut en passer par là. Le dos nerveux, qui changea un âne en danseur, comme dit le proverbe, peut également métamorphoser un philosophe en quadrupède. Voilà Aristote sellé, bridé, et l'aimable jouvencelle à califourchon sur son dos. Elle le fait trotter de côté et d'autre, tandis qu'elle chante joyeusement un lai d'amour approprié à la circonstance. Enfin, quand il est essoufflé, hors d'haleine, elle le conduit vers un bosquet de verdure d'où Alexandre examinait cette scène réjouissante. « Ah ! maître, dit le conquérant en riant aux éclats, est-ce bien vous que je vois dans ce grotesque équipage ? Vous avez donc oublié les belles choses que vous m'avez dites sur les dangers de l'amour, et c'est vous qui vous ravalez au-dessous de la brute ? » A cette raillerie, qui semblait sans réplique, Aristote répondit en homme d'esprit : « Oui, c'est moi, j'en conviens, que vous venez de voir dans cette posture ridicule. Jugez, seigneur, des excès auxquels pourrait vous emporter l'amour, puisqu'il a pu faire commettre une telle folie à un vieillard si renommé par sa sagesse. »

Voilà, certes, une piquante histoire ; mais ce n'est qu'une malice faite à la mémoire de l'illustre philosophe, par quelque poète, dans des dix catégories. Nous voyons, en effet, que le *Lai d'Aristote* est attribué à Henri d'Andelys, trouvère du XIIIe siècle, qui l'a tiré de toutes pièces d'une nouvelle arabe intitulée : le *Vizir sellé et bridé*, nouvelle dont le titre seul indique assez la complète analogie avec le récit que nous venons de présenter.

ARISTOTE, nom que les biographes anciens donnent encore à quatre personnages : le premier, de Chalcide, qui avait écrit une histoire de l'île d'Eubée ; le deuxième, de Cyrène, qui écrivit sur l'art poétique ; le troisième, qui publia des harangues estimées ; le quatrième, qui donna des *Commentaires* sur *l'Iliade*.

ARISTOTE ou **ARISTOTILE**, dit **Fioravanti**, architecte célèbre du XVe siècle, né à Bologne. Attiré en Russie par le tsar Ivan III, il répara le Kremlin et construisit à Moscou, entre autres édifices, la basilique de l'Assomption, qui fut consacrée le 15 août 1479, et que l'on admire encore aujourd'hui, comme un des plus beaux monuments de l'architecture greco-italienne que la Russie possède.

ARISTOTÈLE s. f. (a-ri-sto-tè-le. — du gr. *Aristotélès*, Aristote). Bot. Genre de plantes de la famille des composées, consacré par Adanson à la mémoire d'Aristote.

ARISTOTILE (du gr. *Aristotélès*), Nom sous lequel on désigne quelquefois familièrement Aristote, surtout lorsqu'on fait allusion aux querelles philosophiques du moyen âge.

ARISTOTÉLICIEN, ENNE adj. (a-ri-sto-té-li-si-ain, i-è-ne — du gr. *Aristotélès*, Aristote). Conforme à la philosophie, à la doctrine d'Aristote.

— Substantiv. *Aristotélicien*, Partisan de la philosophie d'Aristote : *La bile de l'auteur était encore animée par quelques contestations particulières avec des* Aristotéliciens. (Fontenelle.)

ARISTOTÉLIE s. f. (a-ri-sto-té-lî — du gr. *Aristotélès*, Aristote). Bot. Genre de plantes sur la classification duquel les botanistes ne sont pas d'accord, et qui se compose d'une seule espèce, l'*aristotelie maqui*, arbrisseau du Chili.

— Ar. pl. Antiq. gr. Fêtes instituées par les habitants de Stagire en l'honneur d'Aristote, leur compatriote.

ARISTOTÉLIQUE adj. (a-ri-sto-té-li-ke — du gr. *Aristotélès*, Aristote). Qui appartient, qui a rapport à Aristote ou à sa philosophie : *Il se forma, vers le fin du XVIe siècle, deux camps ennemis, qui disputaient longuement sur les principes de la philosophie* aristotélique. (Virey.) *Il en aurait été de même chez tous les peuples soumis au joug des constitutions* aristotéliques. (Ch. Nod.)

ARISTOTÉLISANT (a-ri-sto-té-li-zan) part. près. du v. Aristotéliser.

ARISTOTÉLISÉ (a-ri-sto-té-li-zé) part. pass. du v. Aristotéliser.

ARISTOTÉLISER v. n. ou intr. (a-ri-sto-té-li-zé — du gr. *Aristotélès*, Aristote). Etre, se montrer partisan d'Aristote ; soutenir, défendre sa doctrine. » Raisonner d'après les principes d'Aristote, de son école.

— Par anal., Soutenir son opinion avec entêtement, allusion à l'opiniâtreté avec laquelle disputaient les partisans d'Aristote.

ARISTOTÉLISME s. m. (a-ri-sto-té-li-sme — du gr. *Aristotélès*, Aristote). Philosophie, doctrine d'Aristote : *Que de peine n'a-t-il pas fallu pour soustraire l'esprit humain à l'autorité de l'*aristotélisme, *afin de le ramener à l'expérience, qu'il semblait avoir pour toujours abandonnée !* (Dumarsais.) *Dès le XIIe siècle, l'*aristotélisme *est fort accrédité chez les Juifs.* (Renan.) » Syn. de *peripatétisme*. V. ce mot.

ARISTOTILE ou **BASTIANO DA SANGALLO**, artiste florentin, né en 1481, mort en 1551. Il fit diverses copies d'après Raphaël, des portraits, étudia la perspective sous le Bramante, et se distingua principalement dans la peinture décorative. Son chef-d'œuvre en ce genre, où sa renommée éclipsa celle de tous les artistes de son temps, est une décoration qu'il exécuta dans la grande cour du palais Médicis, pour les noces du duc Cosme, et qui représentait la ville de Pise avec tous ses monuments.

ARISTOTIME, tyran de l'Elide, vivait dans le IIe siècle av. C. Il s'empara du souverain pouvoir avec l'appui de la Macédoine, s'entoura d'une garde de mercenaires étrangers, et fit périr un grand nombre de citoyens. Il en avait banni huit cents, qui réclamèrent leurs femmes et leurs enfants. Feignant de consentir à ce départ, il indiqua un jour à ces malheureux, pour les lui ramener, un char de fouet par ses sicaires. A la suite d'un complot, il fut tué par Chylon, qu'il croyait son ami.

ARISTOXÈNE, philosophe et musicien grec, né à Tarente, florissait vers l'an 350 av. J.-C. Il fut l'un des plus célèbres disciples d'Aristote. Suidas prétend qu'il avait composé quatre cent cinquante-trois ouvrages ; il ne nous reste que ses *Éléments harmoniques*, en trois livres, le plus ancien traité de musique connu, et un fragment *sur le Rhythme*.

Dans ses *Éléments*, Aristoxène développa une théorie rationnelle opposée à celle de Pythagore, qui, dans la musique, avait pendant donné la prédominance au calcul, au détriment du sentiment de l'art ; il écrivit que « ceux qui veulent juger bien sainement de la musique, en s'appuyant sur des proportions numériques et des rapports de vitesse comme sur les causes de la gravité ou de l'acuité des sons, non-seulement ne trouveront rien de vrai dans la matière ; mais, bien plus, arrivent à des résultats directement contraires à la réalité. » Ces principes étaient totalement erronés ; mais ils furent accueillis avec faveur comme formant réaction contre ceux de Pythagore. L'école fondée par Aristoxène eut de l'éclat et du retentissement ; ses disciples, qui laissaient une large part au sentiment et à l'expérience, s'appelèrent harmonistes par oreille ; ceux de Pythagore, au contraire, qui basaient tous leurs principes sur les propriétés abstraites des nombres, furent désignés sous le nom d'harmonistes par calcul.

On n'a que très-peu de détails sur la vie et les opinions philosophiques d'Aristoxène, qui se rattachaient à celles de son maître. Irrité, dit-on, de ce qu'Aristote, en mourant, lui avait préféré Théophraste comme son successeur, il se vengea en répandant contre la mémoire de ce grand homme, ainsi que contre celles de Socrate et de Platon, les calomnies honteuses qui ont traversé l'antiquité. On peut consulter à ce sujet une savante dissertation de Mahne, intitulée : *Diatriba de Aristaxene, philosopho peripatetico*, Amsterdam, 1793, in-8°.

