

milieu de FF'. Si donc on pouvait construire le point F', il ne resterait qu'à mener du point T une perpendiculaire sur FF'; cette perpendiculaire, qui d'ailleurs passerait par le milieu I, de FF', serait la tangente cherchée. Mais le point F' doit être à une distance de F' égale à AA', et à une distance de T égale à FT; on l'obtiendra donc par l'intersection de deux circonférences décrites des points F' et T comme centres, avec AA' et FT pour rayons.

Ces deux circonférences se couperont toujours, si le point T est extérieur à l'ellipse. En effet, les conditions de rencontre de deux circonférences sont que, des trois longueurs égales à la distance des centres et aux deux rayons, chacune soit moindre que la somme des deux autres; les conditions de rencontre des deux circonférences qui nous occupent seraient donc

$$FF' < AA' + TF, \\ TF < AA' + TF', \\ AA' < TF + TF',$$

et Les deux premières sont toujours remplies; car le triangle FFF' donnerait même

$$TF' < FF' + TF \quad \text{et} \quad TF < FF' + TF',$$

quant à la troisième condition, elle exprime justement que le point T est extérieur à l'ellipse.

Lorsque le point T est en dehors de l'ellipse, les deux circonférences se coupent en deux points F' et F'', à chacun desquels correspond une tangente. Si le point T venait se poser sur la courbe, les deux circonférences deviendraient tangentes; elles ne détermineraient plus qu'un seul point, auquel correspondrait une seule tangente.

Les points F' et F'' étant obtenus comme le lieu d'être dit, il ne reste plus, pour obtenir les tangentes menées du point T à la courbe, qu'à abaisser de ce point les perpendiculaires TT' et TT'', et FF', et FF''.

Les tangentes menées d'un point extérieur à l'ellipse peuvent ainsi être construites sans que la courbe soit tracée à l'avance; ces tangentes pourraient servir à diriger le tracé de la courbe.

Les tangentes TT' et TT'', étant construites, on obtient les droites FF', et FF'', et M, en traçant les droites FF', et FF'', qui doivent y passer.

La solution qui vient d'être développée donne lieu à plusieurs remarques importantes: en premier lieu, le pied I, de la tangente TT', sur FF', étant le milieu de cette droite FF', si l'on joint OI, cette droite devra être perpendiculaire à FF', et en être la moitié, c'est-à-dire être égale à la moitié du grand axe; le point I, devra donc appartenir à la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre. C'est ce qu'on exprime par cet énoncé: Le lieu des projections des foyers de l'ellipse sur toutes les tangentes à la courbe est la circonférence décrite sur son grand axe comme diamètre.

En second lieu, les distances MF et M'F, sont égales; or, la première est la plus courte distance du point M, à la circonférence F'F'', dont le centre est en F'. Cette circonférence fixe, décrite de l'un des foyers comme centre avec le grand axe pour rayon, porte le nom de circonférence directrice de l'ellipse; on peut donc dire que l'ellipse est le lieu des points également distants d'un point fixe et d'une circonférence fixe.

Tangente à l'ellipse parallèlement à une direction donnée. La construction de la tangente à l'ellipse parallèlement à une droite donnée repose encore sur les mêmes principes: soit LI la droite donnée; la perpendiculaire FF', à LI, sera perpendiculaire à la tangente cherchée; le point I, où elle coupera la circonférence décrite sur le grand axe AA' comme diamètre, appartiendra donc à cette tangente; que l'on mène du point I, parallèlement à la droite donnée. On obtiendra le point de contact M, par l'intersection de la tangente TI, avec la droite qui joint le second foyer F' avec le joint symétrique F, du premier foyer par rapport à la tangente.

L'équation de l'ellipse rapportée à ses deux axes de symétrie, pris pour axes de coordonnées, se déduit aisément de sa définition.

