$x-y=2$, $v=\frac{\log.\ 1738}{\log.\ 2}=10$ en nombres entiers.
1738 divisé par 2^{10} ou 1024 donne pour quotient $1=m$, et pour reste 714; ce reste 714 divisé par 2^9 ou 512, donne pour quotient $1=p$, et pour reste 202; ce reste 202 divisé par 2^8 ou 256 donne pour quotient $0=q$; le même reste 202, divisé par 2^7 ou 128, donne pour quotient $1=r$, et pour reste 74; ce reste 74, divisé par 2^6 ou 64, donne pour quotient $1=s$, et pour reste 10; ce reste 10, divisé par 2^5 ou 32, donne pour quotient $0=t$; le même reste 10 divisé par 2^4 ou 16 donne $0=u$; le même reste 10 divisé par 2^3 ou 8 donne pour quotient $1=w$, et pour reste 2; ce reste 2 divisé par 2^2 ou 4 donne $0=z$; le même reste 2 divisé par 2^1 donne $1=l$; enfin, le reste 0 divisé par 2^0 ou 1 donne $0=n$. Donc le nombre 1738 de l'échelle décimale sera 11011001010.

On voit que la formule $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+dx^{n-3}$, etc. $=m\,(x\pm y)^v+p\,(x\pm y)^{v-1}+q\,(x\pm y)^{v-2}+r\,(x\pm y)^{v-3}+s\,(x\pm y)^{v-4}$, etc., permet de ramener une échelle arithmétique quelconque à telle autre échelle que l'on veut.

VI. — HISTOIRE DE L'ARITHMÉTIQUE. Le fait primitif que nous offre l'histoire de l'*arithmétique* est l'emploi à peu près universel de l'échelle décimale dans la numération parlée. Ce fait avait déjà frappé l'attention d'Aristote. « Pourquoi, dit-il dans ses *Problèmes*, tous les hommes, tant barbares que Grecs, comptent-ils jusqu'à *dix* et non pas jusqu'à quelque autre nombre comme 2, 3, 4 ou 5, et pourquoi ne reprennent-ils pas alors la série des nombres en disant *un et cinq, deux et cinq*, comme ils disent *un et dix, deux et dix?* Et pourquoi, s'arrêtant au nombre *dix*, recommencent-ils à compter en reprenant la série au delà de ce nombre?... Ce n'est certainement pas par hasard, ajoute-t-il, que les hommes agissent ainsi, là comme en toutes choses; car ce qui se produit partout et toujours n'est point un effet du hasard, mais un fait naturel. » Puis viennent les hypothèses : « Est-ce parce que le nombre *dix* est un nombre parfait; car il contient tous les genres de nombres, le pair et l'impair, le carré et le cube, le linéaire et le superficiel, le premier et le composé? Est-ce parce que le nombre *dix* est le principe des nombres, puisque 1 plus 2, plus 3, plus 4, constituent la décade? Est-ce parce qu'il existe neuf corps mobiles?... N'est-ce pas plutôt parce que tous les hommes *possèdent naturellement dix doigts*, parce que, *possédant ainsi les signes d'un nombre qui leur est propre, ils y rapportent tous les autres?* » Au XVIIIe siècle, Buffon se pose la même question, dans son *Essai d'arithmétique morale;* il s'arrête à la dernière hypothèse d'Aristote : « Pourquoi, dit-il, a-t-on préféré le nombre *dix* comme racine de notre échelle arithmétique aux autres nombres, dont chacun pouvait être, aussi bien que le nombre *dix*, la racine d'une échelle arithmétique? On peut imaginer que c'est la conformation de la main qui a déterminé ce choix, plutôt qu'une connaissance de réflexion. L'homme a d'abord compté par ses doigts; le nombre *dix* a paru lui appartenir plus que les autres nombres, et s'est trouvé plus près de ses yeux. » Comme Buffon, Condillac met sur le compte de nos mains l'emploi de l'échelle décimale. « La nature, dit-il, en nous formant des mains, nous a donné les premières notions de calcul. Nous n'avons que *dix* doigts. C'est par cette raison qu'ayant porté la numération jusqu'à *dix*, nous recommençons en prenant *dix* pour une unité, et nous n'avons plus qu'à continuer pour former une suite qui pourra toujours croître. »

Des recherches faites par Alexandre de Humboldt, par M. Pott, etc., il résulte qu'en réalité il y a eu trois systèmes de numération primitifs : le système *quinaire*, le système *décimal* et le système *vigésimal*. Ces trois systèmes de numération, qui ont coexisté à l'origine, ont fini par se fondre plus ou moins complétement dans le système décimal, mais en laissant quelques vestiges de leur existence primitive. La langue française actuelle nous offre dans le terme *quatre-vingts* un débris de l'ancien système vigésimal; et ce débris, unique aujourd'hui, s'y accompagnait jadis de plusieurs autres, comme le prouvent les termes *six-vingts, huit-vingts, quinze-vingts*, aujourd'hui tombés en désuétude. Les Etrusques et les Romains avaient des signes particuliers V, L, D, pour indiquer les nombres *cinq, cinquante* et *cinq cents;* ce qui nous montre une combinaison particulière des systèmes quinaire et décimal. Ailleurs, le système vigésimal existe seul et sans être accompagné d'un système quinaire ou dénaire. Chez les Aztèques du Mexique, les unités sont représentées par des *clous;* une *plume* représente le nombre vingt; une *plume* dont le tuyau est rempli de *poudre d'or*, la deuxième puissance de 20 ou 400; un petit *sac* avec *huit mille amandes de cacao*, la troisième puissance de 20 ou 8000.