ARISTOXÉNIEN s. m. (a-ri-sto-ksé-ni-ain — de *Aristoxène*, n. pr.). Hist. anc. Partisan des doctrines d'Aristoxène de Tarente ; disciple de ce philosophe : *Les* aristoxéniens *prétendaient que l'âme n'est que l'harmonie du corps.*

ARISTULÉ, ÉE adj. (a-ri-stu-lé — du lat. *aristula*, dimin. de *arista*, arête, barbe). Bot. Se dit des organes végétaux munis d'une petite barbe.

ARISTUS, historien grec, né à Salamine, en Chypre. Il avait écrit une histoire d'Alexandre le Grand, que Strabon, Arrien et Athénée citent souvent. Cet ouvrage est perdu.

ARITHMANCIE s. f. Syn. de *arithmomancie*.

ARITHMAUREL s. m. (a-ri-tmo-rèl — du gr. *arithmos*, nombre, et *Maurel*, n. pr. d'homme). Mécan. Machine à calculer, inventée en 1839, par les Français Maurel et Jaget, et au moyen de laquelle on peut exécuter les opérations ordinaires de l'arithmétique avec une très-grande rapidité.

ARITHMÉTICIEN, IENNE s. (a-ri-tmé-ti-si-ain, i-è-ne — de *arithmétique*). Celui, celle qui connaît, qui pratique l'arithmétique : *On bon* arithméticien. *Cette institutrice, cette caissière est une excellente* arithméticienne. *Il est à croire que les* arithméticiens *s'y opposèrent.* (Volt.)

ARITHMÉTICIENS (contre les), petit traité de Sextus l'Empirique, philosophe grec, dirigé contre Platon et les pythagoriciens (fin siècle de J.-C.). On astitue l'école de Pythagore et de Platon faisaient de l'*unité* et des *nombres* des choses en soi, presque des êtres. Sextus débute par une exposition rapide du système pythagoricien des nombres, et de la théorie platonicienne des idées ; puis il soumet à une critique subtile, vraiment grecque, l'existence objective de l'unité et des nombres. Pas d'unité, dit-il, pas de nombre. Or, en soi, l'unité ne peut être pensée. Dire que certaines choses participent de l'*un*, c'est détruire l'unité de l'*un*, c'est tomber dans des contradictions. La composition du nombre n'est pas plus claire que l'existence de l'unité : placez l'*un* à côté de l'*un*, vous n'obtenez le *deux* ni en supposant qu'il constitue quelque chose de nouveau (vaut sans ajouter à ces deux unités, ni en supposant que quelque chose leur est enlevé : donc le *deux* n'est pas une chose en soi, c'est un mot, c'est une convention, une fiction de l'esprit. Le scepticisme nominaliste de Sextus triomphe sans peine du réalisme platonicien et pythagoricien, mais en confondant deux espèces d'arithmétiques très-différentes, l'abstraction *artificielle* ou *logique*, qui est une création purement artificielle de l'esprit, et l'abstraction *rationnelle* ou *naturelle*, qui a une valeur objective bien réelle (l'expérience contenant la raison des apparences physiques assorties aux modes de notre sensibilité. C'est à cette dernière espèce d'abstraction qu'appartiennent les idées d'unité et de nombre. Le petit traité *Contre les Arithméticiens* est réuni à d'autres traités du même genre (*contre les grammairiens et les rhéteurs, contre les géomètres, contre les astrologues, contre les musiciens*) dans l'ouvrage intitulé : *Contre les mathématiciens*, et qui a été traduit en latin par Gentien Gervet en 1569.

ARITHMÉTIQUE s. f. (a-ri-tmé-ti-ke — du lat. *arithmetica*, venant du gr. *arithmétiké*, formé de *arithmos*, nombre). Science des nombres, art de calculer : *Traité d'*Arithmétique. *Presque toutes les nations ont été conduites à poser la même échelle numérique pour base de leur* arithmétique. (Encycl.) *L'*arithmétique *n'est autre chose que l'art de trouver d'une manière abrégée l'expression d'un rapport unique qui résulte de la comparaison de plusieurs autres.* (Lamb.) *Je ne doute point qu'il n'ait été chassé pour des fautes d'*arithmétique *qu'il aura faites dans ses mémoires de dépense.* (Le Sage.) *L'*arithmétique *est, pratiquement, indispensable aux femmes comme aux hommes.* (Mme de Montesson.) *Il semblait un seigneur parfait toutes les fois qu'il ne parlait point et ne faisait point d'*arithmétique. (Alex. Dum.) *Il ne connaît que l'addition et la soustraction pour toute* arithmétique. (Balz.) *C'est une heureuse direction de l'*arithmétique *qui fait le succès de nos armées.* (C. Dollfus.)

Je vais lui faire voir de mon *arithmétique*
E. Augier.

— Se dit, par anal., de tout ce qui suppose un calcul quelconque : *La musique n'est pas une expression de pensée, mais plutôt une* arithmétique *de tons.* (De Bonald.)

— Fig., Supputations, calculs de la pensée, de l'esprit, etc. : *Quant aux mouvements du cœur, vous ne savez pas cette* arithmétique-*là aussi bien que moi.* (Mariv.) *Vous serez enlevé par ses manières chiches, et vous ne croirez jamais à la profonde et rapide* arithmétique *de sa pensée intime.* (Balz.) *La morale est l'*arithmétique *du bonheur.* (Vinet.)

— Livre qui contient les principes de l'arithmétique : *L'*arithmétique *de Bezout. Acheter une* arithmétique.

— *Arithmétique de position*, Nom donné au système de numération écrite qui donne aux chiffres, outre leur valeur absolue, une valeur de position : *Il est permis de penser aujourd'hui que les pythagoriciens connaissaient l'*arithmétique de position. (Ch. Renouvier.)

— *Arithmétique décimale*, Nom donné au système de numération et de calcul basé sur l'addition ou le retranchement d'une ou de plusieurs unités, la grandeur dont l'eau de ce vase nous offre l'idée a la propriété de croître ou de décroître d'une manière insensible et continue ; elle ne saurait passer d'un état à un autre, si voisin qu'on le suppose, sans avoir traversé une infinité d'états intermédiaires. A cette catégorie de grandeurs dites *continues* appartiennent les grandeurs géométriques, longueurs, aires, volumes, angles, et celles que l'on considère en mécanique, telles que la vitesse, la force, la résistance, etc.

Voilà deux mondes qui semblent n'avoir rien de commun : le monde des unités naturelles, des collections, des grandeurs discontinues, et le monde des grandeurs continues. L'esprit humain établit un lien entre ces deux mondes, en appliquant au second l'idée de nombre fournie par le premier. Après avoir compté, l'homme *mesure*. Mesurer, c'est déterminer, exprimer numériquement une grandeur continue au moyen d'une unité conventionnelle, c'est créer, par un procédé artificiel de l'esprit, des unités et des nombres là où il n'y en avait pas naturellement. Les grandeurs continues et leurs rapports sont dans la nature, mais l'expression numérique de ces rapports est le produit de notre activité intellectuelle, produit nécessaire, en ce que l'esprit humain a besoin de signes, et de signes discontinus, pour exprimer et connaître toutes choses. Ainsi, deux espèces de nombres : ceux que donne le dénombrement d'objets distincts et semblables, les *quotités*, et ceux qu'on obtient par la mesure des grandeurs continues, les *quantités*. Dans le monde de la discontinuité, nous passons de l'idée de quotité à l'idée de grandeur, et dans le monde de la continuité, de l'idée de grandeur à l'idée de quantité. Il y a des quotités dans la nature, comme le nombre des étoiles au firmament, celui des planètes de notre système solaire, celui des arbres d'une forêt, celui des étamines d'une fleur ; mais il n'y a pas de quantités, toute quantité résultant de l'application d'une unité arbitraire à la mesure des grandeurs continues. Du reste, les deux espèces de nombres finissent par se confondre dans le langage, la même question *combien* s'applique aux uns et aux autres, et le mot *quantité* devient un terme général qui sert à les désigner indifféremment. Comme on le voit, grâce à la mesure, nous résolvons, en quelque sorte, le continu en discontinu, nous multiplions indéfiniment les espèces d'unités conventionnelles ; nous livrons au calcul, jusque-là borné, réduit aux quotités, le domaine sans limites des quantités. En s'étendant, en soumettant à son empire toutes les grandeurs mesurables, l'idée de nombre se généralise, se dégage et s'abstrait des faits naturels auxquels elle doit son origine et qui lui servaient de support : elle est devenue vraiment objet de science.