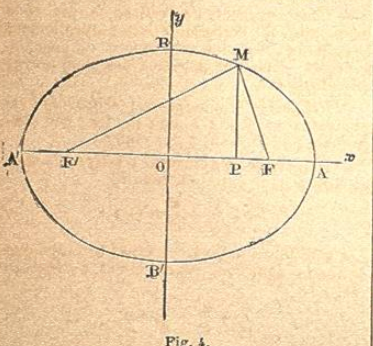


Fig. 4. Soient 2a la distance des foyers F et F', 2a la somme AA', constante, des rayons vecteurs, M un point de la courbe, MF et OP ses coordonnées.

données x et y, les distances FM et F'M se représentent par

$$FM = \sqrt{y^2 + (c-x)^2} \quad \text{et} \quad F'M = \sqrt{y^2 + (c+x)^2};$$

l'équation de la courbe sera donc

$$\sqrt{y^2 + (c-x)^2} + \sqrt{y^2 + (c+x)^2} = 2a.$$

On la transforme aisément en

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

en faisant disparaître les radicaux.

Si l'on fait dans cette équation $x = 0$, on tire $y = \pm \sqrt{a^2 - c^2}$; par conséquent, le demi-petit axe est $\sqrt{a^2 - c^2}$; en le représentant par b, on donne à l'équation de la courbe la forme plus simple

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Cette équation, résolue par rapport à y, donne

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2};$$

celle du cercle décrit sur AA' comme diamètre serait

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

On voit donc que l'ellipse se forme du cercle en raccourcissant ses ordonnées dans un rapport constant. En d'autres termes, l'ellipse ABAB' peut être considérée comme la projection orthogonale, sur son plan, du cercle décrit sur son grand axe comme diamètre, dans un plan incliné d'un angle dont le cosinus serait $\frac{b}{a}$.

Réciproquement, l'ellipse ABAB', projetée orthogonalement sur un plan mené par son petit axe BB', qui ferait avec le sien un angle dont le cosinus fût $\frac{b}{a}$, donnerait un cercle de rayon OB.

La perspective d'un cercle est aussi une ellipse, et réciproquement la perspective d'une ellipse, qui est généralement elliptique, peut devenir circulaire. V. CONIQUES.

Deux ellipses, ou plus généralement deux courbes du second degré, tracées dans un même plan et qui ne se coupent pas, peuvent être mises en perspective suivant deux cercles.

Le général Poncelet, qui a le premier remarqué ce fait, en a tiré d'importantes conséquences. Il a pu, en effet, transporter, sans nouvelles démonstrations, au système de deux coniques, toutes les propriétés projectives

$$y = -\frac{Bx + D}{A} \pm \frac{1}{A} \sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BD - AE)x + D^2 - AF};$$

pour que la courbe qui elle représente soit fermée, il faut que y devienne imaginaire pour de très-grandes valeurs de x, condition qui exige que B²-AC soit négatif; ainsi l'équation du second degré

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$$

ne représente une ellipse qu'à la condition que B²-AC soit négatif. Dans cette hypothèse, si les racines de l'équation

$$(B^2 - AC)x^2 + 2(BD - AE)x + D^2 - AF = 0$$

sont réelles, le trinôme placé sous le radical de la valeur de y reste positif pour toutes les valeurs de x comprises entre ces deux racines; la courbe existe donc réellement. Si ces racines sont égales, l'ellipse se réduit à un point: elle est évanouissante; si les racines sont imaginaires, la courbe n'existe plus.

On nomme cordes supplémentaires d'une ellipse deux cordes qui, partant des extrémités d'un même diamètre, aboutissent à un même point de la courbe. Deux cordes supplémentaires sont toujours parallèles à deux diamètres conjugués, c'est-à-dire que le produit de leurs coefficients angulaires est -1.