Ce choix primitif, nous ne dirons plus de l'échelle décimale, mais des trois échelles quinaire, décimale et vigésimale, n'a pu être, comme le dit très-bien Aristote, l'effet du hasard, le résultat d'une convention arbitraire; car le hasard aurait certainement produit une bien plus grande variété dans les systèmes primitifs de numération. C'est avec raison aussi que Buffon refuse d'y voir le produit d'une *connaissance de réflexion;* car la langue de l'*arithmétique* a nécessairement précédé l'étude des propriétés des nombres, et l'on peut croire que si des mathématiciens avaient fait cette langue, ils auraient préféré l'échelle duodécimale à toute autre. Donc ce choix a été spontané et naturel; la cause qui l'a déterminé doit être cherchée non dans le nombre abstrait, mais dans le nombre concret; cette cause ne peut être que l'organisation humaine. Les doigts de nos mains, de nos pieds, forment des quotités, des collections naturelles, des quotités, des collections *qui sont propres à l'homme, qu'il a constamment sous les yeux*, et auxquelles il est naturel qu'il compare toutes les autres quotités. Les travaux modernes sur l'origine des langues ont établi la réalité de cette cause et élevé à la hauteur d'un fait historique ce qui a été longtemps considéré comme une simple hypothèse. « Nous pouvons affirmer aujourd'hui, dit M. Dareste, que le corps de l'homme a été le point de départ des trois systèmes de numération qui ont constitué la numération parlée, de même qu'il a fourni les premières mesures. Les doigts, qui ont été les premiers instruments de l'*arithmétique*, ont réglé par leur nombre les intervalles qui ont séparé à des distances égales les divers termes de la suite des nombres; et c'est ainsi que sont nés les systèmes quinaire, décimal et vigésimal, parce que l'on a compté tantôt les doigts d'une seule main, tantôt ceux des deux mains, tantôt, enfin, ceux des deux mains et des deux pieds. » Ce qui prouve que la préférence accordée aux nombres *cinq, dix* et *vingt* n'a pas d'autre origine, ce sont les dénominations mêmes des nombres cinq et dix. Il existe encore aujourd'hui beaucoup de peuples chez lesquels *une main* veut dire cinq, et *deux mains* dix. Dans la langue persane, le même mot *pentcha* ou *pantcha* (évidemment parent du *penté* grec et du *quinque* latin) veut dire à la fois *cinq* et *main*. Dans la langue *chibcha*, que parlaient les Muyscas, les nombres onze, douze, etc., s'exprimaient par les mots *pied un, pied deux*, etc. (*quihicha ata, quihicha bosa*, etc.).

Ainsi, la linguistique nous révèle d'une manière positive l'origine de notre numération parlée; nous comptons par dix, parce que la nature nous a donné dix doigts; nous compterions par douze, si elle nous avait donné douze doigts; il est vraiment fâcheux que nous n'ayons pas trouvé dans notre conformation le type de ce dernier système, qui est plus parfait et plus digne de la science. — Il est fâcheux, répond Ch. Fourier, que les peuples, dans le choix d'une échelle arithmétique, n'aient pas su reconnaître et suivre les véritables indications de la nature; car s'ils ont fait fausse route, ce n'est pas à la nature qu'il faut s'en prendre; elle n'est pas, comme on le prétend, complice du système décimal; la vérité est, au contraire, que nos mains sont positivement et exclusivement conformées pour la numération par douze. L'homme primitif aurait dû voir que ses doigts ne sont pas des unités semblables, des unités de même *grade;* qu'il en a *quatre* composés de *trois* phalanges, et un cinquième, le pouce, doigt *opposé*, doigt *pivotal*, destiné, dans la numération digitale, aux fonctions de compteur ou numérateur; qu'il pouvait d'abord et très-simplement marquer sur les douze phalanges d'une main les douze premiers nombres; que l'autre main lui offrait les douze termes de l'échelle des douzaines; en un mot, qu'il pouvait, avec ses pouces, compter sur ses mains jusqu'à *treize* fois *douze*, ce qui fait, dans le système décimal, *cent cinquante-six*. Malheureusement, l'homme primitif n'a pas vu cela : il a compté ses doigts sans mettre à part le pouce; il les a comptés avant de compter ses phalanges, sans doute parce que ses doigts formaient, à ses yeux, des unités plus distinctes, et voilà pourquoi *dix* est la racine de notre échelle arithmétique.