Grandeurs discontinues et grandeurs continues sont également régies par l'idée de nombre, et peuvent être réunies sous le nom commun de grandeurs *mathématiques*. Mais toutes les grandeurs que nous offre la nature ne présentent pas ce caractère. A côté de la catégorie de *quantité* qui comprend toutes les grandeurs mathématiques, les métaphysiciens placent la catégorie de *qualité*, dans laquelle se rangent les propriétés diverses qui méritent, dans un sens général, le nom de *grandeurs*, parce qu'elles sont susceptibles d'augmentation et de diminution, mais dont les variations échappent à tout procédé direct de détermination, parce qu'on ne peut les concevoir divisées en parties exactement et précisément égales, division nécessaire pour y créer des unités et pour exprimer numériquement le rapport de grandeur. Il semble qu'il y ait là une limite infranchissable aux applications du calcul. Toutefois l'effort, l'ambition constante de l'esprit scientifique est de ramener à des grandeurs géométriques et mécaniques toutes les autres grandeurs, à des variations quantitatives toutes les variations dans les qualités des choses, et de faire ainsi tomber indirectement sous la loi du nombre ce qui n'y tombe pas directement. Les exemples suivants, empruntés à Cournot (*De l'enchaînement des idées fondamentales*), feront très-bien saisir cette tendance de la science et cette extension indirecte de l'idée de nombre sur laquelle se fondent les applications du calcul à l'étude de la nature, notamment aux sciences physiques.

L'*éclat* des étoiles est une qualité qui ne comporte pas de mesure directe ; cependant l'éclat varie certainement avec la distance, et se trouve déjà par là dépendre d'une grandeur mesurable. Cette cause de variation d'éclat n'est pas la seule, et nous sommes bien sûrs que toutes les étoiles, vues de la même distance, n'auraient pas pour nous le même éclat ; car ce sont autant de soleils qui ne sauraient avoir les mêmes dimensions, et qui, à dimensions égales, ne contrasteraient pas la même avec la même abondance, ni la même espèce de lumière. Or, l'abondance de la lumière, quand il s'agit de lumières homogènes, est quelque chose de mesurable en soi et de mesurable pour nous. Nous pouvons constater que la lumière d'une bougie équivaut pour l'éclat à celle de deux, trois, quatre bougies de même nature, et si nous cherchons à pénétrer dans les causes physiques du phénomène de la lumière, nous trouvons dans des raisons mathématiques, c'est-à-dire dans des rapports entre des grandeurs, une explication satisfaisante des variations d'éclat ou d'intensité. Il n'en est plus tout à fait de même quand il s'agit de comparer des lumières hétérogènes ou des rayons lumineux de couleurs différentes. Le rayon jaune, qui, dans le spectre solaire, se place entre le rayon vert et le rayon orangé, a plus d'éclat que l'un et l'autre : c'est une qualité qui dépend apparemment d'un certain rapport entre la constitution physique des rayons et le mode de sensibilité de notre rétine, et nous n'apercevons pas d'abord comment la mesure y interviendrait. Mais nous savons très-bien que la couleur du rayon est liée à sa réfrangibilité, ou à la grandeur de l'angle qui mesure sa déviation quand il traverse le prisme ; et, de plus, une optique plus savante nous enseigne que la couleur est parfaitement liée à ces nombres d'une prodigieuse petitesse, par lesquels on mesure les longueurs de ce que Newton a appelé dans son système les *accès* de la lumière, ou de ce que l'on appelle maintenant les *ondes lumineuses*. De toute manière donc la qualité des étoiles, qui consiste dans l'éclat, se trouvera liée à des grandeurs mesurables et pourra être assignée, déterminée, à l'aide des nombres qui les mesurent.

Rien de plus rebelle, assurément, à toute mesure directe que cette affection des êtres sensibles que l'on nomme la *douleur* ; il serait fort ridicule de dire que la douleur causée par un accès de goutte est le double ou la moitié de la douleur causée par une rage de dents ; toutefois, la physiologiste juge, d'après la grosseur des cordons nerveux et l'abondance de leurs ramifications, de la sensibilité de l'appareil où ces ramifications pénètrent, et de l'intensité de la douleur que cause le tiraillement des cordons. Il n'est pas éloigné de croire que l'explication des divers modes de la sensibilité serait donnée par les variations de structure des diverses parties de l'appareil nerveux, si nous pouvions y pénétrer assez intimement.

II. — Définition de l'arithmétique, sa nature, son objet. Comme nous l'avons déjà dit (V. Algèbre), les nombres peuvent être considérés d'une manière *abstraite et générale*, et d'une manière *particulière et déterminée*, c'est-à-dire sous le rapport de leurs propriétés et de leurs faits. Cette distinction partage la science des nombres en deux branches : l'*arithmétique*, qui traite des faits, et l'*algèbre*, qui traite des lois des nombres. L'algèbre analyse les fonctions ou relations des nombres en elles-mêmes, les conséquences qu'elles renferment, les lois de leurs transformations et de leurs combinaisons. L'*arithmétique* se sert de cette formation numérique des fonctions, dont les éléments sont eux-mêmes donnés numériquement.

Voici comment Auguste Comte formule la distinction fondamentale de l'algèbre : « La solution complète de toute question de calcul, depuis la plus élémentaire jusqu'à la plus transcendante, se compose nécessairement de deux parties successives, dont la nature est essentiellement distincte. Dans la première, on a pour objet de transformer les équations proposées, de façon à mettre en évidence le mode de formation des quantités inconnues par les quantités connues ; c'est ce qui constitue la question algébrique. Dans la seconde, on a en vue d'évaluer les formules ainsi obtenues, c'est-à-dire de déterminer immédiatement la valeur des nombres cherchés, représentés déjà par certaines fonctions explicites des nombres donnés, telle est la question *arithmétique*... Supposons qu'une question fournisse, entre une grandeur inconnue *x* et deux grandeurs connues *a* et *b*, l'équation $x^2+3x=2b$. On voit tout de suite que la dépendance entre *x* d'une part, *a* et *b* de l'autre, est complétement déterminée ; mais tant que l'équation conserve sa forme primitive, on n'aperçoit nullement de quelle manière l'inconnue dérive des données. C'est cependant ce qu'il faut découvrir avant de penser à l'évaluer. Tel est l'objet de la partie algébrique de la solution. Lorsque, par une suite de transformations qui ont successivement amené à cette dérivation de plus en plus sensible, on est arrivé à présenter l'équation proposée sous la forme

$$x=\sqrt[3]{b}+\sqrt{b^2+a^3}+\sqrt[3]{b}-\sqrt{b^2+a^3}$$

le rôle de l'algèbre est terminé ; et quand même on ne saurait point effectuer les opérations arithmétiques indiquées par cette formule, on n'en aurait pas moins obtenu une connaissance très-réelle et souvent importante. Le rôle de l'*arithmétique* consistera maintenant, en partant de cette formule, à faire trouver le nombre *x* quand les valeurs des nombres *a* et *b* auront été fixées..... On voit que l'algèbre peut se définir en général comme ayant pour objet la résolution des équations, c'est-à-dire la transformation des fonctions implicites en fonctions explicites équivalentes, et que l'*arithmétique* peut être définie comme destinée à l'évaluation des fonctions. En contractant les expressions au plus haut degré, on peut dire : l'algèbre est le *calcul des fonctions*, et l'*arithmétique* le *calcul des valeurs*. »

Le même philosophe fait remarquer qu'à un autre point de vue, le calcul des valeurs ou calcul arithmétique peut être conçu simplement comme un appendice, un cas particulier du calcul des fonctions ou calcul algébrique, toute évaluation ou réalisation numérique n'étant autre chose qu'une véritable transformation des fonctions à évaluer, laquelle ne diffère des transformations analytiques que parce qu'elle en est le terme et le but. En effet, un nombre inconnu, dont le mode de formation est donné, est, par le seul énoncé même de la question *arithmétique*, déjà défini et exprimé sous une certaine forme ; en l'évaluant, on ne fait que mettre son expression sous une autre forme déterminée, laquelle est considérée comme définitive parce qu'elle le fait rentrer dans un système régulier et convenu de numération. L'évaluation consiste si bien dans une simple transformation, que lorsque l'expression primitive du nombre se trouve elle-même conforme à la numération régulière, il n'y a plus, à proprement parler, d'évaluation, ou plutôt on répond à la question par la question même. Qu'on demande, par exemple, d'ajouter les deux nombres *trente* et *sept*, on répondra en se bornant à répéter l'énoncé même de la question, et on croira néanmoins avoir évalué la somme, ce qui signifie que dans ce cas la première expression de la fonction n'a pas besoin d'être transformée, tandis qu'il n'en serait point là ainsi pour ajouter *sept-trois* à *quatorze*, car alors la somme ne serait pas immédiatement exprimée d'une manière conforme au rang qu'elle occupe dans l'échelle fixe et générale de la numération.