En effet, soient x'y' et -x',-y' les coordonnées des deux extrémités d'un même diamètre, x''y'' les deux coordonnées d'un point quelconque de la courbe, les coefficients angulaires des cordes qui joindront les points x'y' et x''y'', d'une part, -x',-y' et x''y'' de l'autre, seront

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} \quad \text{et} \quad \frac{y'' + y'}{x'' + x'}$$

le produit de ces coefficients angulaires sera donc

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} \cdot \frac{y'' + y'}{x'' + x'} = -1$$

ou

$$(a^2m^2 + b^2)n^2 + 2a^2mn + a^2n^2 - a^2b^2 = 0;$$

or, pour que la droite soit tangente à la courbe, il faut que ces abscisses soient égales, c'est-à-dire que

$$a^2m^2n^2 = (a^2m^2 + b^2)(a^2n^2 - a^2b^2);$$

cette équation se réduit à

$$n^2 - a^2m^2 - b^2, \quad \text{d'où} \quad n = \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2};$$

ainsi l'équation générale des tangentes à l'ellipse peut être mise sous la forme

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

Cette équation, au reste, représentera effectivement une tangente à l'ellipse, quel que soit m, parce que l'ellipse a des tangentes dans toutes les directions.

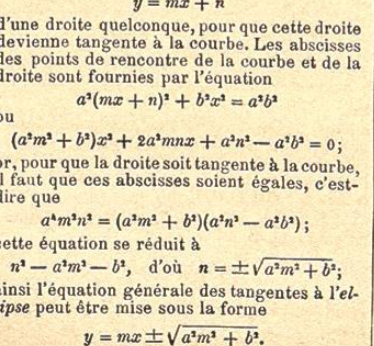


Fig. 5. quelque M de la courbe résulte de l'élimination de FM, que nous désignerons par p', entre l'équation qui définit la courbe

$$p^2 + p'^2 = 2a^2$$

et la relation

$$p'^2 = p^2 + 4c^2 - 4cp \cos \omega$$

que fournit le triangle F'M'F.

Cette élimination donne

$$p = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \omega},$$

ou, si l'on représente a' - c' par b',

$$p = \frac{b^2}{a - c \cos \omega},$$

ou encore, en posant $\frac{b^2}{a} = p$ et $\frac{c}{a} = e$,

$$p = \frac{p}{1 - e \cos \omega};$$

d'un système de deux cercles, c'est-à-dire toutes les propriétés d'une figure qui conviennent aussi à sa projection.

— Equation polaire de l'ellipse. Si l'on prend le foyer de gauche F pour pôle et l'axe focal FF' pour axe polaire, la relation entre les coordonnées FM ou p et MF' ou p' d'un point

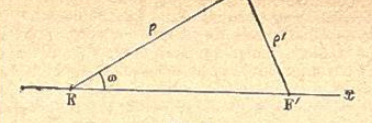


Fig. 5.

quelconque M de la courbe résulte de l'élimination de FM, que nous désignerons par p', entre l'équation qui définit la courbe

$$p^2 + p'^2 = 2a^2$$

et la relation

$$p'^2 = p^2 + 4c^2 - 4cp \cos \omega$$

que fournit le triangle F'M'F.

Cette élimination donne

$$p = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \omega},$$

ou, si l'on représente a' - c' par b',

$$p = \frac{b^2}{a - c \cos \omega},$$

ou encore, en posant $\frac{b^2}{a} = p$ et $\frac{c}{a} = e$,

$$p = \frac{p}{1 - e \cos \omega};$$

la longueur p est ce qu'on nomme le paramètre de l'ellipse; e en est l'excentricité; c'est le rapport de la distance des foyers au grand axe.

L'équation de l'ellipse rapportée à ses axes, pris pour axes de coordonnées, étant du second degré, l'ellipse est une courbe du second degré, c'est-à-dire l'une des courbes que peut représenter l'équation générale

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$$

en coordonnées rectilignes. Il est facile de déterminer la condition d'inégalité que doivent remplir les coefficients A, B, ..., F, pour que la courbe représentée soit effectivement une ellipse.

L'équation résolue par rapport à y donne

$$y = -\frac{Bx + D}{A} \pm \frac{1}{A} \sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BD - AE)x + D^2 - AF};$$

— Diamètres de l'ellipse. Le diamètre correspondant aux cordes parallèles à la direction y = mx de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

a pour équation

$$y = -\frac{b^2}{a^2m}x.$$

Le coefficient angulaire m du système des cordes et le coefficient angulaire m' du diamètre correspondant sont donc liés entre eux par la relation

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

C'est l'équation qui lie entre eux les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués. V. DIAMÈTRES.