On a vu que notre système de numération parlée tire son origine du calcul digital, qui fut le premier calcul, comme le langage d'action fut le premier langage. Mais il est facile de comprendre que ce premier calcul, qui s'est conservé chez un grand nombre de peuples, devait être d'un emploi fort restreint. D'autre part, le calcul avec les noms, le calcul mental, c'est-à-dire à l'aide de la seule mémoire, de la seule numération parlée, ne pouvait, à moins de facultés exceptionnelles, s'appliquer à des combinaisons de nombres un peu élevés. De là la nécessité, qui dut être sentie de très-bonne heure, de chercher, pour exprimer les nombres, des signes matériels plus nombreux et plus faciles à manier que les doigts, et qui, comme les doigts, parlant aux yeux au lieu de s'adresser aux oreilles, permissent d'embrasser simultanément les diverses combinaisons numériques, rendissent permanente la suite des calculs, et fissent toujours voir ce qu'on avait fait et ce qui restait à faire. C'est ainsi que les Péruviens appliquèrent à l'expression des nombres des nœuds pratiqués sur des rubans et appelés *quipos*. Ailleurs on se servit de grains de blé. Mais les objets que l'on employa le plus généralement furent des cailloux ou de petites pierres, et c'est même là l'origine des divers termes dont on se servit pour les opérations arithmétiques (*pséphos*, en grec; *calculus*, en latin). « Notre mémoire, dit Condillac, nous permet d'opérer facilement sur de petits nombres; mais comment, par exemple, multiplier *trois dizaines de mille, plus deux mille, plus huit cents, plus sept dizaines, plus cinq unités*, par *neuf mille, plus six cents, plus quatre dizaines, plus trois unités*. Les doigts ne seraient ici d'aucun secours, parce qu'il ne leur serait pas possible d'exprimer distinctement et à la fois deux nombres aussi composés; et cependant il faudrait que toutes les parties en fussent en même temps sous les yeux. Ce serait le seul moyen de soulager la mémoire, et tous les peuples l'ont senti. En conséquence, ils ont substitué aux doigts des signes plus commodes : tels sont les cailloux, d'où dérive le mot *calcul*. » Plus loin, l'auteur de la *Langue des calculs* expose comment il conçoit la manière d'employer les cailloux dans les opérations arithmétiques. « Traçons, dit-il, sur une table, une suite de lignes verticales et plaçons des cailloux sur chacune : sur la première, les cailloux signifieront des unités du premier ordre; sur la seconde, des unités du second ordre; sur la troisième, des unités du troisième ordre, etc. Et s'il y a des ordres d'unités qu'un nombre ne contienne pas, il y aura des rangs où l'on ne mettra point de cailloux. Par exemple, pour exprimer *cent deux*, on mettra deux cailloux sur la première ligne, un sur la troisième et point sur la seconde. Lorsque par ce moyen nous aurons exprimé plusieurs nombres, il sera facile d'en faire l'addition, puisque nous n'aurons qu'à faire un tas de tous les cailloux qui se trouveront dans des rangs correspondants. La soustraction ne sera pas plus difficile : il suffira d'ôter de chaque rang du plus grand nombre autant de cailloux qu'il y en aura dans chaque rang correspondant du plus petit. Enfin, on ne trouvera pas de grandes difficultés dans la multiplication et dans la division. »

Cette conception de Condillac a été réalisée dans plusieurs pays, et elle a conduit à la construction d'instruments particuliers, de véritables machines à calcul. Entre la numération parlée et la numération écrite se place l'emploi de ces instruments, le calcul au moyen d'unités matérielles, ce qu'on peut appeler avec Humboldt la *numération palpable*. Les populations de l'extrême Orient, comme les Chinois et les Tartares, possèdent, depuis un temps immémorial, une machine à calcul, le *souwan pan*, qui est encore aujourd'hui constamment employée pour les besoins du commerce et de l'administration. C'est un cadre oblong renfermant plusieurs rangées de boules mobiles sur des fils tendus dans l'intérieur du cadre et disposés perpendiculairement à sa longueur; cette machine, que les marchands chinois manœuvrent avec une merveilleuse rapidité, a été importée en Russie par les conquérants mongols vers la fin du moyen âge. Les Russes colorent diversement les boules qui représentent les unités, les dizaines, les centaines. Le général Poncelet, pendant sa captivité en Russie, apprit à connaître cette machine, nommée *tchotu*, et l'apporta en France. D'après les indications de M. Poncelet, on a, depuis, employé le *boulier* (c'est le nom français du *tchotu* russe, du *souwan pan* chinois) dans les salles d'asile pour familiariser les enfants avec les premiers éléments de l'*arithmétique*. La machine à calcul des Chinois a, de tout temps, été fondée sur le système décimal : une boule de la deuxième ligne vaut dix boules de la première, une boule de la troisième dix boules de la seconde.

Les anciens Etrusques avaient de leur côté imaginé une machine à calcul tout à fait semblable, quant à son principe, au *souwan pan* chinois. Cet instrument, désigné sous le nom d'*abax* ou d'*abacus*, n'était autre chose qu'une table divisée en un certain nombre de colonnes parallèles, dont la première était affectée aux unités, tandis que les suivantes étaient affectées aux dizaines, centaines, etc. Les calculs s'y faisaient ordinairement avec de petites pierres ou plus tard des jetons qui indiquaient les unités, et dont la valeur changeait d'après le numéro de la colonne dans laquelle elles étaient placées. Dans les abaques perfectionnés on pratiquait les calculs en faisant glisser des boutons dans une rainure. Pour chaque ordre d'unités il y avait cinq boutons, dont les quatre premiers valaient chacun une unité, tandis que le cinquième en valait cinq. Les rainures des unités décuples étaient marquées des lettres numérales de la numération romaine I, X, C, M. L'abaque fut transmis par les Etrusques aux Romains, qui l'employèrent dans toutes leurs opérations arithmétiques. A défaut d'abaque on se servait d'une table couverte de sable, sur laquelle on figurait des colonnes verticales parallèles, représentant les divisions de l'abaque, et l'on traçait sur le sable des caractères représentant les nombres. On employait aussi des jetons qui représentaient les unités et que l'on disposait sur une table en lignes parallèles figurant les colonnes verticales de l'abaque. Plusieurs exemplaires de l'abaque romain nous sont parvenus. Il en existe un au cabinet des antiques de la Bibliothèque impériale. L'abaque à rainures avec des boutons enfilés, la table couverte de poussière et l'emploi des jetons, qui n'étaient que des imitations de l'abaque, furent transmis par les Romains aux populations néo-latines, et se perpétuèrent jusqu'à une époque très-rapprochée de la nôtre. Pascal et Mme de Sévigné au XVIIe siècle, Buffon au XVIIIe, parlent du calcul au moyen de jetons comme d'un usage fort répandu. « Cette façon de compter (avec des jetons), lisons-nous dans l'*Arithmétique morale* de Buffon, est très-ancienne et elle ne laisse pas d'être utile; les femmes et tant d'autres gens qui ne savent ou ne veulent pas écrire aiment à manier des jetons. »