L'*arithmétique* peut se diviser en trois parties. La première s'occupe de la réalisation numérique, dans un système de numération donné, des trois couples de fonctions abstraites élémentaires, fonction *somme* et fonction *différence*, fonction *produit* et fonction *quotient*, fonction *puissance* et fonction *racine*,

$$\begin{cases} a+b=x \\ a-b=x \end{cases} \quad \begin{cases} a \\ b \end{cases} =x \quad \begin{cases} a^b=x, \\ \sqrt[b]{a}=x, \end{cases}$$

réalisation à laquelle se ramène celle de toutes les fonctions composées. La seconde traite de la comparaison des nombres faite au point de vue arithmétique, c'est-à-dire des *rapports*, *proportions* et *progressions*, considérés dans des nombres déterminés. La troisième partie, appelée *théorie des nombres*, et quelquefois *arithmétique transcendante*, a pour objet de découvrir les propriétés inhérentes aux différents nombres en vertu de leurs valeurs et abstraction faite de toute numération particulière.

III. — Formation des nombres. La première question qui se pose en *arithmétique* est celle-ci : Comment les nombres particuliers se déterminent-ils ? Comment naissent-ils ? Il y a trois modes de formation des nombres, ou, comme disent certains mathématiciens, trois *algorithmes* primitifs. Le premier est la *sommation*, qui présente deux opérations inverses : *addition* et *soustraction*, fondées d'unités. On peut partir d'une seule unité pour former, par accrégation, les divers nombres. *Une* et *une* unités jointes, séparées de toutes les autres unités possibles, donnent le nombre *deux* ; en réunissant *une* nouvelle unité à ce premier groupe, on a le nombre *trois*, et ainsi de suite indéfiniment. On peut descendre l'échelle des nombres au lieu de la monter, c'est-à-dire partir d'un nombre supérieur pour former, par désagrégation, les nombres inférieurs. Une unité retranchée du nombre *dix* donne le nombre *neuf*, une unité retranchée du nombre *neuf* donne le nombre *huit*, et ainsi de suite jusqu'à l'unité. Si l'on s'en tenait à cette première conception de la sommation, si l'on n'avait d'autres moyens de former les nombres que d'ajouter ou de retrancher successivement les unités une à une, les nombres ainsi formés ne tarderaient pas à devenir irrepréhensibles par l'impossibilité où la mémoire et l'imagination seraient de distinguer ces groupes d'unités les uns des autres. Il n'y aurait pas d'*arithmétique*. Mais l'idée de sommation s'étend ; elle s'élève pour ainsi dire d'un degré ; l'addition et la soustraction ne portent plus sur des unités seulement, mais sur des nombres ; en d'autres termes, les nombres construits par addition ou soustraction sont considérés à leur tour comme joints ou comme soustraits les uns par rapport aux autres. Le jugement en vertu duquel se produit cette extension de la sommation a peut-être exprimé de la manière suivante : *Une somme à laquelle on ajoute ou de laquelle on retranche une autre somme est identique avec cette même somme à laquelle on ajoute ou de laquelle on retranche une à une les unités qui, réunies, composent l'autre :*

$$(3+1=2=3+(1+1)=5-3=5-(1+1+1)=5-1-1-1.$$

Ce jugement, qui est la base de l'*arithmétique*, est évidemment analytique, quoi qu'en ait dit Kant, car il dérive de celui-ci : *Une somme est identique avec les unités réunies qui la composent* (3=1+1+1), lequel est contenu dans la définition du nombre. L'addition et la soustraction de nombres, dit très-bien Condillac, ne diffèrent de l'addition et de la soustraction d'unités que parce qu'elles font tout à coup ce que celles-ci ne font que successivement : c'est au fond la même opération, comme montrent les degrés deux à deux et les monter un à un ne sont, au fond, que monter. »

Lorsqu'on veut former un nombre par l'addition de plusieurs autres, il peut arriver que ces autres nombres soient tous égaux entre eux : de là un nouveau mode de formation des nombres, un nouvel algorithme. Le nombre à construire ne dépend plus que de deux éléments, savoir : 1° le nombre qui est ainsi ajouté plusieurs fois à lui-même ; 2° le nombre de fois que cette répétition a lieu. Ces deux éléments s'appellent *facteurs* ; le nombre à construire est le produit de ces deux facteurs ; enfin, le mode lui-même de formation s'appelle *multiplication*. La multiplication est un cas particulier de l'addition ; c'est une addition qui, en raison de l'égalité des nombres à réunir, peut se faire en une seule fois au lieu de se faire à plusieurs reprises. Une propriété remarquable de la multiplication, « propriété caractéristique, dit M. Transon, et qui suffirait bien pour prouver que la circonstance de plusieurs nombres égaux, réunis en un seul,

conduit véritablement à un mode de formation tout à fait distinct, » c'est que les deux facteurs, quoique se présentant avec des fonctions différentes qui leur ont fait donner des noms différents, *multiplicande*, *multiplicateur*, concourent cependant absolument de la même manière à la formation du produit, de telle sorte qu'on peut prendre indifféremment chacun d'eux pour multiplicande ou pour multiplicateur, sans rien changer au résultat de l'opération. Ainsi, par exemple, le nombre *trois cent quatre* fois donnera le même produit que le nombre *quatre* répété *trois* fois. A la multiplication correspond la division, comme à l'addition la soustraction. La multiplication est la branche directe, et la division la branche inverse du second algorithme, comme l'addition est la branche directe, et la soustraction la branche inverse de la sommation. La division consiste, étant données deux nombres, dont l'un est considéré comme un produit et l'autre comme un des facteurs de ce produit, à déterminer un troisième nombre qui soit l'autre facteur. Celui des deux nombres qui représente ici un produit reçoit le nom de *dividende*; le facteur donné est le *diviseur*, et celui qu'on cherche est le *quotient*. Il faut remarquer que si un produit n'est au fond qu'une somme, un quotient n'est pas une différence; la division ne pourrait être considérée comme un cas particulier de la soustraction, comme une soustraction plus rapide, que si l'on envisageait uniquement le reste à obtenir en divisant un nombre par un autre. Le second algorithme, qui embrasse la multiplication et la division, a reçu le nom de *reproduction*.

La sommation nous a conduit à la reproduction; la reproduction nous conduit à un troisième algorithme qui a reçu le nom de *graduation*. En multipliant le produit de deux nombres par un troisième, nous avons le produit de trois facteurs. En multipliant ce produit par un quatrième nombre, nous avons le produit de quatre facteurs. Supposons ces facteurs égaux, et cette circonstance nous donne un nouveau mode de génération. Ici, comme dans la reproduction, le nombre à construire ne dépend plus que de deux éléments : 1° le nombre qui est employé plusieurs fois comme facteur; 2° le nombre de fois que cette sorte de répétition a lieu. Le résultat obtenu au moyen de ces deux éléments reçoit le nom de *puissance*, le facteur celui de *racine*, et l'autre nombre élémentaire est appelé *exposant*, parce qu'il indique le degré de la puissance. Le *produit* était une espèce particulière du genre *somme*, caractérisée par l'égalité des nombres ajoutés l'un à l'autre; la *puissance* est une espèce particulière du genre *produit*, caractérisée par l'égalité des nombres multipliés l'un par l'autre. Comme la sommation et la reproduction, la graduation a une branche directe et une branche inverse; la première s'appelle *élévation des puissances*, la seconde *extraction des racines*.