On nomme cordes supplémentaires d'une ellipse deux cordes qui, partant des extrémités d'un même diamètre, aboutissent à un même point de la courbe. Deux cordes supplémentaires sont toujours parallèles à deux diamètres conjugués, c'est-à-dire que le produit de leurs coefficients angulaires est -1.

En effet, soient x'y' et -x',-y' les coordonnées des deux extrémités d'un même diamètre, x''y'' les deux coordonnées d'un point quelconque de la courbe, les coefficients angulaires des cordes qui joindront les points x'y' et x''y'', d'une part, -x',-y' et x''y'' de l'autre, seront

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} \quad \text{et} \quad \frac{y'' + y'}{x'' + x'}$$

le produit de ces coefficients angulaires sera donc

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} \cdot \frac{y'' + y'}{x'' + x'} = -1$$

ou

$$(a^2m^2 + b^2)n^2 + 2a^2mn + a^2n^2 - a^2b^2 = 0;$$

or, pour que la droite soit tangente à la courbe, il faut que ces abscisses soient égales, c'est-à-dire que

$$a^2m^2n^2 = (a^2m^2 + b^2)(a^2n^2 - a^2b^2);$$

cette équation se réduit à

$$n^2 - a^2m^2 - b^2, \quad \text{d'où} \quad n = \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2};$$

ainsi l'équation générale des tangentes à l'ellipse peut être mise sous la forme

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

Cette même aire serait représentée par l'intégrale

$$\int_{-a}^a \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{2} \sqrt{a^2-x^2} dx;$$

par conséquent,

$$\int_{-a}^a \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{2} \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2} ab \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{a} \sqrt{a^2-x^2}.$$

— Rectification de l'ellipse. La rectification de l'ellipse donne naissance à de nouvelles fonctions transcendentes qui, sous le nom de fonctions elliptiques, ont été particulièrement étudiées dans ce siècle.

L'élément de la courbe est

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= dx \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}} = dx \sqrt{\frac{a^2(a^2-x^2) + b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}} = dx \sqrt{\frac{a^4 - (a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}} = dx \sqrt{\frac{a^2 - (a^2-b^2)\frac{x^2}{a^2}}{a^2 - x^2}} = dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}},$$

e désignant l'excentricité.

La longueur de l'arc de la courbe compris entre le sommet B du petit axe et un point xy est donc représentée par l'intégrale

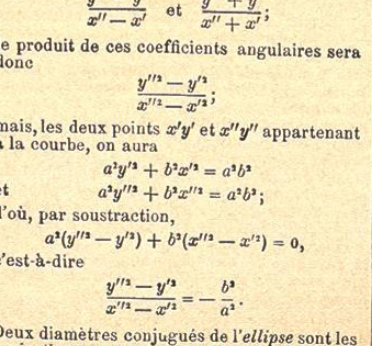
$$\int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}$$


Fig. 6. deux diamètres conjugués de l'ellipse sont les projections, sur son plan, de deux diamètres rectangulaires, et par conséquent conjugués de la circonférence de cercle dont cette ellipse est la projection orthogonale. Deux cordes supplémentaires de l'ellipse sont aussi les

projections de deux cordes rectangulaires du même cercle.

Les longueurs de deux diamètres conjugués de l'ellipse sont liées entre elles par une relation remarquable: La somme de leurs carrés est constante.

Si l'on cherche à établir un rapprochement entre ces mêmes diamètres et l'angle qu'ils font entre eux, on trouve que le produit de leurs longueurs par le sinus de l'angle qu'ils comprennent est constant; ce qui revient à dire que le parallélogramme formé par les tangentes à l'ellipse menées parallèlement à deux diamètres conjugués est constant.

Ces deux théorèmes, qui portent le nom d'Apollonius (de Perge), se déduisent aisément de la remarque que précède. V. DIAMÈTRES.