La numération parlée avait fourni l'expression orale de tous les nombres, grâce à la conception très-simple d'unités de différentes grandeurs régulièrement échelonnées; le caractère saillant de la numération palpable fut de marquer, de traduire aux yeux, au toucher cette différence de *grandeur* des unités, d'une manière, en quelque sorte, géométrique, c'est-à-dire par une différence de *position*. Il faut remarquer qu'en cette circonstance, on avait à choisir entre la différence de *position* et la différence de *forme;* mais le premier moyen était évidemment de beaucoup le plus simple; il se prêtait bien mieux aux besoins de tous et de tous les jours, parce qu'il permettait de s'accommoder indifféremment de toute espèce d'unités matérielles, et qu'il n'imposait à l'esprit, à la mémoire, qu'une seule convention. Longtemps employée pour tous les calculs arithmétiques que les nécessités de la vie imposent chaque jour, la numération palpable n'a pu être définitivement vaincue, détrônée que par un système de numération écrite qui, reposant sur le principe de la valeur de position des signes numériques, peut être considéré, suivant la remarque de Humboldt, comme la traduction graphique de l'abaque ou du *souwan pan*.

Passons à l'histoire de la numération écrite. Une question se présente tout d'abord : quelle est l'origine des signes numériques? « Les signes numériques, répond M. Dareste, nous présentent ce curieux caractère d'être les seuls débris persistants de ces anciennes écritures hiéroglyphiques dont nous avons tant de peine à retrouver le sens, et qui présentent aujourd'hui de si curieuses énigmes aux personnes qui s'occupent des premiers temps de l'histoire. Tandis que la plupart des hiéroglyphes disparaissaient complétement, ou peut-être se transformaient complétement en signes phonétiques ou alphabétiques, c'est-à-dire en lettres, les signes de nombres, au contraire, se sont partout conservés, et ils ont perpétué leur existence jusqu'à nos jours, sans que la nature propre, c'est-à-dire la signification, s'en soit aucunement modifiée. » M. Dareste développe très-bien les raisons qui expliquaient et nécessitaient la conservation des hiéroglyphes numériques. Pour exprimer un nombre peu élevé dans l'écriture hiéroglyphique, il suffisait d'un signe unique; tandis que pour obtenir le même résultat dans l'écriture phonétique, il fallait évidemment l'emploi de plusieurs signes. De plus, le signe qui exprime un nombre dans l'écriture hiéroglyphique est un signe spécial et qui ne peut pas être confondu avec d'autres, un signe qui ne représente que le nombre même et non les sons et les articulations qui le désignent dans le langage; tandis que dans l'écriture phonétique les divers signes qui constituent les représentations du nom de nombre ne sont que ceux qui entrent dans la figuration d'un mot quelconque. La pratique du calcul surtout exigeait impérieusement la conservation des signes hiéroglyphiques des nombres. Calculer, en effet, c'est combiner des nombres, c'est-à-dire des idées d'une nature spéciale. Pour combiner des idées, il était beaucoup plus facile de combiner des signes d'idées que de combiner les signes des mots qui traduisent ces idées.

Examinons maintenant les systèmes de numération écrite, c'est-à-dire de combinaisons d'hiéroglyphes employés par les différents peuples pour écrire les nombres. L'ancienne écriture hiéroglyphique des Egyptiens ne contenait qu'un petit nombre de signes numériques; il n'y en avait que pour chaque espèce d'unité. Un nombre quelconque étant formé par la réunion d'un certain nombre d'unités de diverses espèces, il fallait pour l'exprimer répéter le signe de chaque espèce d'unité autant de fois que ce nombre l'exigeait. Les unités simples étaient représentées par autant de *lignes verticales;* les dizaines l'étaient par des *cercles entr'ouverts;* le cent était figuré par un signe qui rappelle une *feuille de palmier enroulée;* mille était une *fleur de lotus*, dix mille un *doigt recourbé*. Ce système de notation numérique, dans lequel, comme Humboldt en fait la remarque, on ne lit point les unités, mais où on les compte, était très-simple, et l'on conçoit très-bien qu'il ait dû précéder les autres. Il se retrouve chez les Romains, qui répétaient, comme on sait, les signes des unités simples (I), des dizaines (X), des centaines (C), des mille (M), pour marquer le nombre de chacune de ces espèces d'unités, et qui n'avaient d'autres signes spéciaux que pour *cinq* (V), *cinquante* (L) et *cinq cents* (D).

Le principe de la répétition des unités pouvait convenir pour les inscriptions; mais il se prêtait beaucoup moins à une écriture rapide ou cursive, et par suite à la pratique des calculs. On devait donc être conduit à inventer des signes spéciaux pour chacun des neuf premiers nombres. La numération écrite de la langue pehlvi nous offre la transition de l'un à l'autre système. Les quatre premiers nombres y sont constitués par quatre signes dont la forme générale est analogue : c'est un trait recourbé, mais qui présente à sa partie supérieure un nombre de dentelures égal au nombre des unités qui entrent dans la composition du chiffre. Les autres nombres, de cinq à neuf,

n'ont pas de signe particulier, et sont représentés par la combinaison des quatre premiers nombres. Ainsi, dans ce système, on écrit 2+3 (5), 3+3 (6), 3+4 (7), 4+4 (8), 3+3+3 (9).