IV. — ORIGINE DES NOMBRES FRACTIONNAIRES ET IRRATIONNELS. Nous avons jusqu'ici considéré le nombre comme une collection, un agrégat d'unités; mais l'examen plus approfondi des deux derniers algorithmes, reproduction et graduation, nous conduit à une conception, à une définition du nombre, plus générale et plus abstraite. Avec les fonctions directes $a+x$, $ab=x$, nous restions dans l'*arithmétique* des nombres collectifs, des nombres donnés par la nature, dans l'*arithmétique* des quotités, parce que ces fonctions peuvent toujours se ramener à la recherche de $a+b=x$ sont toujours numériquement réalisables. Il n'en est pas de même des fonctions inverses

$$a|b=x, \sqrt[b]{a}=x;$$

elles ne sont déterminables qu'en certains cas très-particuliers, si nous nous en tenons à la considération des nombres entiers ou naturels. En effet, lorsque le dividende ne contient pas un nombre exact de fois le diviseur, il est impossible de trouver pour quotient un nombre entier, puisque si un tel quotient existait, en répétant le diviseur un nombre exact de fois marqué par ce quotient, on reproduirait le dividende, ce qui est contre la supposition. On veut, par exemple, diviser *quinze* par *quatre*; d'abord le quotient ne saurait être ni *trois*, ni un nombre inférieur à *trois*, puisque le diviseur répété *trois fois* donne seulement *douze*, qui est inférieur au dividende; et ensuite, ce quotient ne saurait être *quatre* ni un nombre supérieur à *quatre*, puisque le diviseur répété *quatre fois* donne *seize*, qui surpasse le dividende. De sorte qu'évidemment le quotient de *quinze* divisé par *quatre* n'a pas de place dans la suite indéfinie des nombres tels que les donne la sommation. Ce quotient, qui est une chimère intellectuelle, au point de vue de l'*arithmétique* des quotités, devient une réalité par l'intervention de la raison qui applique la fonction $\frac{a}{b}=x$ à la détermination des grandeurs continues. De l'*arithmétique* des nombres entiers, nous passons à l'*arithmétique* des nombres fractionnaires; à cette définition : *tout nombre est un agrégat d'unités*, nous substituons celle-ci, donnée par Newton : *tout nombre est le rapport d'une grandeur avec l'unité, c'est-à-dire la manière dont une grandeur est composée avec l'unité.*

Ce n'est pas tout : la fonction $\sqrt[b]{a}$ nous conduit à des quantités qui ne sont ni des nombres entiers, ni des nombres fractionnaires. Lorsqu'on veut connaître la racine déterminée d'un nombre qui n'est pas une puissance exacte du degré marqué par l'exposant donné, il est impossible de trouver un nombre entier qui soit la racine demandée. On demande, par exemple, la racine cubique ou troisième de *quarante-cinq*; cette racine n'est ni *trois*, ni un nombre inférieur à *trois*, attendu que *trois* élevé à la troisième puissance donne seulement *vingt-sept*; ce n'est pas non plus *quatre* ni un nombre supérieur à *quatre*, puisque déjà *quatre* élevé à la troisième puissance donne *soixante-quatre*. La racine troisième de *quarante-cinq* n'est donc pas dans la suite des nombres naturels. Mais il y a plus, une telle racine ne saurait être davantage un nombre fractionnaire, car on prouve qu'en poussant indéfiniment la subdivision de l'unité en parties égales, jamais ces parties ne seront de telle grandeur que la racine d'une puissance inexacte en contienne une quantité précise. Toujours, à la *vérité*, en s'arrêtant à une subdivision quelconque, on peut déterminer deux nombres fractionnaires consécutifs issus de cette subdivision, entre lesquels la racine cherchée est comprise, mais enfin elle ne peut jamais être évaluée en nombres entiers et fractionnaires que sous la réserve d'une différence qui, pour être indéfiniment réductible, n'en est pas moins réelle (V. APPROXIMATION). Ces sortes de quantités, qui ne peuvent avoir qu'une expression numérique inexacte, sont dites *irrationnelles*, parce qu'on ne saurait véritablement enseigner leur rapport avec l'unité; on les appelle aussi *incommensurables*, comme n'ayant point avec l'unité de commune mesure.

Il n'est pas sans intérêt de rappeler que les nombres fractionnaires et les quantités irrationnelles formaient autrefois l'objet d'une branche distincte de la science des nombres, à laquelle on avait donné le nom de *logistique*, du mot *logos*, rapport. « Les anciens, dit Leibnitz, distinguaient l'*arithmétique* et la *logistique* : l'*arithmétique*, qui n'envisage que les nombres entiers; la *logistique*, qui a pour objet les considérations relatives aux fractions et, en général, à toute espèce de rapports. »

V. — LANGUE DE L'ARITHMÉTIQUE OU NUMÉRATION. Le calcul arithmétique suppose un système de nomenclature dans lequel nombres qui leur donne une forme définitive pour l'esprit; il appelle un système de signes aussi simples que possible, qui permettent d'effectuer avec facilité et rapidité toutes les opérations. La nomenclature des nombres, c'est la *numération parlée*; le système des signes numériques, c'est la *numération écrite*.

— *Numération parlée.* « Pour peu que les nombres fussent composés, dit Condillac, ils ne s'offriraient à nous que sous une idée vague de multitude, si à chaque collection d'unités nous n'avions pas donné un nom pour la distinguer de la collection précédente qui à une unité de moins, et de la collection suivante qui a une unité de plus. Huit, par exemple, me représente un nombre que je distingue de sept et de neuf; de sept, parce que je me souviens que c'est un nom que j'ai donné à une collection qui est sept plus un; et de neuf, parce que je me souviens également que c'est un nom que j'ai donné à une collection qui est neuf moins un. » Il faut des noms pour nommer les nombres; mais si chaque nombre devait être conçu comme un groupe simple et désigné par un nom particulier, distinct et indépendant de ceux des autres, il est clair que notre faculté de compter n'irait pas loin; des noms de nombres trop multipliés ne pourraient trouver place dans notre mémoire. Nous allons voir que les trois algorithmes primitifs, sommation, reproduction, graduation, fournissent le moyen de dénommer autant de nombres qu'il est nécessaire, à l'aide de signes vocaux très-peu nombreux. Nous commençons par donner des noms particuliers aux dix premiers nombres qui constituent pour notre esprit des groupes simples formés par addition successive d'unités :

Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix.

Quant aux nombres supérieurs à dix jusqu'à vingt, nous les concevons en vertu du jugement de sommation, non plus comme des groupes simples, mais comme des groupes composés du groupe dix et des groupes inférieurs à dix, ce qui nous permet de les exprimer avec deux mots déjà connus, de sorte que nous avons :

dix-un (*undecim*, dont nous avons fait *onze*, n'a pas d'autre sens)	
dix-deux (*duodecim*, douze);	
dix-trois (*tredecim*, treize);	
dix-quatre (*quatuordecim*, quatorze);	
dix-cinq (*quindecim*, quinze);	
dix-six (*sexdecim*, seize);	
dix-sept;	
dix-huit;	
dix-neuf.	

Nous arrivons à *vingt*, que nous concevons comme un groupe composé, non plus par sommation, mais par reproduction, c'est-à-dire comme un *produit*, le *produit de dix par deux*. En plaçant à côté de ce *groupe-produit* les neuf premiers nombres, nous obtenons une seconde série de *groupes-sommes* (*vingt et un*, *vingt-deux*, *vingt-trois*, *vingt-quatre*, *vingt-cinq*, *vingt-six*, *vingt-sept*, *vingt-huit*, *vingt-neuf*), qui nous conduit à un second produit, au *produit de dix par trois*. Sans passer par tous les nombres intermédiaires, nous pouvons nommer la série des *groupes-produits* (jusqu'à *cent*) :

Une fois dix.
Deux fois dix ou vingt (il faudrait *duante* pour la reproduction de la série).
Trois fois dix ou trente.
Quatre fois dix ou quarante.
Cinq fois dix ou cinquante.
Six fois dix ou soixante.
Sept fois dix ou septante.
Huit fois dix ou octante.
Neuf fois dix ou nonante.

(Nous devons faire remarquer ici que notre langue n'a pas retenu la série régulière des groupes-produits telle que le latin nous la donne; nous disons *soixante-dix* au lieu de *septante*, *quatre-vingts* au lieu d'*octante*, et *quatre-vingt-dix* au lieu de *nonante*.)