— Quadrature de l'ellipse. L'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

étant la projection du cercle $y^2 + x^2 = a^2$, sous un angle dont le cosinus serait $\frac{b}{a}$, l'aire de cette courbe doit être le produit de celle du cercle par $\frac{b}{a}$, c'est-à-dire

$$\frac{b}{a} \pi a^2 \quad \text{ou} \quad \pi ab.$$

L'aire d'un segment elliptique compris entre le grand axe et deux ordonnées perpendiculaires à cet axe est aussi le produit par $\frac{b}{a}$ de l'aire du segment correspondant du cercle. L'aire M₁P₁P₁M₁ du segment circulaire

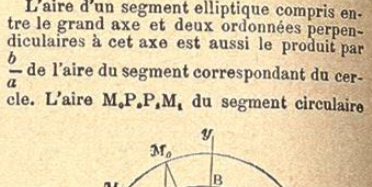


Fig. 7. est la somme de celles du secteur OM₁M₁ et du triangle OM₁P₁, diminuée de celle du triangle OM₁P₁; si l'on désigne par x, et x₁ les abscisses des points M, et M₁, cette aire est représentée par

$$\frac{1}{2} a^2 (\arcsin \frac{x_1}{a} - \arcsin \frac{x}{a}) + \frac{1}{2} (x_1 \sqrt{a^2 - x_1^2} - x \sqrt{a^2 - x^2});$$

l'aire du segment correspondant de l'ellipse N₁P₁P₁N₁, est donc

$$\frac{1}{2} \frac{b}{a} (\arcsin \frac{x_1}{a} - \arcsin \frac{x}{a}) + \frac{1}{2} \frac{b}{a} (x_1 \sqrt{a^2 - x_1^2} - x \sqrt{a^2 - x^2}).$$

Si l'on fait partir le segment elliptique de l'extrémité du petit axe, il faut faire dans la formule précédente x₁ = 0; il vient alors, pour la mesure du segment BOP₁N₁,

$$\frac{1}{2} ab \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{a} \right) + \frac{1}{2} \frac{b^2}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

ou

$$\frac{1}{2} ab \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Cette même aire serait représentée par l'intégrale

$$\int_0^x \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}} dx;$$

par conséquent,

$$\int_0^x \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}} dx = \frac{1}{2} ab \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

— Rectification de l'ellipse. La rectification de l'ellipse donne naissance à de nouvelles fonctions transcendentes qui, sous le nom de fonctions elliptiques, ont été particulièrement étudiées dans ce siècle.

L'élément de la courbe est

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= dx \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}} = dx \sqrt{\frac{a^2(a^2-x^2) + b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}} = dx \sqrt{\frac{a^4 - (a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}} = dx \sqrt{\frac{a^2 - (a^2-b^2)\frac{x^2}{a^2}}{a^2 - x^2}} = dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}},$$

e désignant l'excentricité.

La longueur de l'arc de la courbe compris entre le sommet B du petit axe et un point xy est donc représentée par l'intégrale

$$\int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}$$

— Rectification de l'ellipse. La rectification de l'ellipse donne naissance à de nouvelles fonctions transcendentes qui, sous le nom de fonctions elliptiques, ont été particulièrement étudiées dans ce siècle.

L'élément de la courbe est

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= dx \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}} = dx \sqrt{\frac{a^2(a^2-x^2) + b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}} = dx \sqrt{\frac{a^4 - (a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}} = dx \sqrt{\frac{a^2 - (a^2-b^2)\frac{x^2}{a^2}}{a^2 - x^2}} = dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}},$$

e désignant l'excentricité.

La longueur de l'arc de la courbe compris entre le sommet B du petit axe et un point xy est donc représentée par l'intégrale

$$\int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}$$

— Rectification de l'ellipse. La rectification de l'ellipse donne naissance à de nouvelles fonctions transcendentes qui, sous le nom de fonctions elliptiques, ont été particulièrement étudiées dans ce siècle.