Chez certains peuples, les signes phonétiques de l'écriture, ou les lettres, ont été employés comme signes numériques; c'est le mode de notation des peuples sémitiques (Phéniciens, Hébreux). Ici, ce n'est pas l'écriture hiéroglyphique qui se conserve dans la numération; ce sont les caractères de l'écriture alphabétique qui deviennent de véritables hiéroglyphes. Les Hébreux représentaient les neuf premiers nombres par les neuf premières lettres, les neuf termes de l'échelle des dizaines par les neuf lettres suivantes, et les centaines d'abord par les quatre dernières lettres, et ensuite par cinq lettres déjà employées, mais qui subissaient quelques variations de forme. Pour exprimer les mille, les dizaines de mille et les centaines de mille, on reprenait toutes les mêmes lettres dans le même ordre, mais en les surmontant par des points.

Les Grecs ont également employé, comme signes numériques, les lettres de leur alphabet, et en cela ils ont copié les Hébreux ou plutôt les Phéniciens, dont l'écriture était semblable à celle des Hébreux. Ce qui constate bien l'imitation, c'est que dans quelques endroits où leur alphabet manquait de la lettre qui est dans l'alphabet hébreu, les Grecs, plutôt que de passer immédiatement au caractère suivant, ont préféré y intercaler quelque signe nouveau. Ainsi, n'ayant point de lettre correspondante au *vau*, qui est la sixième des Hébreux, ils ont placé là une des formes de leur *sigma*, à laquelle ils ont donné le nom de *digamma*, comme ayant une valeur double du *gamma*, qui vaut trois; par ce moyen, leur *zeta* valut sept, de même que le *zain*, qui lui correspond chez les Hébreux. Ils placèrent aussi après la lettre *pi* un signe appelé *kappa*, qui est le *coph* des Hébreux. Enfin, pour accomplir le nombre de vingt-sept lettres, nécessaire pour exprimer les unités, les dizaines et les centaines, ils durent encore ajouter après leur *oméga* un autre signe, qui était formé par la combinaison du *sigma* et du *pi*, et qu'ils appelaient *sanpi*. Après l'échelle des centaines, dont le dernier terme (neuf cents) était marqué par le *sanpi*, on formait l'échelle des mille avec les neuf premières lettres de l'alphabet, prises dans le même ordre que pour les neuf premiers nombres, mais distinguées par un trait placé au-dessous de la lettre. Les Grecs avaient d'ailleurs très-bien remarqué le rapport qui existe entre α (1), ι (10), ρ (100) et α' (1000), comme entre β (2), κ (20), σ (200) et β' (2000), et ils avaient des mots pour exprimer la relation de ces nombres. Les simples unités étaient appelées les *fonds* (*puthmenes*) des nombres de dizaines, de centaines, de mille, et ces derniers s'appelaient les *analogues* de ceux auxquels ils correspondaient parmi les unités. Dans certains cas, on opérait sur les *fonds* au lieu d'opérer sur les *analogues*, après quoi on ramenait le résultat du calcul à celui qu'on aurait trouvé en opérant sur les *analogues* eux-mêmes, suivant les règles ordinaires de l'*arithmétique*. Avec les quatre groupes de signes dont nous avons parlé,

α, β, etc.,
ι, κ, etc.,
ρ, σ, etc.,
α', β', etc.,

la numération grecque n'allait que jusqu'à dix mille. Il fallait de nouveaux signes pour exprimer de plus grands nombres. On adapta la lettre M, initiale de *murioi* (dix mille), à la numération écrite. De là divers essais que nous rencontrons dans les écrits des mathématiciens. Eutocius, dans ses *Commentaires sur Archimède*, écrit le nombre des myriades au-dessus de la lettre M, par exemple, $\overset{\alpha}{M}$ (10000), $\overset{\beta}{M}$ (20000), etc. Diophante et Pappus écrivent à la suite du nombre des myriades les initiales Mυ, par exemple, αMυ (10000), βMα (20000), etc., ou même ils remplacent Mυ par un simple point. Même par ces moyens, on ne pouvait s'élever que jusqu'à *dix mille fois dix mille*, et il paraît bien, en effet, que telle était la limite de l'*arithmétique* vulgaire chez les Grecs. Nous devons dire que cette étendue leur suffisait de reste pour les besoins ordinaires, parce que leurs unités de compte, telles que le talent, le stade, étaient plus fortes que nos unités ordinaires.

Archimède donna à la numération grecque une extension qui permettait d'écrire tous les nombres sans être arrêté par aucune limite. Il imagina de prendre la myriade carrée (10000^2) pour une unité nouvelle, une unité de *second ordre*, qui donne naissance à de nouveaux nombres, jusqu'à celui qui contient dix mille myriades de ces nouvelles unités (10000^4). Comme tous les nombres inférieurs à dix mille myriades d'unités simples ou de *premier ordre* exigent au plus *huit* figures (quatre pour la partie inférieure à dix mille, et *quatre* pour le nombre des myriades), il s'ensuit que les nombres formés avec les unités de second ordre pourront contenir aussi, mais au plus, *huit* figures. De là le nom d'*octades* donné par Archimède à ces périodes. Dans ce système, la myriade carrée est l'unité de second ordre, la myriade élevée à la quatrième puissance, l'unité de troisième ordre, la myriade élevée à la sixième puissance, l'unité de quatrième ordre, etc.; chaque octade est séparée des autres par une virgule ou un trait, et écrite à la gauche de celle qui contient les unités de l'ordre immédiatement inférieur.