Chacun des termes de l'échelle qui précède constitue un groupe dont nous avons une conception claire et distincte quoique médiate, parce que l'un des facteurs employés par la reproduction pour le former est le nombre dix, et l'autre facteur un nombre inférieur à dix. Il suffit maintenant de remplir l'intervalle entre deux termes quelconques de cette échelle, de la même façon que nous avons rempli l'intervalle entre *dix* et *vingt*, pour construire, à l'aide de la sommation et de la reproduction, tous les nombres qui existent depuis *un* jusqu'à *dix fois dix* ou *cent*.

Dix fois dix ou *cent* nous offre à l'esprit l'idée d'un groupe d'espèce nouvelle, d'un groupe formé par gradation : c'est la *seconde puissance de dix*. De nouveau, avec le nombre *cent* et à l'aide de la reproduction, nous formerons l'échelle suivante : *cent*, *deux cents*, *trois cents*, *quatre cents*....., jusqu'à un dernier terme *dix fois cent* ou *mille*, qui est la *troisième puissance de dix*; et nous remplirons sans peine l'intervalle entre les termes de cette nouvelle échelle, en plaçant à côté de chacun d'eux successivement tous les nombres compris entre *un* et *cent*. Ensuite, et toujours par l'algorithme de la reproduction, nous formerons l'échelle des *mille*, depuis *un mille* jusqu'à *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille*, en prenant pour facteurs, *mille d'une* part, et de l'autre successivement tous les nombres déjà formés et inférieurs à *mille*. Nous arriverons ainsi à *mille mille* ou *mille fois mille*, qui est la *seconde puissance de mille*. Enfin, la graduation nous donne l'échelle des puissances de *mille* : mille, million, milliard ou billion, trillion, quatrillion, quintillion, sextillion, septillion, octillion, etc.

On voit comment, par la combinaison des trois modes simples de génération des nombres, des trois algorithmes primitifs, sommation, reproduction, graduation, on obtient un mode complexe de génération, un algorithme dérivé, algorithme qui lequel repose véritablement la possibilité de l'*arithmétique*. Cet algorithme dérivé prend le nom de *numération*. Tout système de numération est un système conventionnel de combinaison des trois algorithmes primitifs. « On doit noter, dit M. Transon, la faute des auteurs qui débutent dans l'exposition de l'*arithmétique* par la numération. Sans doute, du moment qu'on a adopté un système particulier de numération, l'application des algorithmes primitifs reçoit de la nature de ce système des règles spéciales, parce que désormais l'*arithmétique* a pour but de ramener à ce particulier de numération, à cette loi déterminée de construction tous les nombres qui lui sont proposés. Mais il en demeure pas moins vrai que l'esprit humain ne peut former aucun système de numération, s'il ne connaît préalablement les modes élémentaires et primitifs de la génération des nombres. »

Si les algorithmes primitifs nous donnent les éléments de la numération, la forme régulière, systématique que reçoit la combinaison de ces éléments dans la numération parlée numérale est une application des lois qui régissent la comparaison des nombres. Une intelligence complète de la numération est impossible sans la connaissance des progressions. Nous y trouvons, en effet, progressions arithmétiques et progressions géométriques. La suite naturelle des nombres fournit un premier exemple de progression arithmétique dont la raison est l'*unité*. En voici d'autres exemples :

Dix, vingt, trente, quarante..... Raison *dix*.
Cent, deux cents, trois cents, quatre cents..... Raison *cent*.
Mille, deux mille, trois mille, quatre mille..... Raison *mille*, etc.

Ces diverses progressions arithmétiques se trouvent entre les termes de progressions géométriques. Celles-ci sont au nombre de deux : la première, dont la raison est *dix*, est, en quelque sorte, enveloppée par la seconde dont la raison est *mille* :

Un, dix, cent, mille, dix mille, cent mille, million..... Raison *dix*.
Un mille, million, billion, trillion..... Raison *mille*.

Numération écrite. S'il fut nécessaire, dès l'origine, d'avoir des noms pour les nombres, il ne fut pas moins nécessaire de combiner ces nombres entre eux, ou, comme on le dit, de *calculer*. Ce sont les nécessités du calcul qui ont fait inventer une numération écrite, c'est-à-dire une écriture numérale distincte de l'écriture ordinaire. Le système de numération que nous venons d'exposer obtient par l'emploi de signes *idéographiques*, c'est-à-dire représentant directement les nombres et non les mots qui servent à les dénommer, une perfection telle que le problème de la représentation numérique est résolu sans limites. Dix signes suffisent pour écrire tous les nombres possibles. D'abord on est convenu de donner aux neuf premiers nombres les caractères suivants :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

lesquels, évidemment, sont également propres à représenter les termes successifs de nos échelles de dizaines, centaines, mille, etc., pourvu qu'on ait soin de marquer d'une certaine façon l'échelle particulière dont on veut représenter un terme. A cet effet, on a inventé un dixième caractère, le caractère 0 (zéro), lequel n'a par lui-même aucune valeur, mais sert uniquement à marquer l'ordre, et par là même la grandeur convenue des unités exprimées par le chiffre qu'il accompagne. Ainsi, on a établi qu'un des neuf chiffres précédents, à la droite duquel un zéro serait placé, représentrait le terme correspondant de l'échelle des dizaines; qu'un chiffre avec deux zéros, représenterait des centaines; avec trois zéros, des mille, etc.; en un mot, qu'il représenterait des termes de dix en dix fois plus grands pour chaque nouveau zéro placé à sa droite. De cette façon, les neuf chiffres et le zéro suffisent pour écrire les termes de nos échelles indéfinies, qui ont en quelque sorte la charpente de notre système de numération :

1er ordre.	2me ordre.	3me ordre	4me ordre
1	10	100	1000
2	20	200	2000
3	30	300	3000
4	40	400	4000
5	50	500	5000
6	60	600	6000
7	70	700	7000
8	80	800	8000
9	90	900	9000, etc, etc.

Il ne nous reste plus qu'à savoir écrire les nombres qui renferment à la fois plus grandes que toutes ces échelles. Rien de plus simple : si le chiffre 5, dans 50, représente des dizaines, c'est qu'il est suivi d'un zéro, c'est qu'il occupe la seconde rang vers la gauche; mais il occuperait encore le second rang, et nous pourrions continuer de lui attribuer la même valeur relative, quand même le caractère qui le suit à droite ne serait pas un zéro. Par conséquent, on pourra substituer successivement au zéro qui est un des neuf signes caractéristiques des neuf premiers nombres, et on représentera de la sorte tous les nombres qui sont entre *cinquante* et *soixante*. Et comptant dans tous les intervalles de l'échelle des dizaines, on reconnaîtra que la représentation des nombres compris entre neuf et cent exige seulement *deux* signes. On reconnaîtra également que la représentation des nombres compris entre quatre-vingt-dix-neuf et mille exige seulement *trois* signes, etc., etc. En résumé, on pourra exprimer tous les nombres au moyen des neuf chiffres, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, pourvu qu'on attribue à ces caractères deux valeurs : l'une absolue, particulière à chacun d'eux; l'autre relative, déterminée par la place qu'ils occuperont, le zéro n'ayant d'ailleurs d'autre objet que de maintenir cette place. Tel est l'ingénieux système d'écriture arithmétique, appelé par Laplace, à dire vrai, la méthode d'exprimer tous les nombres avec dix caractères, en leur donnant à la fois une valeur absolue et une valeur de position, nous pouvons maintenant si simple que nous en sentons à peine le mérite; mais cette simplicité même et l'extrême facilité qui en résulte pour les calculs, placent notre système d'*arithmétique* au premier rang des inventions utiles. »

D'après ce qui précède, si l'on veut écrire en chiffres un nombre tel, par exemple, que *six mille cinquante*, on remarquera que ce nombre est composé de *cinq* unités, *deux* dizaines, *zéro* centaine et *six* mille; il sera donc exprimé par 6025. Réciproquement, pour énoncer un nombre qui est écrit en chiffres, il suffit de considérer que la numération écrite ne possède qu'une seule progression géométrique, dont la raison est *dix*, 1, 10, 100, 1000, 10000, etc., que cette progression est décimales : 1, 1/10, 1/100, 1/1000, etc. Il est clair qu'une deux progressions n'en font en réalité qu'une seule, laquelle est croissante en allant d'un côté, décroissante en allant de l'autre : c'est la même progression décuple prolongée au-dessous de l'unité :

Ex. : 100,000, 10,000, 1,000, 100, 10, 1, 1/10, 1/100, 1/1000, 1/10000, 1/100000, etc.