L'élément de la courbe est

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= dx \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}} = dx \sqrt{\frac{a^2(a^2-x^2) + b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}} = dx \sqrt{\frac{a^4 - (a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}} = dx \sqrt{\frac{a^2 - (a^2-b^2)\frac{x^2}{a^2}}{a^2 - x^2}} = dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}},$$

e désignant l'excentricité.

La longueur de l'arc de la courbe compris entre le sommet B du petit axe et un point xy est donc représentée par l'intégrale

$$\int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}$$

— Rectification de l'ellipse. La rectification de l'ellipse donne naissance à de nouvelles fonctions transcendentes qui, sous le nom de fonctions elliptiques, ont été particulièrement étudiées dans ce siècle.

L'élément de la courbe est

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= dx \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}} = dx \sqrt{\frac{a^2(a^2-x^2) + b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}} = dx \sqrt{\frac{a^4 - (a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}} = dx \sqrt{\frac{a^2 - (a^2-b^2)\frac{x^2}{a^2}}{a^2 - x^2}} = dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}},$$

e désignant l'excentricité.

La longueur de l'arc de la courbe compris entre le sommet B du petit axe et un point xy est donc représentée par l'intégrale

$$\int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}$$

Fig. 8. deux diamètres conjugués de l'ellipse sont les projections, sur son plan, de deux diamètres rectangulaires, et par conséquent conjugués de la circonférence de cercle dont cette ellipse est la projection orthogonale. Deux cordes supplémentaires de l'ellipse sont aussi les

projections de deux cordes rectangulaires du même cercle.

Les longueurs de deux diamètres conjugués de l'ellipse sont liées entre elles par une relation remarquable: La somme de leurs carrés est constante.

Si l'on cherche à établir un rapprochement entre ces mêmes diamètres et l'angle qu'ils font entre eux, on trouve que le produit de leurs longueurs par le sinus de l'angle qu'ils comprennent est constant; ce qui revient à dire que le parallélogramme formé par les tangentes à l'ellipse menées parallèlement à deux diamètres conjugués est constant.

Ces deux théorèmes, qui portent le nom d'Apollonius (de Perge), se déduisent aisément de la remarque que précède. V. DIAMÈTRES.

— Quadrature de l'ellipse. L'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

étant la projection du cercle $y^2 + x^2 = a^2$, sous un angle dont le cosinus serait $\frac{b}{a}$, l'aire de cette courbe doit être le produit de celle du cercle par $\frac{b}{a}$, c'est-à-dire

$$\frac{b}{a} \pi a^2 \quad \text{ou} \quad \pi ab.$$

L'aire d'un segment elliptique compris entre le grand axe et deux ordonnées perpendiculaires à cet axe est aussi le produit par $\frac{b}{a}$ de l'aire du segment correspondant du cercle. L'aire M₁P₁P₁M₁ du segment circulaire



Fig. 9. est la somme de celles du secteur OM₁M₁ et du triangle OM₁P₁, diminuée de celle du triangle OM₁P₁; si l'on désigne par x, et x₁ les abscisses des points M, et M₁, cette aire est représentée par

$$\frac{1}{2} a^2 (\arcsin \frac{x_1}{a} - \arcsin \frac{x}{a}) + \frac{1}{2} (x_1 \sqrt{a^2 - x_1^2} - x \sqrt{a^2 - x^2});$$

l'aire du segment correspondant de l'ellipse N₁P₁P₁N₁, est donc

$$\frac{1}{2} \frac{b}{a} (\arcsin \frac{x_1}{a} - \arcsin \frac{x}{a}) + \frac{1}{2} \frac{b}{a} (x_1 \sqrt{a^2 - x_1^2} - x \sqrt{a^2 - x^2}).$$

Cette intégrale a deux périodes (v. INTÉGRAL), une réelle

$$\int_0^a dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}},$$

dont la valeur n'est autre que la longueur de l'ellipse entière, et l'autre imaginaire

$$\int_0^a dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}},$$

qui n'a pas encore reçu d'interprétation. Cette intégrale est irréductible aux fonctions circulaires qui n'admettent qu'une seule période. V. FERMION et ÉLIPSOÏDES (fonction).