Apollonius simplifia le système d'Archimède, en observant qu'on pouvait se borner en réalité à des périodes de *quatre* figures, puisqu'aucun des nombres inférieurs à la myriade n'en exigeait davantage, et qu'en outre on était déjà habitué à marquer les myriades par les mêmes lettres que les unités simples, sauf quelque signe caractéristique, l'initiale M ou le point. Ainsi, pour Apollonius, les myriades étaient les unités de second ordre, les myriades carrées les unités de troisième ordre, les myriades élevées à la troisième puissance les unités de quatrième ordre. On voit que pour arriver à notre système moderne, il n'y avait que quelques pas à faire, en suivant ces idées d'Archimède et d'Apollonius; car toute la différence est que nos périodes à nous sont d'*une* seule figure, puisque ce n'est pas à la myriade carrée, ni même à la myriade, mais déjà à la dizaine que nous recommençons d'employer les mêmes caractères que pour les unités simples. « Il semble, dit Delambre, qu'après avoir réduit les octades d'Archimède en tranches qui n'avaient que *quatre* chiffres, Apollonius aurait dû essayer les tranches de *trois* chiffres, qui lui auraient permis de supprimer les lettres particulières et pointées pour les mille. Il aurait trouvé un avantage encore plus sensible en réduisant les tranches à deux chiffres, qui lui auraient épargné les lettres qui désignent les centaines; enfin, en réduisant les tranches à un chiffre, il épargnait les lettres des dizaines, et arrivait nécessairement à notre *arithmétique*. Il paraît, au contraire, n'avoir réduit les tranches de huit chiffres que pour rentrer dans les limites de l'*arithmétique* des Grecs, et pour que chacune de ces tranches ne contînt que les chiffres communément admis. » La numération écrite des Grecs avait un vice originel dont elle ne put se guérir, malgré l'effort de deux hommes de génie, c'était le nombre trop considérable des signes de nombres, et ce vice tenait à l'origine même de ces signes, c'est-à-dire à l'idée qu'on avait eue d'adapter à la représentation des nombres les caractères inventés pour représenter les articulations et les sons, au lieu de créer des signes spéciaux dont le nombre et l'emploi fussent en rapport avec la nature des choses qu'il s'agissait d'exprimer, c'est-à-dire avec le système de la numération parlée.

Nous venons d'exposer deux systèmes de numération écrite, celui de la *répétition des unités*, employé à Rome et dans l'écriture hiéroglyphique des Egyptiens, et celui des *lettres numérales*, particulier aux peuples sémitiques, et dont la numération grecque offre le type le plus parfait. Un troisième système, qui est en usage en Chine, au Japon, chez les populations tamiles de l'Indoustan, etc., et qu'on peut appeler système des *coefficients*, consiste dans l'adoption de deux espèces de signes, les uns pour les termes de la progression décuple, les autres pour les neuf premiers nombres servant de coefficients. Dans ce système, l'expression écrite d'un nombre est la somme d'une suite d'éléments composés de deux signes, dont l'un indique le terme de la progression décuple, et dont l'autre est le coefficient du précédent. C'est la traduction fidèle de la numération parlée : en effet, quand j'énonce le nombre *trois mille deux cent soixante* (*soixante* n'est pas autre chose que *six dix*), j'exprime la somme des trois éléments *trois mille, deux cents, soixante;* chacun de ces éléments est composé d'un coefficient et d'un terme de la progression décuple; c'est comme si je disais : *trois* × *mille* + *deux* × *cent* + *six* × *dix*. Dans la numération tamile, le coefficient est placé à gauche du nombre qu'il doit multiplier; dans la numération chinoise, on le place au-dessus ou au-dessous. Supposons qu'on ait le nombre 3 852 à écrire dans le système des coefficients, et qu'on adopte les chiffres arabes pour les coefficients, les chiffres romains pour les unités décuples, on aura 3M, 8C, 5X, 2I dans la numération tamile, et $\overset{3}{M}, \overset{8}{C}, \overset{5}{X}, \overset{2}{I}$ dans la numération chinoise.

Le système des coefficients conduisait tout naturellement à un quatrième système, qui est celui de notre numération écrite. Il est évident que, dans l'exemple qui précède, on peut, sans le moindre inconvénient, sous-entendre les signes M, C, X, I, et se contenter d'écrire les coefficients 3, 8, 5, 2, leur position respective suffisant pour indiquer le terme de la progression décuple que chacun d'eux multiplie. Ainsi le système des coefficients, traduction de la numération parlée, pouvait être heureusement simplifié. Au lieu de conserver deux espèces de signes, il suffisait d'accorder aux mêmes signes deux valeurs, valeur absolue, valeur de forme, valeur de coefficients d'une part, et de l'autre, valeur relative, valeur de position, valeur d'unités décuples. Ce fut dans l'Inde que prit naissance ce système de la double valeur des chiffres, qui portait la numération écrite à sa perfection; c'est dans la langue sanscrite que nous le voyons apparaître pour la première fois.