Rien de plus simple maintenant que de faire rentrer les fractions décimales dans le système général de la numération écrite. Comme ces fractions expriment nécessairement des *dixièmes*, des *centièmes*, des *millièmes*, c'est-à-dire des unités inférieures qui sont de dix en dix fois moins grandes les unes que les autres, et dont les dénominateurs forment une série régulière, on peut sous-entendre ces dénominateurs et se contenter d'écrire les numérateurs, en étendant la convention en vertu de laquelle tout chiffre placé à la droite d'un autre représente des unités dix fois plus petites que les unités représentées par cet autre chiffre. En conséquence, on admet qu'un chiffre placé à la droite du chiffre des unités simples représente des dixièmes, qu'un chiffre placé à la droite des dixièmes représente des centièmes, et ainsi de suite. Seulement, pour éviter toute confusion, on place une virgule entre le chiffre des unités et celui des dixièmes. Ainsi, le nombre 695 unités, plus 5 dixièmes, plus 8 centièmes, plus 3 millièmes, au lieu de s'écrire sous la forme ordinaire $695+5/10+8/100+3/1000$, s'écrira plus simplement 695,583. En outre, des zéros doivent marquer la place des unités absentes, absolument comme dans les nombres entiers. Ainsi, la fraction décimale 2 centièmes et 3 dix-millièmes s'écrirait, puisque les unités simples, les dixièmes et les millièmes, font défaut : 0,0203. Pour énoncer ce nombre 0,0203, il serait trop long de dire 2 centièmes et 3 dix-millièmes. Mais comme le *centième* vaut dix *millièmes* et cent *dix-millièmes*, on réduit dans l'énoncé tout en dix-millièmes, et l'on dit 203 dix-millièmes. De même, le nombre 695,583 s'énoncera 695 *unités*, 583 *millièmes*.

De la notion même des fractions décimales et de leur numération, il résulte que la valeur d'un nombre décimal ne change pas quand on écrit à sa droite un ou plusieurs zéros; que le déplacement de la virgule de 1, 2, 3, etc., rangs vers la gauche ou vers la droite rend un nombre décimal 10, 100, 1000 fois plus petit ou plus grand; qu'ainsi ce simple déplacement de la virgule permet de multiplier ou de diviser un nombre par dix ou un multiple de dix; que pour réduire au même dénominateur deux fractions décimales, il suffit de les réduire à un même nombre de chiffres, en ajoutant des zéros à la droite de celle qui en a le moins; que la grandeur d'une fraction décimale dépend principalement du rang et de la grandeur de son premier chiffre significatif.

Une condition reste à remplir pour étendre le même système de notation arithmétique à toutes les fractions possibles, c'est de pouvoir convertir toutes les fractions en décimales, c'est-à-dire en *dixièmes*, *centièmes*, *millièmes*, des *sixièmes*, etc., en *dixièmes*, *centièmes*, *millièmes*, etc. Cette conversion ne peut pas toujours s'effectuer d'une manière complètement exacte, mais il est toujours facile d'obtenir une approximation aussi grande que le calcul l'exige.

— *De la numération considérée d'une manière générale, ou des échelles arithmétiques.* On a pu voir que toute notre *arithmétique* roule sur le nombre *dix* et sur ses puissances, c'est-à-dire sur ce même nombre *dix* multiplié par lui-même; les autres nombres primitifs ne sont que les coefficients et les indices de ces puissances, en sorte que tout nombre est toujours un multiple ou une somme de multiples des puissances de *dix*. En effet, la progression géométrique 1, 10, 100, 1000, 10000, etc., n'est que la suite des puissances de dix $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4$, etc.; un nombre quelconque, par exemple *huit mille six cent quarante-deux*, n'est autre chose que $8\times10^3+6\times10^2+4\times10^1+2\times10^0$, c'est-à-dire une suite de puissances de *dix* multipliées par différents coefficients. Dans notre numération écrite, la valeur des places de droite à gauche répond d'une manière exacte à cette série uniforme $10^0, 10^1, 10^2, 10^3$, etc., ce qui permis de se contenter des coefficients et de sous-entendre cette suite de 10 aussi bien que les signes $+$, qui, dans toute collection de choses dénommées et comptées, peuvent être supprimés; en un mot, d'écrire simplement 3 642. Cette progression géométrique $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4$, etc., par laquelle se règle la valeur relative des chiffres que nous employons, est ce qu'on appelle l'échelle de notre *arithmétique*; *dix* est la racine ou base de cette échelle : de là son nom d'*échelle décimale*. Mais ce choix du nombre *dix* pour racine de notre échelle *arithmétique* est tout à fait arbitraire, et l'on aurait pu tout aussi bien adopter une autre échelle pour former un système de numération capable comme le nôtre de donner la construction de tous les nombres. Il est évident que, comme on compte jusqu'à neuf, après quoi on recommence en joignant le deuxième caractère au premier, et ensuite le second au second, puis le deuxième au troisième, etc., on pourrait, au lieu d'aller jusqu'à *neuf*, n'aller que jusqu'à *huit*, et de là recommencer, ou jusqu'à *sept*, ou jusqu'à *quatre*, ou même n'aller qu'à *deux*; par la même raison on pourrait aller au delà de *dix* avant de recommencer, comme jusqu'à *onze*, jusqu'à *douze*, jusqu'à *soixante*, jusqu'à *cent*. Tous les nombres peuvent s'écrire dans ces diverses échelles aussi bien que dans l'échelle décimale, et suivant les mêmes principes. La progression géométrique change; elle peut avoir pour raison 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, etc., au lieu de 10; mais il y a toujours une progression géométrique; en un mot, le principe de la valeur de position des chiffres est indépendant de l'échelle adoptée, et peut s'accommoder de toute autre. Autant d'échelles, autant de systèmes de notation numérique différents. L'échelle décimale, qui a pour racine *dix*, où l'on emploie *dix* caractères différents, nous donne : $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4$, etc. L'échelle *binaire*, qui a pour racine *deux*, où l'on n'emploie que *deux* caractères différents, nous donnera : $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$, etc.; l'échelle *quinaire* (racine *cinq*) : $5^0, 5^1, 5^2, 5^3, 5^4$, etc.; l'échelle *duodécimale* (racine *douze*) : $12^0, 12^1, 12^2, 12^3, 12^4$, etc. Dans l'*arithmétique* décimale, les chiffres significatifs ont une valeur de *dix* en *dix* fois plus grande, selon qu'ils occupent des places plus reculées à la gauche du chiffre des unités; dans l'*arithmétique* duodécimale, cette valeur sera de *douze* en *douze* fois plus grande, de *cinq* en *cinq* fois plus grande dans l'*arithmétique* quinaire, et seulement de *deux* en *deux* fois plus grande dans l'*arithmétique* binaire. Le même signe 10 se traduira différemment dans la numération parlée suivant le système de notation où il figure; dans l'*arithmétique* décimale, il signifiera *dix*; dans l'*arithmétique* duodécimale, *douze*; dans l'*arithmétique* quinaire, *cinq*; dans l'*arithmétique* binaire, *deux*. Le signe 100 signifiera, dans l'*arithmétique* décimale, *cent*; dans l'*arithmétique* duodécimale, *cent quarante-quatre*; dans l'*arithmétique* quinaire, *vingt-cinq*; dans l'*arithmétique* binaire, *quatre*.

L'échelle binaire est la plus simple; elle permet d'exprimer tous les nombres avec les deux seuls caractères 0 et 1; le signe 1 représente, suivant la place qu'il occupe, et l'unité simple et tous les groupes binaires $2^1, 2^2, 2^3, 2^4$, etc.; et le signe 0 marque la place des groupes absents, de sorte qu'on a :

Système binaire.	Système décimal.
1 correspondant à. . . .	1
10 —	2
11 —	3
100 —	4
101 —	5
110 —	6
111 —	7
1000 —	8
1001 —	9
1010 —	10
1011 —	11
1100 —	12
1101 —	13
1110 —	14
1111 —	15
10000 —	16, etc.

L'*arithmétique* binaire offre cet avantage que les opérations les plus compliquées n'y présentent aucune difficulté, parce qu'on n'emploie jamais que sur l'unité, et que par conséquent les multiplications et les divisions peuvent s'effectuer aussi facilement que les additions et les soustractions. Mais cet avantage est annihilé par l'inconvénient du grand nombre de figures qu'il faut employer pour exprimer des nombres, même très-petits (*mille*, par exemple, exige déjà dix figures : 1111101000).