— Conjugues de l'ellipse. Les conjugués de l'ellipse (v. CONIQUES) sont toutes les hyperboles qui ont avec elle un système de diamètres conjugués communs. Les solutions imaginaires de tous les problèmes impossibles que l'on peut se proposer relativement à l'ellipse se rapportent donc à ces hyperboles. Ainsi, si l'on se propose de mener une tangente à l'ellipse par un point intérieur à la courbe, les coordonnées imaginaires des points de contact, fournies par les équations, seront celles des points de contact des tangentes menées du même point à une certaine conjuguée de l'ellipse. Cette conjuguée sera d'ailleurs celle qui touchera la courbe aux extrémités du diamètre mené par le point donné, parce que la corde des contacts sera restée réelle et conjuguée du diamètre mené par le point d'origine; les tangentes doivent partir; elle ne pourra donc couper que la conjuguée ayant pour caractéristique son coefficient angulaire, c'est-à-dire la conjuguée tangente à l'ellipse aux extrémités du diamètre mené par le point donné.

Les asymptotes de l'ellipse sont

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{1 - e^2} x;$$

ces deux équations représentent les deux faisceaux d'asymptotes aux conjuguées hyperboliques de la courbe.

Si, dans l'équation

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

des tangentes à l'ellipse, on donne à m une valeur imaginaire m + n√-1, on obtient l'équation en coordonnées imaginaires d'une tangente à l'une des mêmes hyperboles. La conjuguée à laquelle appartient la tangente a sa caractéristique C déterminée par l'équation

$$(C - m)(ma^2 + b^2) = n^2a^2C.$$

— Ellipse évanouissante. L'équation de l'ellipse évanouissante ne représente plus qu'un seul point en coordonnées réelles: en coordonnées imaginaires, elle représente des conjuguées de cette ellipse évanouissante, c'est-à-dire des hyperboles réduites à leurs asymptotes; l'équation représente donc deux faisceaux de droites divergeant l'un et l'autre du centre de l'ellipse évanouissante.

— Ellipse imaginaire. L'équation de l'ellipse imaginaire, réduite à sa forme la plus simple par les mêmes procédés employés pour l'ellipse réelle, est

$$a^2y^2 + b^2x^2 = -a^2b^2.$$

Le lieu représenté par cette équation se compose des mêmes hyperboles que représente l'équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2;$$

mais les caractéristiques de la même conjuguée ne sont pas les mêmes dans les deux équations; ainsi, la conjuguée C = 0 du lieu a^2y^2 + b^2x^2 = -a^2b^2 touche l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

aux extrémités de son grand axe, tandis que la conjuguée de même caractéristique, C = 0, du lieu a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 touche l'ellipse aux extrémités de son petit axe. L'inversion se fait au moment où l'ellipse s'évanouissant, les deux axes se confondent.

L'ellipse a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 est l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu

$$a^2y^2 + b^2x^2 = -a^2b^2$$

(v. ENVELOPPES). En effet, cette ellipse est fournie par les solutions de la forme

$$x = p\sqrt{-1}, \quad y = q\sqrt{-1}$$

de l'équation du lieu; or, en un point dont les coordonnées ont cette forme, la dérivée de y par rapport à x, - $\frac{b^2x}{a^2y}$ est réelle.

— Ellipse évanouissante. L'équation de l'ellipse évanouissante ne représente plus qu'un seul point en coordonnées réelles: en coordonnées imaginaires, elle représente des conjuguées de cette ellipse évanouissante, c'est-à-dire des hyperboles réduites à leurs asymptotes; l'équation représente donc deux faisceaux de droites divergeant l'un et l'autre du centre de l'ellipse évanouissante.

— Ellipse imaginaire. L'équation de l'ellipse imaginaire, réduite à sa forme la plus simple par les mêmes procédés employés pour l'ellipse réelle, est

$$a^2y^2 + b^2x^2 = -a^2b^2.$$