Ici se présente une question intéressante, celle de l'origine de nos chiffres actuels, qui sont devenus les chiffres de tous les peuples civilisés. Une tradition depuis longtemps accréditée en attribue l'introduction en Europe aux Arabes pendant le moyen âge; de là le nom de *chiffres arabes* qui leur est donné. On savait aussi depuis longtemps que les Arabes n'avaient point inventé leurs chiffres, mais qu'ils les avaient empruntés aux Indiens après la fondation du mahométisme. Ainsi nos chiffres nous seraient venus de l'Inde par les Arabes. Ce qui semble prouver tout à la fois cette origine et cette voie de transmission, c'est, d'une part, la ressemblance de nos chiffres avec les chiffres actuellement employés par les Arabes, et d'autre part la ressemblance de ces derniers avec les chiffres sanscrits connus sous le nom de *dêvanagaris;* c'est ensuite le nom arabe de zéro, *sifr* (vide) ou *sâhra sifr* (espace vide), qui n'est que la traduction de son nom sanscrit *sunya*, et qui nous donne l'étymologie de nos deux mots *chiffre* (sifr) et *zéro* (sâhra). Cependant déjà, au XVIIe siècle Vossius admettait, contrairement à l'opinion générale, que nos chiffres sont d'origine grecque et pythagoricienne. M. Vincent et M. Chasles, le savant géomètre, ont de nos jours repris l'examen de la question et la résolvent, comme Vossius, dans un sens différent de celui que nous étions habitués à considérer comme le seul qui fût donné par les faits. Le nœud du problème est l'existence de certains signes numériques nommés *apices*, que l'on trouve dans les manuscrits du célèbre ouvrage de Boëce sur la géométrie, signes qui, au dire de l'écrivain, auraient été usités dans l'école de Pythagore. Si nos chiffres européens, surtout dans leurs anciennes formes, présentent une grande analogie avec les chiffres employés par les Arabes, ils ressemblent davantage encore à ces *apices* de Boëce. Les travaux de M. Chasles ont d'ailleurs montré que l'arrangement de ces signes entre eux, ou ce qui constitue notre *arithmétique* de position, est parfaitement décrit dans l'ouvrage de Boëce. Ajoutons que d'autres témoignages viennent confirmer celui de Boëce. Porphyre rapporte qu'au dire du pythagoricien Moderatus, Pythagore employait, dans ses calculs et dans ses spéculations sur les propriétés des nombres, des signes spéciaux, une numération écrite tout à fait différente de celle des Grecs. Devons-nous voir dans les *apices* ces signes pythagoriciens restés enfouis dans les secrets de l'école, ou simplement, comme le pensent MM. Jomard et Pihan, des signes arabes que les copistes des manuscrits y auraient substitués? *Adhuc sub judice lis est.*

L'*arithmétique*, considérée comme art de calculer, étant tout entière dans sa langue, nous avons dû nous étendre longuement sur l'histoire de la numération. Il nous reste à dire que l'*arithmétique* scientifique (comparaison et théorie des nombres) fut créée par le génie de Pythagore. « Avant Pythagore, dit M. Laugel, il n'est nulle part question de l'*arithmétique* comme science : le calcul demeure chose banale, bonne seulement pour les marchands; après lui, la science des nombres envahit la musique et jusqu'à la métaphysique. » L'œuvre originale de Pythagore fut d'étendre et de féconder la science des nombres en l'appliquant, en l'unissant à la géométrie. Pythagore et son école distinguaient les *nombres premiers*, qu'ils nommaient *linéaires*, parce que n'ayant qu'un seul facteur, ils représentent géométriquement des longueurs; les *nombres-surfaces*, c'est-à-dire formés par le produit de deux facteurs; les *nombres corporels*, c'est-à-dire à trois dimensions, à trois facteurs. Ils connaissaient les nombres dits *quadratiques*, les nombres *triangulaires*, les nombres *pyramidaux*, etc. C'est par l'analyse des propriétés des nombres que Pythagore fut conduit à son fameux théorème géométrique du carré de l'hypoténuse. Remarquant que la somme de 9, carré de 3, et de 16, carré de 4, est égale à 25 carré de 5, il chercha l'interprétation géométrique de cette propriété sur le triangle rectangle dont les trois côtés sont égaux à 3, à 4 et à 5. Envisageant ensuite, par un procédé inverse, le théorème géométrique au point de vue arithmétique, il se trouva conduit aux racines des nombres qui ne sont point des carrés parfaits, c'est-à-dire aux quantités irrationnelles.

Après Pythagore et son école, l'histoire de l'*arithmétique* ne présente que deux faits importants : l'application de la numération décimale aux fractions, qui a donné à notre échelle arithmétique une partie qui lui manquait, et à nos calculs l'uniformité nécessaire pour les comparaisons immédiates, et l'invention des logarithmes, qui, en permettant de substituer des opérations simples et faciles à des opérations compliquées et quelquefois impraticables par leur longueur, a produit une véritable révolution dans le travail du calcul. Le système des fractions avait été conçu dans l'origine d'une façon tout indépendante du système même de la numération. Les fractions décimales ne furent imaginées que fort tard, suivant la plupart des auteurs, par l'astronome allemand Muller, plus connu sous le nom de Regiomontanus (XVe siècle); suivant M. Cournot, par le géomètre Stévin (XVIe siècle). D'après M. Biot, elles seraient dues, comme l'invention des logarithmes, à Néper (commencement du XVIIe siècle).