Ce défaut d'une expression trop longue, trop étendue, accompagné trop de place, existe dans toutes les échelles inférieures à l'échelle décimale. Pour exprimer le nombre *cent*, il faut quatre caractères dans l'échelle quartenaire, 1210; cinq dans l'échelle trinaire, 10201. Plus les échelles s'élèvent, c'est-à-dire plus on y emploie de caractères différents, moins les nombres tiennent de place; dans l'échelle centenaire, deux caractères (10) suffiraient pour exprimer le nombre *cent*; trois caractères (100) pour exprimer le nombre *dix mille*. L'inconvénient des longues échelles, c'est l'effort que demande à la mémoire l'emploi d'un trop grand nombre de caractères, et la difficulté qui en résulte pour la pratique du calcul, pour les additions et les soustractions, surtout pour les multiplications et les divisions. D'ailleurs une échelle arithmétique pouvant être considérée comme une mesure, on comprend que cette mesure doive être proportionnée à notre propre grandeur, à nos mouvements, aux distances que nous pouvons parcourir. Vouloir se servir d'un grand nombre pour racine de notre échelle d'usage, ce serait vouloir mesurer à la lieue la longueur d'un appartement.

De toutes les échelles arithmétiques, quelle est la plus commode, quelle est cette qu'on aurait dû préférer? c'est sans contredit l'échelle duodécimale ou duodénaire, en raison des avantages qu'elle offre pour la division. « Une *arithmétique*, dit Buffon dans son *Essai d'arithmétique morale*, dont l'échelle aurait été le nombre douze pour racine, aurait été bien plus commode que notre *arithmétique* décimale; les grands nombres auraient occupé moins de place, et en même temps les fractions auraient été plus rondes. Les hommes ont si bien senti cette vérité, qu'après avoir adopté l'*arithmétique* décuple, ils ne laissent pas que de se servir de l'échelle duodénaire; on compte souvent par douzaines, par douzaines de douzaines ou grosses; le pied est dans l'échelle duodénaire la première puissance de la ligne, le pouce la seconde puissance. L'année se divise en douze mois, le jour en douze heures, le sou en douze deniers; toutes les plus petites et les dernières mesures affectent le nombre douze, parce qu'on peut le diviser par *deux*, par *trois*, par *quatre* et par *six*; au lieu que dix ne peut se diviser que par *deux* et par *cinq*, ce qui fait une différence essentielle dans la pratique pour la facilité des calculs et des mesures. Il ne faudrait dans cette échelle que deux caractères de plus, l'un pour marquer *dix*, et l'autre pour marquer *onze*; au moyen de quoi l'on aurait une *arithmétique* bien plus aisée à manier que notre *arithmétique* ordinaire... Il serait fort à souhaiter qu'on voulût substituer cette échelle à l'échelle décuaire... De très-grands avantages résulteraient de ce changement; le toisé, l'arpentage et tous les arts de mesure, où le pied, le pouce et la ligne sont employés, deviendraient bien plus faciles, car ces mesures se trouveraient dans l'ordre des puissances de douze, et, par conséquent, feraient partie nécessaire de l'échelle, et partie qui sauterait aux yeux; tous les arts et métiers où le tiers, le quart et le demi-tiers se présentent souvent, trouveraient plus de facilité dans toutes leurs applications; ce qu'on gagnerait en *arithmétique* se pourrait compter au centuple de profit pour les autres sciences et pour les arts... Mais à moins d'une refonte générale dans les sciences, il n'est guère permis d'espérer qu'en chaque jamais notre *arithmétique*, parce que toutes les grandes pièces de calcul, les tables des tangentes, des sinus, des logarithmes, etc., sont faites sur l'échelle décuaire, et que l'habitude d'*arithmétique*, comme l'habitude de toutes les choses qui sont d'un usage universel et nécessaire, ne peut être réformée que par une loi qui abrogerait l'ancienne coutume et contraindrait les peuples à se servir d'une nouvelle méthode. » Le grand obstacle au changement dont parle Buffon est dans le rapport qui lie la numération écrite à la numération parlée; il est impossible d'introduire l'échelle duodécimale dans la notation des nombres en conservant l'échelle décimale dans la nomenclature; or, changer la nomenclature des nombres, c'est créer, en quelque sorte, pour toute une catégorie d'idées, et d'idées usuelles, primitives, un langage nouveau et complétement indépendant de toute tradition. Buffon a très-bien vu que le système de la numération, ou la marche de la mesure numérique, et le système des mesures concrètes, géométriques, devaient être en harmonie l'un avec l'autre; mais, s'il était théoriquement préférable de rendre la numération conforme au système des mesures, il paraît pratiquement plus sage de rendre le système des mesures conforme à la numération.

Examinons maintenant comment on transporte un nombre d'une échelle arithmétique dans une autre. Tout nombre, dans une échelle donnée, peut être exprimé par une suite :

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+dx^{n-3}\text{ etc.},$$

x représente la racine de l'échelle arithmétique; a la plus haute puissance de cette racine; a, b, c, d sont les coefficients ou les signes de la quotité. Par exemple, 1738 dans l'échelle décimale, donnera

$$x=10,\ n=3,\ a=1,\ b=7,\ c=3,\ d=8;$$

en sorte que

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+dx^{n-3}$$

sera

$$1\times10^3+7\times10^2+3\times10^1+8\times10^0$$
$$1000+700+30+8=1738.$$

L'expression de ce même nombre, dans une autre échelle arithmétique, sera

$$m(x\pm y)^n+p(x\pm y)^{n-1}+q(x\pm y)^{n-2}$$
$$+r(x\pm y)^{n-3}+s(x\pm y)^{n-4}\text{ etc.};$$

y représente la différence des racines des deux échelles; elle est donnée par notre énoncé que x. On détermina la valeur de v en divisant le logarithme du nombre proposé $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+dx^{n-3}$ par le logarithme de $x\pm y$. Pour déterminer les coefficients m, p, q, r, il n'y aura qu'à diviser le nombre proposé par $(x\pm y)^n$, et faire m égal au quotient en nombres entiers; ensuite diviser le reste par $(x\pm y)^{n-1}$, et faire p égal au quotient en nombres entiers, et de même diviser le reste par $(x\pm y)^{n-2}$, et faire q égal au quotient en nombres entiers, et ainsi de suite jusqu'au dernier terme.

Par exemple, si l'on demande l'expression, dans l'échelle arithmétique quinaire, du nombre 1738 de l'échelle décimale

$$x=10,\ y=-5,\ ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}$$
$$+dx^{n-3}=1738,\ x=y-5;$$

d'où

$$v=\frac{\log.\ 1738}{\log.\ 5}=4\text{ en nombres entiers.}$$

Je divise 1738 par 5^4 ou 625, le quotient en nombres entiers est $2=m$; puis je divise le reste 488 par 5^3 ou 125, le quotient en nombres entiers est $3=p$; ensuite, je divise le reste 113 par 5^2 ou 25, ce qui donne au quotient $4=q$; je divise de même le reste 13 par 5, le quotient est $2=r$; enfin, une dernière division, celle du reste 3 par 5^0 ou 1 donne $3=s$: aussi le nombre 1738 de l'échelle décimale, traduit dans l'échelle quinaire, aura pour expression 23423.

Si l'on demande l'expression du même nombre 1738 de l'échelle décimale dans l'échelle duodécimale, on aura

$$x=10,\ y=2,\ ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}$$
$$+dx^{n-3}=1788,\ x+y=12;$$

d'où

$$v=\frac{\log.\ 1738}{\log.\ 12}=3\text{ en nombres entiers.}$$

Je divise 1738 par 12^3 ou 1728, le quotient en nombres entiers est $1=m$; ensuite, je divise le reste 10 par 12^2, le quotient est $0=p$; de même, je divise ce reste 10 par 12^1, le quotient est encore $0=q$; enfin, je divise encore ce reste 10 par 12^0, le quotient est $10=r$; le nombre 1738 de l'échelle décimale sera donc 100K dans l'échelle duodécimale, en supposant que le caractère K exprime le nombre 10.

Si l'on demande l'expression de ce nombre 1738 dans l'échelle binaire, on aura $y=-8$,