Arithmétique (SIX LIVRES D'), *Arithmeticarum rerum libri sex*, ouvrage de Diophante, mathématicien grec de l'école d'Alexandrie (350 de J.-C.). Cet ouvrage, auquel on fait généralement remonter l'origine de l'algèbre, était composé de treize livres, dont six seulement nous sont parvenus. Xylander en a publié une traduction latine médiocre et incomplète en 1575; en 1621, Bachet de Méziriac en donna une édition plus correcte, avec des commentaires qui sont estimés. Plus tard, le célèbre Fermat y ajouta de savantes notes, que son fils publia dans une édition nouvelle en 1670. Les six livres qui nous restent de Diophante traitent plutôt de ce que nous appelons aujourd'hui *théorie des nombres* que ce que nous appelons algèbre; ils contiennent une collection de questions difficiles sur les nombres carrés et cubes, et sur plusieurs autres propriétés des nombres. Dans une sorte d'introduction adressée à un Dionysius, pour lequel l'ouvrage paraît avoir été écrit, Diophante donne la nomenclature et la génération des puissances; il nomme les secondes puissances ou les carrés, *dynamis;* les troisièmes puissances, *cubus;* les quatrièmes puissances, *dynamo-dynamis;* les cinquièmes, *dynamo-cubus;* les sixièmes, *cubo-cubus*. Il exprimait une quantité inconnue par le mot *arithmos* (nombre), et la désignait dans la solution par la seule finale *os*. Dans ses recherches sur la multiplication, il observe que *moins* multiplié par *moins* produit *plus*, et que *moins* multiplié par *plus* produit *moins*. Le mérite principal de l'ouvrage de Diophante consiste dans l'habileté avec laquelle il résout les problèmes indéterminés, c'est-à-dire susceptibles d'une infinité de solutions, en évitant les valeurs irrationnelles.

Arithmétique (EXPOSITION DES RACINES DU CALCUL ET DE L'), ouvrage d'Avicenne. Le *Dictionnaire des sciences mathématiques* de Montferrier en donne un fragment curieux, qui nous apprend quelle idée les Arabes se faisaient de la science des nombres. Voici ce fragment qui sert d'introduction à l'ouvrage :

« Au nom de Dieu clément et miséricordieux.

» Louange à Dieu qui a créé l'univers et tous les êtres, qui a réglé par *poids* et par *mesures* toutes ses créations. Il a créé à la fois et fait sortir du néant les *nombres* et les *choses*, le *temps* et l'*espace*, et les diverses influences des nombres qui modifient l'espace et le temps. Il a doté l'homme, fils d'Adam, de la science des *nombres*, afin que, par les *nombres*, il pût conquérir la puissance des choses, et qu'il dominât le *temps* et l'*espace*, ces deux abîmes sans limites, lui qui occupe sur cette petite terre un *espace* si borné, lui dont le *temps* d'apparition dans cette vie inférieure est resserré dans des limites si étroites, au milieu de la mer immense des siècles se roulant les uns sur les autres. Et que la bénédiction du Dieu très-haut, du Dieu dont le nombre est *un*, soit sur le prophète chéri, sur Mahomet, dont la mission n'a eu lieu qu'au temps préfixé déterminé irrévocablement par les calculs sublimes de la Providence *unique*, et dont le nom a clos le *nombre* des prophètes élus de Dieu. Or donc, comprenant qu'à l'insu de l'homme il existe une puissance surnaturelle et indéfinissable dans les *nombres*, j'ai voulu composer cet opuscule. Que Dieu fasse miséricorde au pauvre auteur de ce petit livre, comme à ceux qui le liront et en feront bon usage. »

On voit que les mathématiques, c'est-à-dire la science exacte et positive par excellence, ont eu leur mysticisme, comme l'astronomie et la chimie. Pour Avicenne, de même que pour Platon et les pythagoriciens, les nombres n'ont pas seulement une valeur objective comme rapports généraux des choses, comme conditions générales des phénomènes; ils ont une existence propre et indépendante des choses; ils sont créés, ils ont des propriétés merveilleuses, une puissance surnaturelle et indéfinissable.

Après le préambule qu'on vient de lire, Avicenne entre en matière : « Sache d'abord que tout nombre, quel qu'il soit, n'est autre chose que le nombre 9 ou son multiple plus un excédant; car les nombres n'ont que 9 caractères, plus le point (zéro), qui lui-même n'exprime aucun nombre. Si tu parviens à connaître cet excédant et le multiplicateur novénaire, le nombre entier te sera connu. Tout multiple novénaire, ajoute-t-il, si tu additionnes ensemble horizontalement les lignes qui le composent sans faire attention à leur valeur de position, te donnera nécessairement le nombre 9, soit seul, soit extrait du total par la même opération. Ainsi,

18 donne $1+8=9$
27 . . . . $2+7=9$
36 . . . . $3+6=9$
45 . . . . $4+5=9$, etc.

Toutes les fois qu'additionnant ainsi les signes d'un nombre quelconque, tu trouveras 9 pour résultat de ton opération horizontale, sois assuré que c'est un multiple de 9; sinon, après avoir extrait ce nombre, il te restera un excédant variable de 1 à 8. Tout nombre composé de signes dissemblables change nécessairement de valeur si l'on change l'ordre des signes. Mais sache qu'entre le premier nombre et ceux qui résultent du changement de l'ordre des signes, il ne peut jamais y avoir pour différence que 9 ou un multiple de 9. Ainsi :

12 retourné fera . .	21 différ. 9	
42	24 . .	$18 = 2 \times 9$
85	58 . .	$27 = 3 \times 9$
357	375 . .	$18 = 2 \times 9$
	537 . .	$180 = 20 \times 9$
	573 . .	$216 = 24 \times 9$

De ces faits, qui dépendent du système de